应用数学和力学，第11卷第4期（1990年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

壳体的唯象理论及其有限元分析方法*

李　龙　元

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1988年6月2日收到）

摘　要

本文从具有不同抗拉与抗压性能的各种材料的宏观特性出发，建立了以描述不同弹性模量材料性质的壳体唯象理论，并由此给出了一种有效的分析方法以求解由抗拉与拉压性能不同的材料所制造的壳体结构强度和变形问题．

材料的不同弹性模量性质，最早应归于Тимошенко(1931)[1]的研究，但他的结果当时并没引起人们的多大注意．真正具有影响的工作是Амбарцумян[2](1965)的研究，在他的影响下，苏联学者对很多材料，如：高分子聚合物、纤维及颗粒增强复合材料、石墨结构、钢筋混凝土、金属材料等作了一系列的试验研究[3]．其结果表明，几乎所有材料在不同程度上都表现有不同的抗拉及抗压弹性模量．从而，Амбарцумян提出并建立了与经典弹性理论相对应的所谓“不同模量的弹性理论”（或称“弹性力学的唯象理论”）．

值得提出的是，有关不同模量弹性理论的应用，到目前为止只仅仅是限于一些非常简单的问题．对于比较复杂的壳体结构，只限于无矩及弱矩的应用研究，而一般壳体的不同模量弹性理论至今还仍未建立．本文是努力在这一方面作一定的尝试．

一、不同模量的量级分析及应力应变方程

为方便起见，在文中记E^+，E^-分别为拉伸及压缩时的弹性模量；ν^+，ν^-分别为拉伸及压缩时的泊松比．由能量性质，易证：

$$E^+\nu^-=E^-\nu^+ \tag{1.1}$$

在量级分析中，引入如下无量纲参数

$$\beta=(E^+-E^-)/(E^++E^-) \tag{1.2}$$

平均弹性模量和平均泊松比

$$E=(E^++E^-)/2,\ \nu=(\nu^++\nu^-)/2 \tag{1.3}$$

则，拉伸、压缩时的弹性模量和泊松比可表示为

---

* 何福保推荐．

本文由上海市科学技术研究基金资助．

$$E^{+}=E+\beta E,\ E^{-}=E-\beta E,\ \nu^{+}=\nu+\beta\nu,\ \nu^{-}=\nu-\beta\nu \tag{1.4}$$

这样，对于用主应力、主应变表示的二维本构关系为：

$$e_1=\frac{\sigma_1}{(1+\beta)E}-\frac{\nu}{E}\sigma_2,\quad e_2=-\frac{\nu}{E}\sigma_1+\frac{\sigma_2}{(1-\beta)E} \tag{1.5}$$

式中，e_1，e_2 为主方向的两个主应变；σ_1，σ_2 为主方向的两个主应力，并已假定σ_1是拉伸主应力，σ_2是压缩主应力。

方程(1.5)写成如下的逆形式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{E}{1/(1-\beta^2)-\nu^2}\left(\frac{1}{1-\beta}e_1+\nu e_2\right)\\ \sigma_2&=\frac{E}{1/(1-\beta^2)-\nu^2}\left(\nu e_1+\frac{1}{1+\beta}e_2\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

对于大多数的不同弹性模量材料，无量纲参数β的值要远比 1 小[3]（部分材料的数值见表1）。

表 1　　不同模量数值表

材料		E^{+} (kgf/mm²)	E^{-} (kgf/mm²)	2β
有机玻璃	0#	137.0	274.0	−0.666
	5.0#	137.0	238.0	−0.538
	10.0#	118.0	214.0	−0.578
环氧树脂	300#	422.0	480.0	−0.129
	400#	461.0	480.0	−0.040
	4617#	548.0	623.0	−0.128
聚丙烯塑料	1#	240.0	143.0	0.506
	9#	160.0	140.0	0.133
	38#	310.0	250.0	0.214
卡玻隆		71.2	88.6	−0.218
氟塑料4#		25.8	30.4	−0.164
玻璃-S		2200.0	3320.0	−0.376
玻璃-E		2210.0	2950.0	−0.287
玻璃-D		1880.0	1990.0	−0.057
正规钢40#		20999.0	21611.0	−0.029
生铁		9327.0	12436.0	−0.286
青铜		2701.0	3007.0	−0.107
硅铝合金		6830.0	7492.0	−0.092
混凝土1#		700.0	1750.0	−0.857
混凝土2#		1100.0	1300.0	−0.167

因此，方程(1.6)中有关β的项可以展开为

$$\frac{1}{1-\beta}=1+\beta+\beta^2+\cdots,\quad \frac{1}{1/(1-\beta^2)-\nu^2}=\frac{1}{1-\nu^2}\left(1-\frac{\beta^2}{1-\nu^2}+\cdots\right) \tag{1.7}$$

