应用数学和力学，第11卷第4期（1990年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

最近邻估计在任意紧集上一致强收敛速度*

张涤新

（贵州计划学院，1989年1月3日收到）

摘　要

在这篇文章中，我们提出了最近邻估计在任意紧集上一致强收敛速度的概念，得到了一些较好的收敛速度．因此，最近邻估计的逐点强收敛速度问题是本文的特例，扩大了最近邻估计的应用范围．

一、引　言

设$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d.是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的r.v.，X_1有分布函数$F(x)$和密度函数$f(x)$，$x\in R$。取自然数$1\leqslant k_n\leqslant n$，记$a_n(x)$是$x$到$X_1,\cdots,X_n$第$k_n$个最近点的距离，$f(x)$的最近邻估计定义为：

$$V_n(x)=k_n/2na_n(x)\qquad n\geqslant 1 \tag{1.1}$$

$$f_n(x)=(na_n(x))^{-1}\sum_{i=1}^{n}K((X_i-x)/a_n(x))\qquad n\geqslant 1 \tag{1.2}$$

对估计(1.1)的逐点强收敛速度，文献[1]，[2]，[3]得到了一些好的结论，对估计(1.2)的逐点强收敛速度，[4](1986)作了讨论，得到与[2]和[3]相同的收敛速度，然而，逐点性质具有局限性，一个估计在某点具有一个很好的性质，但在该点附近可能不再具有这种性质。现提出一个问题，对$\forall[a,b]\subset R$，$a<b$，$V_n(x)$，$f_n(x)$作为$f(x)$的估计，

$$\left|\int_a^b V_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| \text{和} \left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|$$

的误差范围是什么？显然，逐点强收敛速度的结果是无法解决这类问题的，因此不论从理论还是从应用的角度，我们有必要研究最近邻估计在任意紧集上的一致强收敛速度。

本文对估计(1.1)，(1.2)进行讨论，得到了它们在任意紧集上一致强收敛速度的一些结果。在与[2]，[3]，[4]相似的条件下，得到与它们相同的收敛速度。同时我们还将去掉[4]中“核具有有界支撑”这一限制，得到(1.2)在任意紧集上一致强收敛速度的一些结果。

* 周焕文推荐．

二、主 要 结 论

$\because$ $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. X_1有密度$f(x)$，$\therefore F(x)$连续 $\Longrightarrow X_i\neq X_j$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$, a.e.. 故

$$V_n(x)=\frac{k_n}{2na_n(x)}=(na_n(x))^{-1}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{X_i-x}{a_n(x)}\right),\quad \text{a.e.} \tag{2.1}$$

其中$K(x)=I_{\{|x|\leq 1\}}(x)/2$，$I_A(x)$是$A$的示性函数。即估计（1.1）可以化为（1.2）的形式加以讨论。所以，今后我们只讨论（1.2）的情况，所得结论对（1.1）均成立。

设：$\mu=PX_1^{-1}$是由$F(x)$导出的概率测度，$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. 所对应的经验分布函数和经验测度分别为$F_n(x)$，$\mu_n(x)$。记$[x]$为不超过x的最大整数，$x\in R$，给出一组条件：

A_1：$K(x)$是R上连续的概率密度，且在R上具有有界变差$V(K)<+\infty$。

A_2：$\exists\rho>0$，$|x|>\rho$，$K(x)=0$，$K(x)$是$[-\rho,\rho]$上的连续函数，且在其上有有界变差$V(K)<+\infty$，$K(x)$为概率密度函数。

定义1 设$\{\xi_n\}$，$\{\eta_n\}$是随机变量序列，如果$\{\xi_n/\eta_n\}$以概率1一致有界，即$\exists M>0$，使得，$P\{\lim\limits_{n\to\infty}\sup|\xi_n/\eta_n|\leq M\}=1$，简记为$\xi_n=O(\eta_n)$，a.e..

