

# 拓扑方法在叶栅三元流场分析中的应用(I)

## ——表面摩擦力线和截面流线的拓扑法则\*

康 顺

(哈尔滨工业大学, 1989年4月21日收到)

### 摘 要

文中基于 Lighthill 和 Hunt 等的工作, 建立了适用于分析叶栅表面摩擦力线和截面流线的拓扑法则。这些法则是: 1) 对于不带围带的动叶栅, 每个节距范围内的表面摩擦力矢量场中的总结点数等于总鞍点数; 2) 对于叶片端部无间隙的环形叶栅或直列叶栅, 每个节距内表面摩擦力矢量场中的总鞍点数比总结点数多两个; 3) 在叶栅横截面的二次流场中, 总鞍点数比总结点数少一个; 4) 在贯穿流道的子午截面和前后缘截面上的截面流线矢量场中, 总的结点数等于总的鞍点数; 5) 在叶栅跨叶片截面中, 截面流线矢量场的总结点数比总鞍点数少一个。

### 一、引 言

用微分方程相平面理论的奇点特性和拓扑学来定性分析复杂的流动现象, 是近年来理论流体力学研究中常用的手段之一。这种方法对于分析和校核三维分离流谱, 研究分离机理建立数值计算的数学模型、以及气动设计都有一定的实用价值。

用拓扑的方法来定性分析流动图画, 能帮助人们了解和检查流谱的正确性, 因此, 近年来在流体力学领域, 它得到了迅速的发展。Lighthill<sup>[1]</sup>首先注意到, 物体表面上的结点数与鞍点总数之差为2。Hunt<sup>[2]</sup>等进一步发展了 Lighthill 的工作, 并将物面奇点和拓扑分析方法推广应用于三维物体截面的外部流场, 建立了相应的拓扑法则。运用这些拓扑法则可科学地绘制出物面摩擦力线和截面流线的分布和走向, 并进而可推断出空间流场的形态。

然而, 以前的大部分工作只适用于简单物体的绕流或飞行器等的外部流动, 为了把拓扑分析的方法应用于研究叶轮机械等内部流动的流谱分析, 本文基于 Lighthill 和 Hunt 等人的工作, 建立了直列叶栅和环形叶栅表面摩擦力线矢量场、以及流道内各种截面上流线矢量场的奇点数所服从的拓扑规律。

### 二、简单回顾

根据微分方程的相平面理论, 物面摩擦力线图可称为物面摩擦力矢量场的相图。说两个相图拓扑等价(或同胚), 即两个相图具有相同的拓扑结构, 当且仅当把一个相图作弹性运

\* 国家自然科学基金资助项目。

动,即随意地伸张它、扭曲它、拉它或折它、但不允许撕裂,不允许把不同点粘结在一起,使其与另一个相图重合。相图的这种运动叫做拓扑变换。相图经拓扑变换而保持不变的性质其中包括连通性、奇点的数目和类型等,为该相图的拓扑性质。

指数是拓扑学中另一个重要的概念。它表示了当在相图上沿着一闭曲线(约当闭曲线)环绕一周时,闭曲线上的矢量所转的圈数。正常点的指数为零,鞍点的指数为-1,结点(包括焦点和中心结点)的指数为1。在一个闭曲面上奇点指数的和为该曲面的欧拉示性数 $X$ 。欧拉示性数也是拓扑不变量,它可表示为:

$$X=2-2g$$

对于任一闭曲面,其上摩擦力矢量场的鞍点总数与结点总数之差服从如下的拓扑法则<sup>[3]</sup>

$$\sum N - \sum S = X = 2 - 2g \quad (2.1)$$

其中 $\sum N$ 和 $\sum S$ 分别表示结点总数和鞍点总数; $g$ 为复连通曲面的亏格(genus)。在拓扑学中,亏格表示把一复连通曲面转化成球面所进行的“剝补运算”的次数。对于球面 $g=0$ ;环形曲面 $g=1$ ;双环形曲面 $g=2$ ;等等。

由式(2.1)可见,对于球体(包括任何与之拓扑等价的三维体)表面摩擦力矢量场的奇点数满足如下拓扑法则<sup>[1]</sup>

$$\sum N - \sum S = 2 \quad (2.2)$$

继 Lighthill 之后, Hunt 等人用拓扑的方法研究了三维物体截面之外的截面流线矢量场的拓扑法则。他们把位于截面边界上的奇点称之为半奇点(半鞍点或半结点),以区别于流场中的奇点。若定义 $\sum N$ ,  $\sum S$ 分别为截面上的半结点和半鞍点总数,则在三维流动截面上,奇点总数的拓扑法则为<sup>[2]</sup>

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = 1 - n \quad (2.3)$$

其中 $n$ 为截面的连通数。

### 三、叶栅表面摩擦力矢量场奇点数的拓扑法则

#### a、不带围带的动叶栅

假设转子轴是实心的,叶片与转子轴相连接成一整体(图1)。显然这种叶栅拓扑等价于一个球体,即经过连续的弹性变形,这个三维转子叶栅的表面可变为一个球面。若再假设转子轴向上、下游延伸到足够远处(这与叶栅的远上、下游气流均匀的条件一致),即在转子轴的两端截面的中心各存在一个结点(图1),其中上游为附着结点,下游为分离结点。若还假设叶栅中气体流动相对于节距是周期的,即在每个节距内,叶栅表面摩擦力矢量场的奇点数,奇点间的连接方式,以及对应奇点的性质是一样的。于是,若命每个节距内的结点总数为 $\sum N_i$ ,鞍点总数为 $\sum S_i$ ,则由式(2.2),上述叶栅表面摩擦力矢场的奇点数服从如下法则:

