应用数学和力学，第11卷第3期(1990年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

几类可积的非线性常微分方程(Ⅰ)——一阶方程*

李鸿祥　Z.F.斯塔克

(上海铁道学院)　　(南斯拉夫)

摘　要

本文给出一阶非线性常微分方程的几个可积性结果和几类可积方程，指出许多已知的可积性结果和可积方程都是它们的特例．这些方程可望在物理学、力学和推导孤立子方程及寻求孤立子解中找到应用．

一、引　言

变系数非线性微分方程在物理学及各种力学中有广泛应用．这类方程的数值求解问题已有不少解法或算法．但是，如果一个微分方程能用有限形式积出，那就给有关问题的分析、演绎和解决带来很大方便．也许这就是近年来在国内外一些重要刊物上发表多篇有关求微分方程精确解的论文(例如[1]～[6]）的一个原因.另外，孤立子现象现已被物理学家用来研究“基本”粒子．这是一种非线性现象，可用非线性微分方程来描述．判断一个非线性方程是否完全可积，是否有孤立子解，是孤立子理论的一个重要课题．文[2]中给出了与孤立子问题有关的几类可积的非线性常微分方程，文[6]中提出了Klein-Gordon型的非线性偏微分方程，并求出了它们的具有基本粒子性质的孤立子解．

本文给出一阶非线性常微分方程的几个可积性结果，构造出几类可积的一阶非线性方程．在随后的文(Ⅱ)中将给出几类可积的高阶非线性方程．它们都是变系数的，其通积分或通解都以公式给出．通过对有关函数及变系数的适当选择，许多已知的可积性结果或可积方程类型都可作为它们的推论或特例而导出．我们预料，这些方程可在物理学、力学和孤立子方程的推导及求出孤立子解中找到应用．

二、一阶方程

假设本文所提到的函数都是定义在某个区间I内，且在其中满足定理中的条件．

定理2.1　设$f,F\in C$，$h,v\in C^1$，$h(v)\neq 0$．若$v=v(x)$是一阶方程

* 楼世博推荐，1989年4月29日收到．

$$v'=f(x,\ v) \tag{2.1}$$

的一个解，$u=\psi(x,\ A)$（A 为一任意常数，下同）是可积方程

$$u'=F(x,\ u) \tag{2.2}$$

的通解，则一阶非线性方程

$$y'+\frac{h'(v)}{h(v)}f(x,\ v)y=\frac{1}{h(v)}F(x,\ yh(v)) \tag{2.3}$$

可积，且其通解为

$$y=\frac{\psi(x,\ A)}{h(v(x))} \tag{2.4}$$

证 在方程（2.3）中令

$$y=\frac{u}{h(v(x))} \tag{2.5}$$

则它变为可积方程（2.2）。将其通解 $u=\psi(x,\ A)$ 代入到(2.5)式中，便得其通解如(2.4)式。证毕。

推论2.1 设 $P,\ Q,\ F_1\in C,\ v\in C^1,\ v(x)\neq 0$。若等式

$$v'-P(x)v=kQ(x)v^2 \tag{2.6}$$

成立，式中 k 为一常数，则下列一阶方程可积

$$y'+P(x)y=Q(x)F_1(yv(x)) \tag{2.7}$$

证 在(2.1)，(2.2)和(2.5)中，取

$$f(x,\ v)=P(x)v+kQ(x)v^2,$$
$$F(x,\ u)=v(x)Q(x)[F_1(u)+ku],$$
$$h(v)=v,$$

则方程(2.1)变为(2.6)，变换(2.5)将(2.2)变为(2.7)。依定理2.1，推论得证。

这个推论就是[1]中的定理1.1。

推论2.2 设 $P,\ Q,\ F_1\in C,\ v\in C^1,\ v(x)\neq 0,\ k,\ \alpha$ 和 β 为常数（$\alpha\neq 0$）。若等式

$$v'+P(x)v=kQ(x)v^\beta \tag{2.8}$$

成立，则下列方程可积：

$$y'+P(x)y=Q(x)v^\beta F_1\left(\frac{y^\alpha}{v^\alpha}\right) \tag{2.9}$$

证 在(2.1)，(2.2)和(2.5)中，置

$$f(x,\ v)=-P(x)v+kQ(x)v^\beta,$$
$$F(x,\ u)=Q(x)v^{\beta-1}(x)[F_1(u^\alpha)-ku],$$
$$h(v)=v^{-1},$$

