

# 《非线性Mathieu方程亚谐共振分叉理论》的一些推广\*

陈予恕 詹凯君

(天津大学, 1989年2月1日收到)

## 摘 要

在文[1]中, 作者讨论了非线性Mathieu方程的亚谐共振分叉理论, 得到的主要结果是, 在参数 $\alpha$ - $\beta$ 平面上, 具有六种不同拓扑结构的分叉图。本文推广了这一结果, 指出, 如果选取不同的芽来计算同样的分叉问题, 则可以有十四种不同拓扑结构的分叉图。

## 一、引 言

研究非线性Mathieu方程

$$u'' + \delta[u' + h(u, u', \mu, \delta)] + (1 + \mu)u + f(u, u', \mu) + (2\epsilon \cos 2t)[u + g(u, u', \mu, \epsilon)] = 0 \quad (1.1)$$

具有理论和应用上的意义。文献[1]已经详细讨论了(1.1)的亚谐共振分叉理论, 包括对称性, 分叉方程及分叉图。这里简单罗列一下[1]中的主要结果。

对(1.1)应用Liapunov-Schmidt方法, 可以得到以 $\mu$ 作为分叉参数的分叉方程为

$$R = (\mu + A)^2 + \delta^2(1 + B)^2 - \epsilon^2[(1 + C)^2 + \delta^2 D^2] = 0 \quad (1.2)$$

其中  $A = \sum a_j r^{2j}$ ,  $B = \sum b_j r^{2j}$ ,  $C = \sum c_j r^{2j}$ ,  $D = \sum d_j r^{2j}$ 。符号的意义及计算可见[1]。

当 $a_1 \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ 时, 可以应用一个非奇异的、近于恒等的变换, 使得(1.2)等价于

$$(\mu + a_1 r^2)^2 + \alpha + \beta r^2 = 0 \quad (1.3)$$

其中  $\alpha = \delta^2 - \epsilon^2$ ,  $\beta = 2[b_1(0)\delta^2 - c_1(0)\epsilon^2]$ 。

在 $(\alpha, \beta) \in o(R^2)$ 内, 一共有六种不同拓扑结构的分叉图。这里 $o(R^2)$ 表示 $R^2$ 内原点附近的邻域。

然而, 在讨论(1.1)的分叉性质时, 只有当 $\alpha$ 和 $\beta$ 均不为零时, (1.3)才显示出它的准确性。否则就要重新考虑与(1.2)等价的分叉方程。在(1.3)中,  $\alpha$ 和 $\beta$ 具有双重意义, 一是作为模型的力学参数; 二是作为全开折参数。从数学上说, 只要 $\alpha, \beta$ 均不为零(哪怕是无穷小), (1.3)都能确切反映出(1.1)的分叉特性。然而, 从应用的角度看,  $\alpha$ 和 $\beta$ 都非常小时, 有可能导致(1.3)不能准确地反映(1.1)的分叉性质。也就是说, 应用上,  $\alpha$

\* 周恒推荐。国家自然科学基金资助。

和 $\beta$ 作为力学参数的作用更大些。那么当 $\alpha$ 和 $\beta$ 均为零或近似为零时，(1.1)的分叉特性如何呢？本文的工作就是找出一个与(1.2)等价的分叉方程，它能比较全面地反映出(1.1)的分叉性质。

我们的结论是，对于(1.2)来说，如果 $a_1 \neq 0$ ，那么可能存在14种不同拓扑结构的分叉图。

## 二、芽 的 选 择

当 $\alpha = \beta = 0$ 时，(1.3)成为

$$(\mu + a_1 r^2)^2 = 0 \quad (2.1)$$

(2.1)的余维数不为零，因此它不能确切反映出原系统的力学性质。首先计算芽 $(\mu + a_1 r^2)^2$ 的余维数。我们有

**结论2.1** 芽 $(\mu + a_1 r^2)^2$ 的余维数为无穷。

为证明这一结论，我们引入

**定理2.1** 如果有一个理想 $I \subset E_n$ ，其中 $n \geq 2$ ，仅由一个芽 $p$ 生成的，且 $p(0) = 0$ ，则 $I$ 具有无穷余维。

定理的证明见[2]。

**结论2.1的证明** 记 $u = r^2$ ， $g = (\mu + a_1 u)^2 r$

则 $g$ 的限制切空间为

$$\begin{aligned} RT(g) &= \langle g, u g_u \rangle \{r\} \\ &= \langle (\mu + a_1 u)^2, 2a_1 u(\mu + a_1 u) \rangle \{r\} \\ &\subset \langle \mu + a_1 u \rangle = p \end{aligned}$$