定理1 若$f(x)$在R上满足 Lipschitz 条件，$K(x)$满足条件A_1，$\forall x\in R$，$f(x)>0$，$\int_R|u|K(u)du<+\infty$，当$k_n=[n^{3/4}(\log\log n)^{1/4}]$时，对$\forall$紧集$B\subset R$，有：

i) $\sup\limits_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|=O(n^{-1/4}(\log\log n)^{1/4})$，a.e.. ii) $\forall[a,b]\subset R$，$\exists C_0>0$，使得：

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\leq C_0 n^{-1/4}(\log\log n)^{1/4},\quad \text{a.e.}$$

定理2 $\forall x\in R$，$f(x)>0$，$f'(x)$，$f''(x)$在R上存在有界，$K(x)$满足条件A_1，

且
$$\int_R xK(x)dx=0,\quad \int_R x^2K(x)dx<+\infty$$

当 $k_n=[n^{5/6}(\log\log n)^{1/6}]$时，对$\forall$紧集$B\subset R$，有：

$$\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|=O(n^{-1/3}(\log\log n)^{1/3})\quad \text{a.e.}$$

对核$K(x)$具有有界支撑情况，有：

定理3 $\forall x\in R$，$f(x)>0$，$f(x)$在R上满足 Lipschitz 条件，$K(x)$满足A_2，则当$k_n=[n^{2/3}(\log n)^{1/3}]$时，对任意数列$\{c_n\}$，$c_n\to\pm\infty$，$\forall$紧集$B\subset R$，有

$$(n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\sup_B|f_n(x)-f(x)|\to 0,\quad \text{a.e.},\ n\to\infty$$

定理4 设任意$x\in R$，$f(x)>0$，$f'(x)$，$f''(x)$在R上存在有界，$K(x)$满足条件A_2，又

$$\int_{-\rho}^{\rho}uK(u)du=0$$

则当$k_n=[n^{4/5}(\log n)^{1/5}]$时，对任意数串$\{c_n\}$，$c_n\to\infty$，$n\to\infty$，以及对任意紧集$B\subset R$，有：

i) $c_n^{-1}(n/\log n)^{\frac{2}{5}}\sup\limits_B|f_n(x)-f(x)|\to 0$，a.e.，$n\to\infty$。

ii) 对任意紧集$B\subset R$，存在与B对应的紧集B_1，当$k_n=O(n)$时，不论怎样选取k_n，

$\sup_{B_1}|f_n(x)-f(x)|$收敛到 0 的速度达不到$O(n^{-\frac{2}{5}})$。

三、结论的证明

以上定理的证明依赖下面引理：

引理1[5] 假设$F(x)$在R上连续，则：

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{n}{2}\Big/\log\log n\right)^{\frac{1}{2}}\sup_x|F_n(x)-F(x)|=\frac{1}{2}\right\}=1$$

以后所用范数为$\forall x\in R^d$ $d\geqslant 1$，$\|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant d}|x_i|$，记$S_{x,r}=\{y:\|y-x\|\leqslant r\}$，$r>0$，$S_{a_n(x)}\triangleq S_{x,a_n(x)}$。

引理2[6] 设：I_r是R^d中一切直径不超过r的区间组成的集合，$r>0$，$\forall\varepsilon>0$若

$$\sup_x\mu(S_{x,r})\leqslant b\leqslant 1/4,\ n\geqslant\max\{b^{-1},\ 8b/\varepsilon^2\}$$

则：
$$P\{\sup_{A\in I_r}|\mu_n(A)-\mu(A)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 8n\exp\left\{\frac{-bn}{10}\right\}+4(2n)^{2d}\exp\left\{\frac{-n\varepsilon^2}{64b+4\varepsilon}\right\}$$