根据方程(1.7)，式(1.6)简化为关于β的渐近式

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\nu^2}(e_1+\nu e_2)+\beta\frac{E}{1-\nu^2}e_1-\beta^2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu^2}{1-\nu^2}e_1+\frac{\nu}{1-\nu^2}e_2\right)+\cdots$$

$$\sigma_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu e_1+e_2)-\beta\frac{E}{1-\nu^2}e_2-\beta^2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{1-\nu^2}e_1+\frac{\nu^2}{1-\nu^2}e_2\right)+\cdots$$

采用矩阵的表示方法，则上式为

$$[\sigma]_1=\{[D_0]+\beta[D_1]+\beta^2[D_2]+\cdots\}[e]_1 \tag{1.8}$$

式中， $[\sigma]_1=\{\sigma_1\ \sigma_2\ \tau_{12}\}^T$， $[e]_1=\{e_1\ e_2\ \gamma_{12}\}^T$

$$\left.\begin{aligned}&[D_0]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&(1-\nu)/2\end{bmatrix},\quad [D_1]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\\ &[D_2]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}-\nu^2/(1-\nu^2)&-\nu/(1-\nu^2)&0\\ -\nu/(1-\nu^2)&-\nu^2/(1-\nu^2)&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1.9a}$$

对于两个主应力都是拉伸应力的情况，其主应力与主应变的关系方程为

$$e_1=\frac{\sigma_1}{(1+\beta)E}-\frac{\nu}{E}\sigma_2,\quad e_2=-\frac{\nu}{E}\sigma_1+\frac{\sigma_2}{(1+\beta)E}$$

与方程(1.9a)的推导相同，可得

$$\left.\begin{aligned}&[D_0]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&(1-\nu)/2\end{bmatrix}\\ &[D_1]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}(1+\nu^2)/(1-\nu^2)&2\nu/(1-\nu^2)&0\\ 2\nu/(1-\nu^2)&(1+\nu^2)/(1-\nu^2)&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\\ &[D_2]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}\dfrac{\nu^2(3+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2}&\dfrac{(1+3\nu^2)\nu}{(1-\nu^2)^2}&0\\ \dfrac{(1+3\nu^2)\nu}{(1-\nu^2)^2}&\dfrac{\nu^2(3+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2}&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1.9b}$$

对于两个主应力都是压缩应力的情况，其主应力与主应变的关系方程为

$$e_1=\frac{\sigma_1}{(1-\beta)E}-\frac{\nu}{E}\sigma_2,\quad e_2=-\frac{\nu}{E}\sigma_1+\frac{\sigma_2}{(1-\beta)E}$$

显然，在双向压缩时的$[D_0]_C$及$[D_2]_C$与双向拉伸时的$[D_0]_T$，$[D_2]_T$相同，而$[D_1]_C$和$[D_1]_T$差一符号，即

$$[D_0]_C=[D_0]_T,\ [D_2]_C=[D_2]_T,\ [D_1]_C=-[D_1]_T \tag{1.9c}$$

将主应力～主应变关系转换到任意坐标轴下的应力～应变关系，则有

$$[\sigma]_x=[T_{x1\sigma}][\sigma]_1,\ [e]_1=[T_{1xe}][e]_x \tag{1.10}$$

其中，

$$[\sigma]_x=\{\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}\}^T,\ [e]_x=\{e_x\ e_y\ \gamma_{xy}\}^T,\ [T_{x1\sigma}]=[T_{1xe}]^T$$

$$[T_{1xe}]=\begin{bmatrix}\cos^2\psi & \sin^2\psi & 0.5\sin2\psi\\ \sin^2\psi & \cos^2\psi & -0.5\sin2\psi\\ -\sin2\psi & \sin2\psi & \cos2\psi\end{bmatrix},\quad \psi=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

将(1.10)式代入方程(1.8)，得在任意坐标轴下的应力、应变关系矩阵为

$$[\sigma]_x=\{[D_0]_x+\beta[D_1]_x+\beta^2[D_2]_x+\cdots\}[e]_x \tag{1.11}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}&[D_0]_x=[T_{x1\sigma}][D_0][T_{1xe}]\\&[D_1]_x=[T_{x1\sigma}][D_1][T_{1xe}]\\&[D_2]_x=[T_{x1\sigma}][D_2][T_{1xe}]\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

二、不同模量材料结构的有限元分析

对于用小参数表示的、具有渐近形式的应力应变关系矩阵(1.11)，相应的应力矢量和应变矢量亦可表示成如下的渐近表达式

$$\left.\begin{aligned}&[\sigma]_x=[\sigma_0]_x+\beta[\sigma_1]_x+\beta^2[\sigma_2]_x+\cdots\\&[e]_x=[e_0]_x+\beta[e_1]_x+\beta^2[e_2]_x+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这样，方程(1.11)表示为

$$[\sigma_m]_x=\sum_{j=0}^{m}[D_j]_x[e_{m-j}]_x\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{2.2}$$