显然 $p(0) = 0$ 。由定理2.1即得证。

**结论2.2** 芽 $(\mu + A)^2$ 具有无穷余维数。其中 $A = \sum a_j r^{2j}$ 。

因此，当 $\alpha = \beta = 0$ 时(在应用上，当 $\alpha \approx 0$ ， $\beta \approx 0$ 时)，我们不得不增加无穷多个开折参数于芽 $(\mu + a_1 r^2)^2$ 上，以获得能确切反映系统力学性质的分叉方程。显然这是不可能的，在应用上也没有必要(在应用上，我们总是人为地取前几项作为近似解)。为此我们转而寻求一个新的芽，使得其具有有穷余维。

将(1.2)改写成

$$\begin{aligned} R &= (\mu + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \dots)^2 + \delta^2 (1 + b_1 r^2 + \dots)^2 \\ &\quad - \varepsilon^2 [(1 + c_1 r^2 + \dots)^2 + \delta^2 (d_1 r^2 + d_2 r^4 + \dots)^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

系数 $a_j$ ， $b_j$ ， $c_j$ ， $d_j$ 均为 $\mu$ ， $\delta$ ， $\varepsilon$ 的函数，因而可以按 $\mu$ ， $\delta$ ， $\varepsilon$ 的幕级数展开。例如

$$a_j = a_j(0) + a_{j\mu}(0)\mu + a_{j\delta}(0)\delta + a_{j\varepsilon}(0)\varepsilon + \dots$$

于是(2.2)可以重新写成如下形式

$$\begin{aligned} R &= [\mu + a_1(0)u]^2 + 2[a_2(0) + a_1(0)a_{1\mu}(0) + b_{2\mu}(0)\delta^2 \\ &\quad - c_{2\mu}(0)\varepsilon^2]\mu u^2 + 2[a_1(0)a_2(0) + b_1(0)b_2(0)\delta^2 \\ &\quad - c_1(0)c_2(0)\varepsilon^2 - d_1(0)d_2(0)\delta^2\varepsilon^2]u^3 + 2a_{1\mu}(0)u\mu^2 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.2)'$$

为书写简便，以下记 $a_1(0) = a_1$ ，并且

$$\begin{aligned} a &= 2[a_2(0) + a_1(0)a_{1\mu}(0) + b_{2\mu}(0)\delta^2 - c_{2\mu}(0)\varepsilon^2] \\ b &= 2[a_1(0)a_2(0) + b_1(0)b_2(0)\delta^2 - c_1(0)c_2(0)\varepsilon^2 - d_1(0)d_2(0)\delta^2\varepsilon^2] \end{aligned}$$

$$c=2a_1\mu(0)$$

则我们取

$$g=(\mu+a_1u)^2+a\mu u^2+bu^3+c\mu u^2 \quad (2.3)$$

作为新的芽。下节要证明，这个芽的余维数是有限的。对于芽(2.3)，我们有一个识别定理来保证它是 $Z_2$ 强等价于一个标准形 $h$ 的。

**定理2.2** 如果存在一个标准形

$$h^*=rh(u,\mu)=r[\phi u^3+\varepsilon u^2+2\delta u\mu+\varepsilon\mu^2]$$

其中  $\phi=\text{sgn}(g_{vvv})$ ,  $\delta=\text{sgn}(g_{v\mu})$ ,  $\varepsilon=\text{sgn}(g_{uu})$ , 那么,  $g^*=rg(u,\mu)\in E_{r,\mu}(Z_2)$  是 $Z_2$ 强等价于 $h^*$ 的, 当且仅当在 $(u,\mu)=(0,0)$ 处, 有

$$g=g_u=g_\mu=\det(d^2g)=0, \quad g_{vvv}\neq 0. \quad (2.4)$$

注: 这里

$$\det(d^2g)=\begin{vmatrix} g_{uu} & g_{u\mu} \\ g_{\mu u} & g_{\mu\mu} \end{vmatrix}=g_{uu}g_{\mu\mu}-g_{u\mu}^2$$