引理3 若$\forall x\in R$，$f(x)>0$，$f(x)$在R上连续，$1\leqslant k_n\leqslant n$，$k_n/n\to 0$，$n\to\infty$。则：

i) $\sup_x\mu(S_{a_n(x)})\to 0$，a.e.，$n\to\infty$。

ii) $\forall$紧集$B\subset R$，$\sup_B a_n(x)\to 0$，a.e.，$n\to\infty$。

证明 记$I=\{R$中一切区间$\}$，由引理1，

$$\sup_x\mu(S_{a_n(x)})\leqslant\frac{k_n}{n}+\sup_x|\mu_n(S_{a_n(x)})-\mu(S_{a_n(x)})|$$

$$\leqslant k_n/n+\sup_{A\in I}|\mu_n(A)-\mu(A)|=\frac{k_n}{n}+O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}),\ \text{a.e.}$$

$k_n/n\to 0$，故i)得证。

由i) $\exists E\subset\Omega$，$P(E)=1$，$\forall w\in E$

$$\sup_x\mu(S_{a_n(x,w)})\to 0,\qquad n\to\infty \tag{3.1}$$

假设：$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{x\in B}a_n(x,w_0)=\delta>0$，$w_0\in E$，$\Longrightarrow\exists x_{n_k}\in B$，$k=1,2,\cdots$，$x_{n_k}\to x_0\in B$，$k\to\infty$，且$a_{n_k}(x_{n_k},w_0)>\delta/2$，$k=1,2,\cdots$，$\Longrightarrow\sup_B\mu(S_{a_{n_k}(x,w_0)})\geqslant\mu(S_{a_{n_k}(x_{n_k},w_0)})\geqslant\mu(S_{x_{n_k},\delta/2})$，而当$k\to\infty$，$\mu(S_{x_{n_k},\delta/2})\to\mu(S_{x_0,\delta/2})>0$，这与(3.1)相矛盾，故$\sup_B a_n(x)\to 0$，a.e.，$n\to\infty$，对任意紧集$B$成立。

引理4 $\forall x\in R$，$f(x)>0$，$f(x)$在R上连续，$1\leqslant k_n\leqslant n$，$k_n/n\to 0$，则对$\forall$紧集$B\subset R$，$\exists C_{B_1}$，$C_{B_2}>0$，和$\exists E\subset\Omega$，$P(E)=1$，对$\forall w\in E$，$\exists N_w>0$，当$n>N_w$时，有：

$$\frac{k_n}{nC_{B_1}}-O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})\leqslant\inf_{x\in B}a_n(x,w)\leqslant\sup_B a_n(x,w)$$

$$\leqslant \frac{k_n}{nC_{B_2}}+O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})$$

证明 由条件和引理3，$\forall$紧集$B\subset R$，$\sup\limits_B a_n(x)\to 0$，a.e.. 故$\exists E_1\subset \Omega$，$P(E_1)=1$，$\forall w\in E_1$，$\exists N_w>0, n\geqslant N_w, \sup\limits_B a_n(x,w)<1$。$\because B$是紧集，令$B(\varepsilon)=\{y: \exists x\in B, |y-x|\leqslant\varepsilon\}$，易知$B(\varepsilon)$是紧集，$(\varepsilon\geqslant 0)$。$\because f(x)>0$，且在$R$上连续，记：$C_{B_1}=2\sup\limits_{y\in B(1)}f(y), C_{B_2}=2\inf\limits_{y\in B(1)}f(y)$，则：$0<C_{B_2}\leqslant C_{B_1}$。当$n>N_w$时，

$$\sup_{x\in B}\mu(S_{a_n(x,w)})=\sup_B\int_{|y-x|\leqslant a_n(x,w)}f(y)dy$$

$$\geqslant\inf_{B(1)}f(y)\sup_B\int_{|y-x|\leqslant a_n(x,w)}dy=C_{B_2}\sup_B a_n(x,w)$$

同理：$\inf\limits_{x\in B}\mu(S_{a_n(x,w)})\leqslant C_{B_1}\inf\limits_B a_n(x,w)$。由引理 3 证明过程知：

$$\sup_B\mu(S_{a_n(x)})\leqslant k_n/n+O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}),\qquad \text{a.e.}$$

同样可得：

$$\inf_B\mu(S_{a_n(x)})\geqslant k_n/n-O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2}),\qquad \text{a.e.}$$