同理，与方程(2.1)中的应变矢量相对应的位移矢量亦可表示为

$$[u]=[u_0]+\beta[u_1]+\beta^2[u_2]+\cdots \tag{2.3}$$

而位移矢量与应变矢量的关系为

$$[e_j]=[B][u_j]\qquad j=0,1,2,\cdots \tag{2.4}$$

将式(2.1)、(2.3)代入如下势能表达式

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_V[\sigma]_x^T[e]_x dV-\int_A[P]^T[u]dA \tag{2.5}$$

并注意到方程(2.2)、(2.4)，得

$$\Pi=\sum_{k=0}\beta^k\Pi_k \tag{2.6}$$

式中，

$$\Pi_m=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_x[B][u_{m-j}]dV-\int_A[P]^T[u_m]dA \tag{2.7}$$

在附录中我们将给出以下两个定理的证明：

定理1 （能量渐近原理）

对于具有各种可能的渐近位移表达式(2.3)，其真实的渐近展开式是使它所对应的势能渐近展开式(2.6)中的各阶渐近展开项均取极值，即

$$\delta\Pi_k=0 \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2.8}$$

定理2 （展开项定理）

从势能渐近展开式的第$2m$阶展开项Π_{2m}的变分式$\delta\Pi_{2m}=0$中只能且仅能推求出对应位移矢量展开式中到第m阶近似的渐近表达式。而且，变分式$\delta\Pi_{2m}=0$与变分式$\delta\Pi_{2m+1}=0$是恒等的。

这样，根据定理1，(2.7)式可以写成如下的形式：

$$\begin{aligned}\Pi_{2m}=&\int_V\sum_{j=1}^{m}[u_m]^T[B]^T[D_j]_s[B][u_{m-j}]dV\\&+\frac{1}{2}\int_V[u_m]^T[B]^T[D_0]_s[B][u_m]dV\\&-\int_A[P]^T[n_{2m}]dA-f([u_i]|i\neq m)\end{aligned}\tag{2.9}$$

变分得：

$$\begin{aligned}\int_V[B]^T[D_0]_s[B]dV\cdot[u_m]=&\int_A[P]\delta(m)dA\\&-\int_V\sum_{j=1}^{m}[B]^T[D_j]_s[B][u_{m-j}]dV \qquad m=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{2.10}$$

记

$$\left.\begin{aligned}[K_0]&=\int_V[B]^T[D_0]_s[B]dV\\ [R_m]&=\int_A[P]\delta(m)dA\\ [K_j]&=\int_V[B]^T[D_j]_s[B]dV\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

则，方程(2.10)为

$$[K_0][u_m]=[R_m]-\sum_{j=1}^{m}[K_j][u_{m-j}] \qquad m=0,1,2,\cdots \tag{2.12}$$

显然，方程(2.12)在$m=0$时它表示一般的弹性理论中的有限元平衡方程，而当m大于零时，由于材料的不同弹性模量引起了一个附加刚度矩阵$[K_j]$，而且这个附加刚度矩阵与$m=0$时的应力状态有关。当两个主应力同号且是拉伸应力时，$[D_0]$，$[D_1]$，$[D_2]$采用表达式(1.9b)，当两个主应力同号且是压缩应力时，$[D_0]$，$[D_1]$，$[D_2]$采用表达式(1.9c)，而当两个主应力异号时，$[D_0]$，$[D_1]$，$[D_2]$采用表达式(1.9a)。

这里值得指出的是，由于表达式(1.9a,b,c)中$[D_0]$是相同的。因而，求解方程(2.12)并不需要迭代，它只要求得零阶近似的主应力，然后再根据主应力的符号来选择相应的$[D_1]$，$[D_2]$的表达式，最后形成附加刚度矩阵并求出高阶近似。

三、结 束 语

本文对具有不同的抗拉、抗压弹性模量材料的壳体结构，提出了一种比较有效的、一般的有限元分析方法，当然本文的方法除了壳体结构外，对梁、杆、平面问题等也将是适用的。由于在本文的方法中，不同弹性模量的性质只仅仅是反映在高阶的近似项中，因而在计算中无需重复迭代求解，而只需根据零阶近似解的主应力符号来选择高阶近似项中的弹性模量，且由于主应力的符号判别是在单元内的积分点上，因而在选择$[D_i](i=1,2,\cdots)$时也是十分方便的。