$v=(v_1, v_2)$  是对应于 $\det(d^2g)=0$ 的零特征值的特征向量, 要求 $v_1>0$ .  $\partial/\partial v$  是沿着该向量的方向导数:

$$\frac{\partial}{\partial v}=v_1\frac{\partial}{\partial u}+v_2\frac{\partial}{\partial \mu}$$

用 $g$ 对 $u, \mu$ 的导数来表示, 有

$$g_{vvv}=v_1^3g_{uuu}+3v_1^2v_2g_{u\mu\mu}+3v_1v_2^2g_{\mu\mu\mu}+v_2^3g_{\mu\mu\mu}$$

证明要用到较多的篇幅, 此处从略。

**推论2.1** 设芽 $g^*=rg(u,\mu)$ , 其中 $g$ 由式(2.3)确定。则 $g^*$ 是 $Z_2$ 强等价于 $h^*$ 的。这里

$$h^*=rh(u,\mu)=r[\phi u^3+\varepsilon u^2+2\delta u\mu+\varepsilon\mu^2] \quad (2.5)$$

**证明** 显然, 在 $(u,\mu)=(0,0)$ 处, 有

$$\begin{aligned} g &= 0, \quad g_u = 0, \quad g_\mu = 0, \\ g_{uu} &= 2a_1^2, \quad g_{u\mu} = g_{\mu u} = 2a_1, \quad g_{\mu\mu} = 2 \\ \therefore \det(d^2g) &= 0 \end{aligned}$$

又, 取特征向量 $(v_1, v_2)=(1, -a_1)$ , 则

$$\begin{aligned} g_{vvv} &= 6b, \quad g_{u\mu\mu} = 2c, \quad g_{\mu\mu\mu} = 2a, \quad g_{\mu\mu\mu} = 0, \\ \therefore g_{vvv} &= 6(b - aa_1 + a_1^2c) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} b - aa_1 + a_1^2c &= 2[b_1(0)b_2(0) - a_1(0)b_{2\mu}(0)]\delta^2 \\ &\quad - 2[c_1(0)c_2(0) - a_1(0)c_{2\mu}(0)]\varepsilon^2 - 2d_1(0)d_2(0)\delta^2\varepsilon^2 \end{aligned}$$

一般不为零, 因此 $g_{vvv}\neq 0$ 。所以定理2.2的条件都满足, 从而推论2.1为真。

由于(1.3)与(1.5)中的 $h$ 是 $Z_2$ 强等价的, 因此它们的分叉图就是拓扑等价的。即

$$g'=(\mu+\kappa u)^2+\phi u^3 \quad (2.6)$$

的分叉性质与(2.3)完全相同。因此, 下面仅讨论(2.6)的性质。

## 三、全开折与临界簇

先证明一个定理, 这个定理告诉我们 (2.6) 的余维数 (也就是 (2.3) 的余维数) 为3.

**定理3.1** 芽  $g' = (\mu + \kappa u)^2 + \phi u^3$  的开折项为  $\{1, u, \mu u\}$ , 因而其余维数为3.

**证明** 按照[2]中的叙述来证明. 为书写方便, 取  $\kappa = +1$ .

$$\begin{aligned} RT(g') &= \langle g', u g'_u \rangle \{r\} \\ &= M^4 \oplus R\{u^2 + 4u\mu + 3\mu^2, 3\phi u^3 + 2u^2 + 2u\mu, \\ &\quad u^2\mu + u\mu^2, u\mu^2 + \mu^3, u^3 + u^2\mu\} \\ T(g') &= RT(g') + E_\mu\{g'_u\} \\ &= M^4 \oplus R\{u^2 + 4u\mu + 3\mu^2, 3\phi u^3 + 2u^2 + 2u\mu, u^2\mu + u\mu^2, \\ &\quad u\mu^2 + \mu^3, u^3 + u^2\mu, \mu + u, \mu^2 + u\mu\} \\ \therefore \text{Itr}[T(g')] &= M^4 \end{aligned}$$