故$\exists E\subset\Omega$，$P(E)=1$，$\forall w\in E$，$\exists N_w>0$，当$n>N_w$时，

$$k_n/nC_{B_1}-O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})\leqslant\inf_B a_n(x,w)\leqslant\sup_B a_n(x,w)$$

$$\leqslant k_n/nC_{B_2}+O(n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2})\tag{3.2}$$

引理5 在引理 4 的条件下，若$k_n/(n\log\log n)^{1/2}\to\infty$，$n\to\infty$。则对$\forall$紧集 $B\subset R$，有：$\inf\limits_B a_n(x)=O(k_n/n)$，a.e.，$\sup\limits_B a_n(x)=O(k_n/n)$，a.e.

证明 由 (3.2) 式马上可证。

定理 1 的证明 记：

$$g_n(x,w)=\frac{1}{a_n(x,w)}\int_B K\left(\frac{y-x}{a_n(x,w)}\right)f(y)dy\qquad n\geqslant 1$$

$$g_n^h(x)=h^{-1}\int_B K\left(\frac{y-x}{h}\right)f(y)dy\qquad h>0,\ n\geqslant 1$$

$$f_n^h(x,w)=(nh)^{-1}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i(w)-x}{h}\right)\qquad h>0,\ n\geqslant 1$$

$\because$ f在R上满足Lipschitz条件，$\exists\eta>0$，$\forall x$，$y\in R$，$|f(x)-f(y)|\leqslant\eta|x-y|$，令

$$l_1=\eta\int_B|u|K(u)du$$

对$\forall$紧集B。$\because k_n=[n^{3/4}(\log\log n)^{1/4}]$，由引理4，$\exists E\subset\Omega$，$P\{E\}=1$，并有$\exists\beta_1$，$\beta_2>0$，对$\forall w\in E$，当$n$充分大时，有：

$$\beta_1 k_n/n\leqslant\inf_B a_n(x,w)\leqslant\sup_B a_n(x,w)\leqslant\beta_2 k_n/n\tag{3.3}$$

由（3.3）对 $\forall w\in E$，当n充分大时，

$$\sup_B|g_n(x,w)-f(x)|\leqslant\sup_B\sup_{0<h\leqslant\beta_2k_n/n}|g_n^h(x)-f(x)|$$

$$\leqslant\sup_B\sup_{0<h\leqslant\beta_2k_n/n}\int_R K(u)|f(x+hu)-f(x)|du$$

$$\leqslant l_1\beta_2k_n/n=O(k_n/n)$$

即
$$\sup_B|g_n(x)-f(x)|=O(k_n/n),\qquad \text{a.e.}\tag{3.4}$$

$\because$ $K(x)$连续

$\therefore$
$$f_n^h(x)=(\text{R.S.})\int_R K\left(\frac{y-x}{h}\right)h^{-1}dF_n(y)$$

等式右边为R.S.积分。由(3.3)，$\forall w\in E$当n充分大时，

$$\sup_{x\in B}|f_n(x,w)-g_n(x,w)|\leqslant\sup_B\sup_{\beta_1k_n/n\leqslant h}|f_n^h(x,w)-g_n^h(x)|$$

$$=\sup_B\sup_{\beta_1k_n/n\leqslant h}h^{-1}\left|\int_R K\left(\frac{y-x}{h}\right)d(F_n(y,w)-F(y))\right|$$

$$\leqslant\sup_{\beta_1k_n/n\leqslant h}h^{-1}V(K)\sup_x|F_n(x,w)-F(x)|,\quad\text{（分布积分）}\tag{3.5}$$

由引理 1 和（3.5）得：

$$\sup_B|f_n(x)-g_n(x)|=O(n^{1/2}(\log\log n)^{1/2}/k_n),\qquad \text{a.e.}\tag{3.6}$$

由（3.4）和（3.6），$\sup_B|f_n(x)-f(x)|=O(n^{-1/4}(\log\log n)^{1/4})$，a.e.。结论 ii）是 i)的自然结果。