由于本文的篇幅所限及目前有关这方面的分析、实验数据较少，故对具体问题的数值计算我们将在另文作详细讨论。

附录 定理 1 及定理 2 的证明

在证明两个定理之前，我们先证明如下性质："在Π_{2m}的表达式中，u_m是最高阶的二次项"。

$$\because \quad \Pi_{2m}=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{2m}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m-j}]dV-\int_A[P]^T[u_{2m}]dA \tag{A.1}$$

设$[u_k]$为Π_{2m}中最高阶的二次项，则

$$k=j-i=2m-j\Rightarrow\max,\quad 2k=j-i+2m-j\Rightarrow\max \tag{A.2}$$

从(A.2)式，明显地有

$$i=0,\quad k=j=m \tag{A.3}$$

所以，(A.1)式可以写成

$$\begin{aligned}\Pi_{2m}=&\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m-j}]dV\\&+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m-j}]dV\\&+\frac{1}{2}\int_V\sum_{i=0}^{m}[u_{m-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_m]dV-\int_A[P]^T[u_{2m}]dA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because\quad &\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=m+1}^{2m}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m-j}]dV\\&=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j+m+1}[u_{j+m+1-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-1-j}]dV\\&=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}[u_{j+m+1-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-1-j}]dV\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=j+1}^{j+1+m}[u_{j+1+m-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-1-j}]dV$$

$$=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}[u_{j+m+1-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-1-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m}[u_{m-i}]^T[B]^T[D_{j+1+i}][B][u_{m-1-j}]dV$$

$$=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{j-1}[u_{j+m-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}[u_{m-i}]^T[B]^T[D_{j+i}]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=1}^{m}[u_m]^T[B]^T[D_j]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$\therefore\quad \Pi_{2m}=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{j-1}[u_{j+m-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}[u_{m-i}]^T[B]^T[D_{j+i}]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$+\int_V\sum_{j=1}^{m}[u_m]^T[B]^T[D_j]_z[B][u_{m-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V[u_m]^T[B]^T[D_0]_z[B][u_m]dV$$

$$-\int_A[P]^T[u_{2m}]dA \tag{A.4}$$

显然，Π_{2m}中与$[u_m]$相关的仅只有划线项（包括$m=0$时的情况），所以，从$\delta\Pi_{2m}=0$只能推出位移矢量展开式中的第m阶近似表达式.

现在，我们来看

$$\Pi_{2m+1}=\frac{1}{2}\int_V\sum_{j=0}^{2m+1}\sum_{i=0}^{j}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m+1-j}]dV$$

$$-\int_A[P][u_{2m+1}]dA \tag{A.5}$$

因为，从Π_{2m+1}的表达式可以看到，它的最高阶二次项也是$[u_m]$，因而从它的变分中不可能求出比$[u_m]$更高阶的近似项. 而且

$$\Pi_{2m+1}=\frac{1}{2}\int_V\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{i}[u_{j-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_{2m+1-j}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\sum_{i=0}^{2m+1}[u_{2m+1-i}]^T[B]^T[D_i]_z[B][u_0]dV$$

$$-\int_A[P]^T[u_{2m+1}]dA$$

$$\delta\Pi_{2m+1}=\frac{1}{2}\int_V[u_0]^T[B]^T[D_0]_z[B]\delta[u_{2m+1}]dV$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\delta[u_{2m+1}]^T[B]^T[D_0]_z[B][u_0]dV$$

$$-\int_A[P]^T\delta[u_{2m+1}]dA$$

$$=\left\{\int_V[B]^T[D_0][B][u_0]dV-\int_A[P]dA\right\}\delta[u_{2m+1}]\equiv 0$$

所以，$\delta\Pi_{2m+1}=0$是恒满足的，从而定理 2 证毕.

定理 1 的证明只需按常规方法形成刚度矩阵，此时，由于弹性矩阵 (1.11) 是渐近的，因而刚度矩阵也是渐近的，最后根据平衡方程再作位移的渐近展开，很容易证明，其渐近平衡方程与本文的 (2.12) 式是一致的[4].

参 考 文 献

[1] Тимошенко С. П.; *Курс Сопротивления Материалов*, М., Гостехиздат (1931).

[2] Амбарцумян С. А., Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению исжатию, *Изв. АН СССР Механика*, 4 (1965).

[3] Амбарцумян С. А., *Разномолуьная Теория Упругости*, (中译本：《不同模量的弹性理论》，邬瑞锋、张允真译) (1982).

[4] 李龙元，加肋旋转壳的一般理论、及其非线性稳定、动力响应的有限元数值解和摄动有限元解，上海工业大学博士论文 (1987, 7).

The Rationalism Theory and Its Finite Element Analysis Method of Shell Structures

Li Long-yuan

(Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Appl. Math. Mech., Shanghai)

Abstract

In this paper, a kind of rationalism theory of shell is established which is of different mechanic characters in tension and in compression, and the finite element numerical analysis method is also described.