所谓开折项就是找到一组基  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , 使得

$$\{\text{Itr}[T(g')]\}^{-1} = V_{g'} \oplus R\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \quad (3.1)$$

$k$  即为余维数. 现在

$$\begin{aligned} V_{g'} &= R\{u^2 + 4u\mu + 3\mu^2, 3\phi u^3 + 2u^2 + 2u\mu, u^2\mu + \mu^2 u, \\ &\quad u\mu^2 + \mu^3, u^3 + u^2\mu, \mu + u, \mu^2 + u\mu\} \end{aligned}$$

容易看出, 取  $p_1 = 1, p_2 = u, p_3 = u\mu$  可以满足 (3.1):

$$\begin{aligned} u^3 &= [(3\phi u^3 + 2u^2 + 2u\mu) - 2(u^2 + 4u\mu + 3\mu^2) + b(\mu^2 + u\mu)]/3\phi \\ u\mu^2 &= u^2\mu + u\mu^2 - u^2\mu - u^3 + (u^3) \\ \mu u^2 &= u^2\mu + u^3 - (u^3), \mu^3 = \mu^3 + u\mu^2 - (u\mu^2) \\ u^2 &= u^2 + 4u\mu + 3\mu^2 - 3(\mu^2 + u\mu) - p_3 \\ u\mu &= p_3, \mu^2 = \mu^2 + \mu u - p_3 \\ u &= p_2, \mu = \mu + u - p_2 \\ 1 &= p_1 \end{aligned}$$

所以余维数为3, 且开折项为  $\{1, u, \mu u\}$ .

因此 (2.6) 的全开折为

$$R = \phi u^3 + (\mu + \kappa u)^2 + \alpha + \beta u + \gamma \mu = 0 \quad (3.2)$$

下面计算 (3.2) 的临界簇  $\Sigma(z_2)$ .  $\Sigma(z_2)$  在几何上是一超曲面, 它将开折参数空间分成若干区域. 在每一区域内, 任意两个分叉图都是拓扑等价的; 何意两个不同区域内的分叉图不是等价的; 在  $\Sigma(z_2)$  上的分叉图是结构不稳定的. 按照[2],

$$\Sigma(z_2) = B_1(z_2) \cup B_0(z_2) \cup H_1(z_2) \cup H_0(z_2) \cup D(z_2) \quad (3.3)$$

本文的集合为

$$\begin{aligned} B_0(z_2): & \alpha = 0 \\ B_1(z_2): & \begin{cases} \alpha = -\gamma u^2 + 2\phi u^3 \\ \beta = 2\gamma u - 3\phi u^2 \end{cases} \quad (u > 0, \text{ 为参数}) \\ H_0(z_2): & \alpha = -\frac{\beta^2}{16(1+\gamma)^2} \\ H_1(z_2) &= D(z_2) = \phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里  $\phi$  表示空集.

### 四、分叉图及其性质

在三维空间  $(\alpha, \beta, \gamma)$  内, 可以表示出曲面(2.4)。我们以  $\gamma$  为辅助参数, 在  $(\alpha, \beta)$  平面上表示这些曲面。图1(a)为  $\phi=1$  时的临界簇, (b)为  $\phi=-1$  时的临界簇。图2为相应的分叉图,  $\kappa=-1$ 。

分叉图的力学性质分析:

1) 与文[1]比较, 本文的推广结论是, (1.1)的亚谐共振分叉解可以有十四种类型。

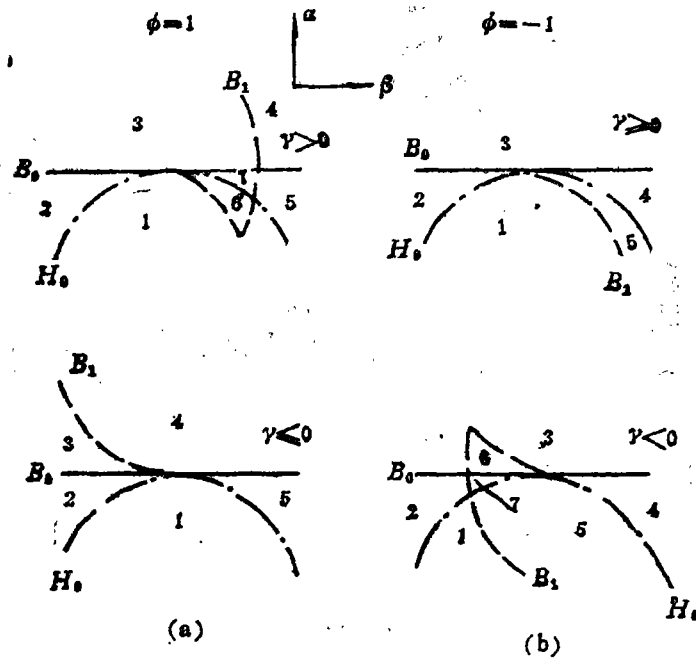


图 1

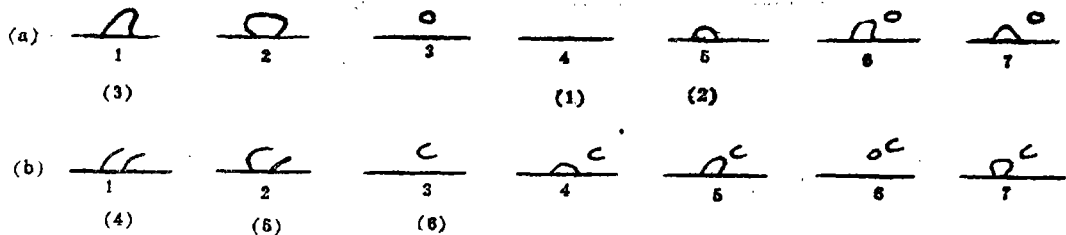


图 2

[1]中的结论是本文的结论的一部分。图2中括弧中的数字是[1]中分叉图的类型。

2) 系数  $\phi$  的作用是决定振幅  $r$  是否为有限。当  $\phi=+1$  时,  $r$  为有限;  $\phi=-1$  时,  $r$  为无限。而

$$\begin{aligned} \phi &= \text{sgn}(g_{000}) \\ &= \text{sgn}\{[b_1(0)b_2(0) - a_1(0)b_{2\mu}(0)]\delta^2 \\ &\quad - [c_1(0)c_2(0) - a_1(0)c_{2\mu}(0)]e^2 - d_1(0)d_2(0)\delta^2 e^2\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

当 $\delta, \varepsilon$ 为小参数时,  $\phi$ 主要(3.1)式中的前两项决定. 系数 $a_1(0), b_1(0), c_1(0)$ 已在[1]中给出; 其余系数用同样办法求得, 但由于表达式较繁, 因而不在此给出. 但 $b_1(0), b_2(0), b_{2\mu}(0)$ 主要与非线性阻尼 $h$ 有关;  $c_1(0), c_2(0), c_{2\mu}(0)$ 主要与非线性函数 $g$ 有关. 为了分析 $\phi$ 与 $\delta, \varepsilon$ 之间的关系, 我们设

$$\left. \begin{aligned} b_1(0)b_2(0) - a_1(0)b_{2\mu}(0) > 0 \\ c_1(0)c_2(0) - a_1(0)c_{2\mu}(0) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

于是, 当

$$\delta^2 > \frac{c_1(0)c_2(0) - a_1(0)c_{2\mu}(0)}{b_1(0)b_2(0) - a_1(0)b_{2\mu}(0)} \varepsilon^2$$

时,  $\phi = +1$ . 此时的力学意义即为系统具有较大的阻尼, 因而限制了振幅的增长; 而当

$$\delta^2 < \frac{c_1(0)c_2(0) - a_1(0)c_{2\mu}(0)}{b_1(0)b_2(0) - a_1(0)b_{2\mu}(0)} \varepsilon^2$$

时,  $\phi = -1$ , 其意义为阻尼系数较小, 参数激振力幅较大, 因而响应振幅无限增长. 当然, 实际系统的非线性因素随着响应振幅的加大而有很大的变化, 而这种变化总是制约着响应幅值的增大的.