定理 2 的证明 记$M_i=\sup_x|f^{(i)}(x)|$ $i=1$，2。由条件，不妨设 $k_n=n^{5/6}(\log\log n)^{1/6}$，$\because k_n/(n\log\log n)^{1/2}\to+\infty$，由引理 4，对$\forall$紧集$B$，$\exists\beta_1>0$，$\beta_2>0$，并$\exists E\subset\Omega$，$P(E)=1$，对$\forall w\in E$，当$n$充分大时（3.3）式成立。故有：$\forall w\in E$，当$n$充分大时，

$$\sup_{x\in B}|g_n(x,w)-f(x)|\leqslant\sup_B\sup_{0<h\leqslant\beta_2k_n/n}|g_n^h(x)-f(x)|$$

$$=\sup_B\sup_{0<h\leqslant\beta_2k_n/n}\left|\int_R K(u)(f(x+hu)-f(x))du\right|$$

$$=\sup_B\sup_{0<h\leqslant\beta_2k_n/n}\left|\int_R K(u)\left(f'(x)hu+\frac{1}{2}f''(\xi)(hu)^2\right)du\right|$$

$$\leqslant(\beta_2k_n/n)^2M_2\int_R u^2K(u)du\qquad(\xi\text{位于}x\text{与}x+hu\text{之间})$$

即：
$$\sup_B|g_n(x)-f(x)|=O((k/n)^2),\qquad \text{a.e.}\tag{3.7}$$

同定理 1 证法一样，可得（3.6）式成立。$\Longrightarrow$

$$\sup_B|f_n(x)-f(x)|=O\left((k_n/n)^2+\frac{(n\log\log n)^{1/2}}{k_n}\right)$$

$$=O(n^{-1/3}(\log\log n)^{1/3}),\qquad \text{a.e.}$$

定理 3 的证明 由定理 1 证法知，对 $\forall$ 紧集B，

$$\sup_{B}|g_n(x)-f(x)|=O(k_n/n), \quad \text{a.e.} \tag{3.4)'$$

不妨设$k_n=n^{2/3}(\log n)^{1/3}$, $0<\rho\leqslant 1$, 由引理4，对上述B，$\exists E\subset\Omega, P(E)=1$，以及 $\exists \beta_2\geqslant\beta_1>0$，对$\forall w\in E$，$n$充分大时，有

$$\beta_1 k_n/n\leqslant\inf_{B}a_n(x,w)\leqslant\sup_{B}a_n(x,w)\leqslant\beta_2 k_n/n \tag{3.3)'$$

记：$J_n=[\beta_1 k_n/n,\ \beta_2 k_n/n]$，$I_{2h}=\{R$中一切长度不超过$2h$的区间$\}$，$I_n=\{R$中一切长度不超过$2\beta_2 k_n/n$的区间$\}$，不妨设$0<\rho\leqslant 1$，由(3.3)′和分布积分．对上述$B$，$\forall w\in E$，当$n$充分大时，

$$\sup_{B}|f_n(x,w)-g_n(x,w)|\leqslant\sup_{x\in B}\sup_{h\in J_n}|f_n^h(x,w)-g_n^h(x)|$$

$$=\sup_{B,J_n}h^{-1}\left|\int_{S_{x,\rho h}}K\left(\frac{y-x}{h}\right)d(F_n(y,w)-F(y))\right|$$

$$=\sup_{B,J_n}h^{-1}|K(u)(F_n(x+hu,w)-F(x+hu))|_{-\rho}^{\rho}+\int_{-\rho}^{\rho}(F_n(x+hu,w)$$

$$-F(x+hu))dK(u)|$$

$$\leqslant\sup_{B,J_n}h^{-1}\{K(\rho)|\mu_n([x-\rho h,x+\rho h),w)-\mu([x-\rho h,x+\rho h))|$$

$$+\left|\int_{-\rho}^{\rho}[\mu_n([x-\rho h,x+hu),w)-\mu([x-\rho h,\ x+hu))]dK(u)\right|\}$$