则(2.1)式变为(2.8)，变换(2.5)将(2.2)化为方程(2.9)。根据定理1.1，方程(2.9)可积。

本推论即为[9]中的定理1。

定理2.2 设 $f,\ F\in C;\ v,\ h,\ \varphi\in C^1$，且 $h(v)\neq 0$。若 $v=v(x)$ 是方程(2.1)的一个解，$u=\psi(x,\ A)$ 是可积方程(2.2)的通解，则一阶非线性方程

$$y'+\frac{h'(v)}{h(v)}f(x,\ v)y=\frac{1}{h(v)}F(x,\ (y+\varphi(x))h(v))$$
$$-\frac{h'(v)}{h(v)}f(x,\ v)\varphi(x)-\varphi'(x) \tag{2.10}$$

可积，且其通解为

$$y=\frac{\psi(x,A)}{h(v(x))}-\varphi(x) \tag{2.11}$$

证 变换

$$y=\frac{u}{h(v(x))}-\varphi(x) \tag{2.12}$$

将方程(2.10)化为可积的方程(2.2)。把其通解代入(2.12)，即得通解(2.11)。证毕.

显然，方程(2.3)是方程(2.10)当$\varphi(x)\equiv 0$时的特例.

推论2.3 设P，Q，$F_1\in C$，v，$\varphi\in C^1$，且$v(x)\neq 0$. 若(2.6)式成立，则一阶非线性方程

$$y'+P(x)y=Q(x)F_1((y+\varphi(x))v)-P(x)\varphi(x)-\varphi'(x) \tag{2.13}$$

可经变换

$$y=\frac{u}{v(x)}-\varphi(x) \tag{2.14}$$

化为可分离变量方程.

证明与推论2.1类似，不赘。本推论即为[1]中的定理1.2.

根据定理2.1和定理2.2，从任二可积的一阶方程出发，我们都能作出一个新的同阶的可积方程.

例2.1 方程 $v'+v\tan x=v\cos x(\ln v-\ln \cos x)$ 有一解 $v=\cos x$（参看[10]的(I.2)）；Riccati 型方程

$$xu'=x^{n+1}u^2-u+n^2x^{n-1} \tag{2.15}$$

是可积的，式中 n 为一正实数，且其通解为（[10]的(I.7)）

$$u=\frac{n}{x}\tan(x^n+A) \tag{2.16}$$

置

$$y=\frac{u}{v(x)}=\frac{u}{\cos x} \tag{2.17}$$

代入方程(2.15)，便得一个可积的 Riccati 型方程

$$y'+\left(\frac{1}{x}-\tan x\right)y=\frac{x^{n-2}}{\cos x}[x^2y^2\cos^2x+n^2] \tag{2.18}$$

根据定理2.1，利用(2.4)和(2.16)，还可得到(2.18)的通解

$$y=\frac{n}{x\cos x}\tan(x^n+A)$$

定理2.3 设f，$F\in C$，h，g，w，v，$\varphi\in C^1$，$g(x)\neq 0$，$h(v)\neq 0$，$w(y)\neq \text{const}$. 若$v=v(x)$为(2.1)的一个解，$u=\psi(x,A)$为可积方程(2.2)的通解，则一阶方程

$$g(x)w'(y)y'+\left[\frac{h'(v)}{h(v)}f(x,v)g(x)+g'(x)\right]w(y)$$

$$=\frac{1}{h(v)}F(x,h(v)[g(x)w(y)+\varphi(x)])-\frac{h'(v)}{h(v)}f(x,v)\varphi(x)-\varphi'(x) \tag{2.19}$$

可积，且其通积分为

$$w(y)=\frac{1}{g(x)}\left[\frac{\psi(x,A)}{h(v(x))}-\varphi(x)\right] \tag{2.20}$$

证 对方程(2.19)作变换

$$w(y)=\frac{1}{g(x)}\left[\frac{u}{h(v(x))}-\varphi(x)\right] \tag{2.21}$$

则得可积方程(2.2)。将其通解 $u=\psi(x, A)$ 代入(2.21)，便得解式(2.20)。证毕。

显然，定理2.1和定理2.2分别是定理2.3当 $\varphi(x)\equiv 0$，$w(y)=y$，$g(x)\equiv 1$ 和 $w(y)=y$，$g(x)\equiv 1$ 时的特例。