另外, 当系统的非线性阻尼为正时, 不等式(4.2)的第一式是成立的, 第二式则可能出现不同的情况, 这里作出这样的假设仅仅是为了讨论问题的方便.

3) 从分叉方程的代数性质看, 似乎存在着三个极限环(即可能有三个解). 但事实上最多只有二个极限环. 考虑函数

$$y = \phi x^3 + (\mu + \kappa x)^2 + \alpha + \beta x + \gamma \mu x \quad (4.3)$$

$y=0$ 的根 $x(>0)$ 的个数即为极限环个数. 可以证明, (4.1)有三个正实根的唯一条件为下列各式同时满足:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \phi &= -1 \\ (2) \quad \alpha + \mu^2 &> 0 \\ (3) \quad -\frac{1}{3} < \beta + (2 + \gamma)\mu < 0 \\ (4) \quad \alpha + \mu^2 < 2x_1^3 + x_1^2 \\ (5) \quad \alpha + \mu^2 > 2x_2^3 + x_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中 
$$x_1 = \frac{1}{3} \{1 - \sqrt{1 + 3[\beta + (2 + \gamma)\mu]}\}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \{1 + \sqrt{1 + 3[\beta + (2 + \gamma)\mu]}\}$$

显然(4), (5)不能同时成立. 所以(4.3)不可能有三个正实根.

4) 从应用的角度看, 所谓芽的选择也可以理解为多项式(1.2)的截断问题. 本文的截断项要比[1]的截断项要多. [1]中取的是一次近似, 本文是一种高次近似(部分的二次近似). 显然, 高次近似解与一次近似解不但有量的差别, 而且主要地有本质上的差别. 在非线形振动理论中, 一般认为一次近似基本上反映了解的定性性质, 高次近似只是对一次近似进行量上的修正, 即一次近似解与高次近似解没有定性的、本质上的差别. 现在我们却找出了这种本质上的差别. 为什么会出这种差别是个值得继续研究的问题.

5) 与 $a_1=0$ 型退化分叉解比较<sup>[3]</sup>, 有许多结果是相同的. 综合考虑本文、文[1]、文

[4]、文[3]，可以发现一个共同点，即非线性参数振动系统的亚谱分叉解有两种基本形式，如图3所示。其它所有的分叉解均是由这两种演变而来的。而这两种分叉形式也是应用中经常遇到的形式。

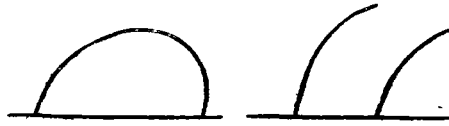


图 3

参 考 文 献

- [1] 陈予恕, W. F. Langford, 非线性马休方程的亚谱分叉解及欧拉动弯曲问题, 力学学报, 20, 6 (1988).
- [2] Golubitsky, M. and D. G. Schaeffer, *Singularitons and Groups in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1 (1985).
- [3] 陈予恕、詹凯君, 一类非线性参数振动系统的亚谱退化分叉理论 (待发表).
- [4] 陈予恕、吴建国、金志胜, 曲轴非线性参数扭振问题的分叉理论解, 振动工程学报, 1 (1987).

Some Extended Results of "Subharmonic Resonance Bifurcation Theory of Nonlinear Mathieu Equation"

Chen Yu-shu Zhan Kai-jun

(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

The authors of [1] discussed the subharmonic resonance bifurcation theory of nonlinear Mathieu equation and obtained six bifurcation diagrams in  $(\alpha, \beta)$ -plane. In this paper, we extended the results of [1] and pointed out that there may exist as many as fourteen bifurcation diagrams which are not topologically equivalent to each other.