$$\leqslant\sup_{B,J_n}(\sup_{x}K(x)+V(K))h^{-1}\sup_{A\in I_{2h}}|\mu_n(A,w)-\mu(A)|$$

$$\leqslant(\sup_{x}(K(x))+V(K))(B_1k_n/n)^{-1}\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A,w)-\mu(A)|$$

$$\leqslant\beta(\log n/n)^{-1/3}\sup_{I_n}|\mu_n(A,w)-\mu(A)|,\quad \beta\triangleq\beta_1^{-1}(\sup_{x}K(x)+V(K)) \tag{3.8}$$

下证：

$$(n/\log n)^{2/3}c_n^{-1}\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A)-\mu(A)|\to 0 \quad \text{a.e.} \tag{3.9}$$

不妨设$c_n>1$，$c_n\to+\infty$．对$\forall\varepsilon>0$，令$\varepsilon_n=\varepsilon c_n(\log n/n)^{2/3}$，$b_n=4\beta_2 k_n M_0/n$，$M_0\triangleq\sup_{x}f(x)$．

$\because f(x)$在R上一致连续且为概率密度，$\therefore M_0<+\infty$，故n充分大时，

$$\sup_{x}[\mu(S_{x,2\beta_2 k_n/n})]\leqslant M_0 4\beta_2 k_n/n=b_n\leqslant 1/4$$

$n\geqslant\max\{b_n^{-1},\ 8b_n/\varepsilon_n^2\}$．由引理2

$$P\{(n/\log n)^{2/3}c_n^{-1}\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A)-\mu(A)|\geqslant\varepsilon\}=P\{\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A)-\mu(A)|\geqslant\varepsilon_n\}$$

$$\leqslant 8n\exp[-nb_n/10]+16n^2\exp\{-n\varepsilon_n^2/(64b_n+4\varepsilon_n)\}$$

$$\because\quad \sum_{n=1}^{\infty}8n\exp\left\{-\frac{nb_n}{10}\right\}=8\sum_{n=1}^{\infty}n\exp\left\{-\frac{2}{5}M_0\beta_2 n^{2/3}(\log n)^{1/3}\right\}<+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}16n^2\exp\left\{\frac{-n\varepsilon_n^2}{64b_n+4\varepsilon_n}\right\}\leqslant 16\sum_{n=1}^{\infty}n^2\exp\left\{\frac{-n\varepsilon_n^2}{64c_nb_n+4\varepsilon_n}\right\}$$

$$=16\sum_{n=1}^{\infty}n^2\exp\left\{\frac{-(c_n\log n)\varepsilon^2}{64\cdot 4M_0\beta_2+4\varepsilon(\log n/n)^{1/3}}\right\}<+\infty$$

由Borel-Cantelli引理，(3.9)得证。

由(3.8)，$(n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\sup\limits_B|f_n(x)-g_n(x)|\to 0$，a.e..

再由(3.4)′

$$(n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\sup_B|f_n(x)-f(x)|$$

$$\leqslant(n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\{\sup_B|f_n(x)-g_n(x)|+\sup_B|g_n(x)-f(x)|\}$$

$$=(n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\sup_B|f_n(x)-g_n(x)|+O(n_n^{-1}),\qquad \text{a.e.}$$

$$\therefore\qquad (n/\log n)^{1/3}c_n^{-1}\sup_B|f_n(x)-f(x)|\to 0,\qquad \text{a.e.}$$

定理 4 的证明

由定理 2 证法，(见 (3.7) 式)，对∀紧集B，不妨设：$k_n=n^{4/5}(\log n)^{1/5}$，$0<\rho\leqslant 1$。

$\Longrightarrow$

$$\sup_B|g_n(x)-f(x)|=O\left(\left(\frac{k_n}{n}\right)^2\right)=O(n^{-2/5}(\log n)^{2/5}),\qquad \text{a.e.}\tag{3.7$'$}$$