推论2.4 设 P，Q，$F_1\in C$；g，w，v，$\varphi\in C^1$；$g(x)\neq 0$；$v(x)\neq 0$；$w(y)\neq \text{const}$。若等式

$$v'-P(x)v=kQ(x)v^{2-a} \tag{2.22}$$

成立，式中 k 和 a 为常数，则一阶非线性方程

$$\begin{aligned} g(x)w'(y)y'+[P(x)g(x)+g'(x)]w(y) \\ =[g(x)w(y)+\varphi(x)]^a Q(x)F_1((g(x)w(y) \\ +\varphi(x))v(x))-P(x)\varphi(x)-\varphi'(x) \end{aligned} \tag{2.23}$$

可积，且其通积分为

$$\int\frac{du}{u^a F_1(u)+ku}=\int Q(x)v^{1-a}(x)dx+A \tag{2.24}$$

式中

$$u=v(x)[g(x)w(y)+\varphi(x)] \tag{2.25}$$

证 在(2.1)，(2.2)和(2.21)中置

$$f(x, v)=P(x)v+kQ(x)v^{2-a},$$

$$F(x, u)=Q(x)v^{1-a}(x)[u^aF_1(u)+ku],\quad h(v)=v,$$

则(2.1)变为(2.22)，方程(2.19)变为(2.23)。对它作变换

$$w(y)=\frac{1}{g(x)}\left[\frac{u}{v(x)}-\varphi(x)\right],$$

方程(2.2)呈下形　$u'=Q(x)v^{1-a}(x)[u^aF_1(u)+ku]$

分离变量后求积，便得通积分(2.24)。式中 u 如(2.25)所示。

这个推论就是[11]中的定理1.2（这里 $f(x)$ 被换为 $g(x)$）。

从方程（2.23）可导出一些有用的可积类型。

在（2.22）中令 $k=0$，取 $v(x)=\exp\left(\int P(x)dx\right)$，并在(2.23)中置 $g(x)\equiv 1$，$\varphi(x)\equiv 0$，便得可积方程

$$w'(y)y'+P(x)w(y)=w^a(y)Q(x)F\left(w(y)\exp\left(\int P(x)dx\right)\right) \tag{2.26}$$

[1]中方程（1.10）是此方程当 $w(y)=y$ 时的特例。

在（2.26）中取 $F(u)\equiv 1$，得

$$w'(y)y'+P(x)w(y)=w^a(y)Q(x) \tag{2.27}$$

它显然是 Bernoulli 方程 $z'+P(x)z=z^aQ(x)$ 令 $z=w(y)$ 时的一种推广。我们称（2.27）为拟 Bernoulli 方程，其通积分可由（2.24）式得出

$$w^{1-a}(y)=\exp\left[-(1-a)\int P(x)dx\right]\cdot\left[(1-a)\int Q(x)\exp\left[(1-a)\int P(x)dx\right]dx+A\right] \tag{2.28}$$

在（2.27）中令 $a=0$，便得

$$w'(y)y'+P(x)w(y)=Q(x) \tag{2.29}$$

它可经 $w(y)=z$ 化为一阶线性方程 $z'+P(x)z=Q(x)$。我们称它为拟线性方程其通积分为

$$w(y)=\exp\left[-\int P(x)\,dx\right]\left[\int Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right]dx+A\right] \tag{2.30}$$

在（2.26）中，取$P(x)=-G'(x)/G(x)$，$G(x)\neq 0$，$G\in C^1$，$a=0$，$F(u)=au^2-bu+c$（a，b，c 为实常数），且换$Q(x)/G^2(x)$ 为 $Q(x)$，便得

$$w'(y)y'-\frac{G'(x)}{G(x)}w(y)=Q(x)[aw^2(y)-bG(x)w(y)+cG^2(x)] \tag{2.31}$$

它是[1]中可积的 Riccati 型方程(2.1) 的一种推广。我们称它为拟 Riccati 型方程，其通积分可用[1]中结果得出。

类似地，我们还可导得与[1]中 Riccati 型方程(2.7)和(2.11) 等相对应的拟 Riccati 型方程

$$w'(y)y'-\frac{G'(x)}{G(x)}w(y)=Q(x)\{a[w(y)+E(x)]^2-b[w(y)$$

$$+E(x)]G(x)+cG^2(x)\}+\frac{G'(x)}{G(x)}E(x)-E'(x) \tag{2.32}$$

$$w'(y)y'=R(x)w^2(y)+\Psi(x)w(y)+\Phi(x) \tag{2.33}$$

式中 $R(x)$，$\Psi(x)$和$\Phi(x)$分别如[1]中(2.12)，(2.13)和(2.14)所示。

我们指出，在[7]和[8]中下列各题中的一阶非线性方程都是方程（2.19)，(2.27）或(2.29)的特例：

在[7]中：1.207～208，1.212，1.220，1.230，1.232～233，1.240～242，1.258～259，1.263，1.298，1.300，1.314，1.347，1.350～351，1.353，1.357～359。