由定理 3 证明过程，见 (3.8) 式，$\exists E\subset\Omega$，$P(E)=1$，且存在$\beta>0$，对$\forall w\in E$，当n充分大时，有：

$$\sup_B|f_n(x,w)-g_n(x,w)|\leqslant\beta(k_n/n)^{-1}\sup_{I_n}|\mu_n(A,w)-\mu(A)|$$

$$=\beta(n/\log n)^{1/5}\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A,w)-\mu(A)|\tag{3.8$'$}$$

同定理 3 证明方法一样，见 (3.9) 式，可得：

$$(n/\log n)^{3/5}c_n^{-1}\sup_{A\in I_n}|\mu_n(A)-\mu(A)|\to 0,\qquad \text{a.e.}\tag{3.10}$$

由(3.7)′，(3.8)′得：

$$(n/\log n)^{2/5}c_n^{-1}\sup_B|f_n(x)-f(x)|\to 0,\qquad \text{a.e.},\ n\to\infty$$

现证明结论ii)：

由于$f''(x)$在R上存在且$f(x)>0$在R上恒成立，对任意$x\in R$若$f''(x)\equiv 0$，则$f(x)=Cx+d$，$d>0$。但$f(x)$是概率密度，所以$f(x)\neq d$，得$C\neq 0$，显然$f(x)=Cx+d$不是概率密度，矛盾。于是有$x_0\in R$，$f''(x_0)\neq 0$，对任意紧集$B\subset R$，取$B_1=B\cup\{x_0\}$，则B_1是紧集，由定理1[2]知：当$k_n=O(n)$时，不论怎样选取k_n，当$n\to\infty$时，$n^{2/5}|V_n(x_0)-f(x_0)|\not\to 0$，in probability，所以$\sup\limits_{B_1}|V_n(x)-f(x)|$不能达到$O(n^{-\frac{2}{5}})$的数量级。由(2.1)，

$$V_n(x)=k_n/2na_n(x)=(na_n(x))^{-1}\sum_{i=1}^{n}K((X_i-x)/a_n(x)),\qquad \text{a.e.},\quad \forall x\in R$$

其中$K(x)=I_A(x)/2$，$A=\{y:|y|\leqslant 1\}$。所以$V_n(x)$是$f_n(x)$的特殊形式，这样我们就得到：当$k_n=O(n)$时，$\sup\limits_{B_1}|f_n(x)-f(x)|$收敛到 0 的速度达不到$O(n^{-\frac{2}{5}})$。

注 由定理 4 结论知：就其收敛速度的主部$n^{-\frac{2}{5}}$而言，定理 4 所得速度几乎不能被改进。到此，我们解决了最近邻密度估计在任意紧集上的一致强收敛速度问题。显然逐点强收敛速度问题是本文的特殊情况，故文献[2]，[4]中对应结论是本文的特例。

本文是在武大统计系邹新堤教授指导下完成的，谨表深深感谢。

参 考 文 献

[1] Wagner, T. J., Strong consistency of a nonparametric estimate of a density function, *IEEE, Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 3 (1973), 289—290.

[2] 陈希孺，最近邻密度估计的收敛速度，中国科学，A辑，12 (1981)，1419—1428.

[3] 白志东，最近邻密度估计的中心极限定理，中国科技大学学报，5 (1983)，114—118.

[4] 卢江，最近邻密度估计的逐点强收敛速度，应用概率统计，2，1 (1986)，21—27.

[5] Chung, K. L., An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 36—50.

[6] Devroye, L. P. and T. J. Wagner, The strong uniform consistency of kernel density estimates, *Multivariate Analysis*, 5 (1980), 59—77.

Rates of Strong Uniform Convergence of Nearest Neighbor Density Estimates on Any Compact Set

Zhang Di-xin

(Guizhou Planning College, Guiyang)

Abstract

In this paper, we propose the concept of rates of strong uniform convergence of nearest neighbor density estimates on any compact set and obtain some better convergence rates. Hence the problem of the strong uniform convergence rates predetermined is its special example. The applied region of the estimate is extended.