在[8]中：1.109～110，1.115～125，1.128，1.142，1.202，1.215，1.279，1.305，1.355，1.430～431，1.433～434，1.463～464，1.508～512，1.515～517。

例2.2 方程 $y'\cos y+x\sin y\cos^2 y-\sin^3 y=0$([7,(1.351)]，[8,(1.142)])可改写为

$$\frac{y'}{\cos^2 y}+x\tan y=\tan^3 y$$

这是拟 Bernoulli 方程（2.27）当 $w(y)=\tan y$，$P(x)=x$，$Q(x)\equiv 1$，$\alpha=3$ 时的特例。由(2.28)式得通积分

$$\cot^2 y=\exp[x^2]\left(A-2\int\exp[-x^2]dx\right)$$

例2.3 方程$y'=(1+y^2)\left(x-\frac{1}{x}\tan^{-1}y\right)$([8,(1.215)])可改写为

$$\frac{y'}{1+y^2}+\frac{1}{x}\tan^{-1}y=x$$

它是拟线性方程（2.29）型的。此处$w(y)=\tan^{-1}y$，$P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=x$。依(2.30)式可得其通解

$$y=\tan\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{A}{x}\right)$$

最后，我们指出，在满足相应条件的方程(2.19)，(2.23)，(2.27)，(2.29)，(2.31)和

(2.32) 中，给函数 $g(x)$，$f(x, v)$，$h(v)$，$\varphi(x)$，$P(x)$，$Q(x)$，$E(x)$，$G(x)$和$w(y)$ 等以各种具体形式，便可得到大量可积的一阶非线性方程。

参 考 文 献

[1] Li Hong-xiang, Elementary quadratures of ordinary differential equations, *Amer. Math. Monthly*, **89**, 3 (1982), 198—208; *Math. Rev.*, 83d:34008.

[2] 王存政，微分方程的求解公式 (Ⅰ)——高阶变系数常微分方程的求解公式，应用数学学报，**5**, 3 (1982), 274—284; *Math. Rev.*, 84c:34003.

[3] 李鸿祥，关于几类 Riccati 方程和二阶常微分方程的周期解，应用数学和力学，**3**, 2 (1982), 203—209; *Math. Rev.*, 83m:34036.

[4] 李鸿祥，关于几类高阶变系数线性方程的求解，应用数学学报，**6**, 1 (1983), 29—33; *Math. Rev.*, 85h:34003.

[5] 王存政，方程的求解公式，科学通报，**30**, 16 (1985), 1211—1214.

[6] 王存政，关于几个非线性偏微分方程及其孤立子解，数学物理学报，**5**, 1 (1985), 43—51.

[7] Kamke, E., 《常微分方程手册》，张鸿林译，科学出版社 (1980).

[8] Murphy, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, D. Van Nostrand, New York (1960).

[9] 郑隆炘，关于变系数一阶微分方程的几个可积类型，高等数学，**2**, 4 (1986), 158—162.

[10] 李鸿祥，对E. 卡姆克的《常微分方程手册》的一些补充(Ⅰ)关于 y' 为一次的方程；(Ⅱ) 关于 Riccati 方程，上海铁道学院学报，**7**, 1 (1986), 9—22; **7**; 2 (1986), 27—38.

[11] Li Hong-xiang and Fan Xing, Re-discussion on elementary quadratrues of ordinary differential equations, 上海铁道学院学报，**8**, 2 (1987), 1—15.

Several Classes of Integrable Nonlinear Ordinary Differential Equations (Ⅰ)——First-Order Equations

Li Hong-xiang

(*Shanghai Institute of Railway Technology, Shanghai*)

Z. F. Starc

(*Zarka Zrenjanina* 93, 26300 *Vrsac, Yugoslavia*)

Abstract

In this paper we give some results of integrability and several classes of integrable equations of first-order nonlinear ordinary differential equations. Many known results of integrability and integrable equations are special cases of them. They may be applied in physics, mechanics and deriving soliton equations and finding soliton solutions.