$$Z \sum N_i - Z \sum S_i = 0$$

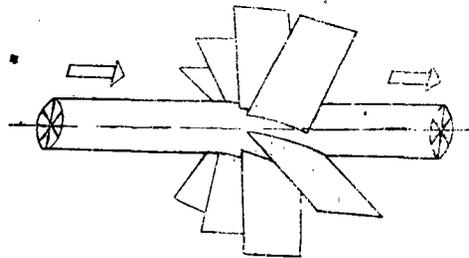


图1 无围带转子叶栅示意图

或

$$\sum N_i - \sum S_i = 0 \quad (3.1)$$

其中  $Z$  为转子的叶片数。式(3.1)表明,对于不带围带的动叶栅,在每一个节距范围内,叶栅表面摩擦力矢量场的结点总数等于鞍点总数。

### b、环形叶栅

假设环形叶栅叶片与内、外环壁间无间隙这样的叶栅表面不再拓扑等价于一个球面。把环形叶栅的内、外环壁向上、下游延伸,其中内环壁可以类似于上面对于转子轴那样的分析(图2),而外环壁向上、下游延伸,并弯曲,使其前后相接形成一个环形曲面。摩擦力线环绕这个曲面。除了在叶栅流道内部表面及叶栅前、后缘的内外环壁外,其余表面无奇点。设叶片数为  $Z$ ,经过对  $Z-1$  个叶片进行“割补运算”,使内、外环壁只由一个叶片相连接。对于这样的一个组合曲面,其拓扑等价于一个环形曲面,而环形曲面的亏格为1,于是我们可求得图2中的环形叶栅的亏格为

$$g=Z$$

这样,由式(2.1),得到环形叶栅表面摩擦力矢量场奇点数的拓扑法则为

$$2 + Z \sum N_i - Z \sum S_i = 2 - 2Z$$

即

$$\sum N_i - \sum S_i = -2 \quad (3.2)$$

由此可见,对于环形叶栅,每个节距内的总结点数比总鞍点数少2个。

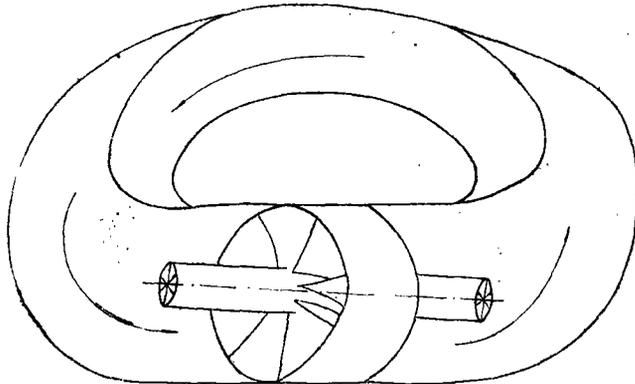


图2 端部无间隙环形叶栅分析图

由于环形叶栅任一节距间的曲面与矩形叶栅任一节距内的曲面是拓扑等价的,因此式(3.2)也描述了矩形叶栅流道内表面摩擦力矢量场奇点的分布规律。此外,由于在推导式(3.2)和式(3.1)时,并未限定叶片的形状,因此对于任何叶片形状(扭曲、弯扭叶片等)的压气机叶栅、透平叶栅等,式(3.1)和式(3.2)均成立。

## 四、叶栅截面流线矢量场奇点的拓扑法则

### a、叶栅流道横截面

根据拓扑学的概念,任何几何图形都可视为由无数点以一定的方式构成的点集。这个点集可做各种可能的连续变形,在变形过程中所得到的各种图形彼此间是拓扑等价的。叶片端部与环壁间无间隙的叶栅流道横截面一般为四边形(各条边可能是弯曲的),显然它与圆形是拓扑等价的,而一个圆面又可经过“一一对应”及邻域点与邻域点对应地变换为一个半球

面。由此可见，四边形、圆形与半球面是相互拓扑等价的。考虑到拓扑等价的几何图形具有相同的欧拉示性数，这样，就可按照下面的方法求出叶栅流道横截面上奇点总数所遵循的法则。

设有一个半球面，如图3中的A面所示。在这个半球面上有结点和鞍点，在边界线上有半结点和半鞍点。与半球面A对应的有镜像半球面A'，而A上奇点的位置、数目及性质都与A'上的奇点对应。A和A'一起构成一个完整的球面，在这个球面上有完整的结点和鞍点（其中有些奇点是由两个半结点或两个半鞍点组合而成）。于是，由球面矢量场的奇点数公式(2.2)得

$$\sum N_A - \sum S_A + \sum N_{A'} - \sum S_{A'} + \sum N' - \sum S' = 2$$

其中下标A和A'分别表示半球面A和A'上的奇点。因此得到，半球面上，即叶栅流道横截面上总的奇点数所服从的法则为

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = 1 \tag{4.1}$$

由于叶栅横截面内的流场一般为二次流场，因此，式(4.1)描述了叶栅二次流场中鞍点总数与结点总数之间的关系。不仅如此，式(4.1)也可用于分析任何几何形状的管内横截面流场的奇点分布规律。

**b、子午截面**

对于叶栅流道中任一子午截面（不剖切叶片），如图4(a)中的AB（外环壁），CD（内环壁）所示，存在有结点和鞍点，边界上存在有半结点和半鞍点。

设平面ABCD有一镜像平面A'B'C'D'（图4）。把CD与C'D'两条线贴在一起，形成ABA'B'平面，把此平面

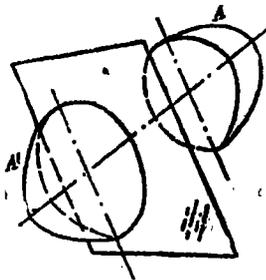


图3 镜像半球面分析图

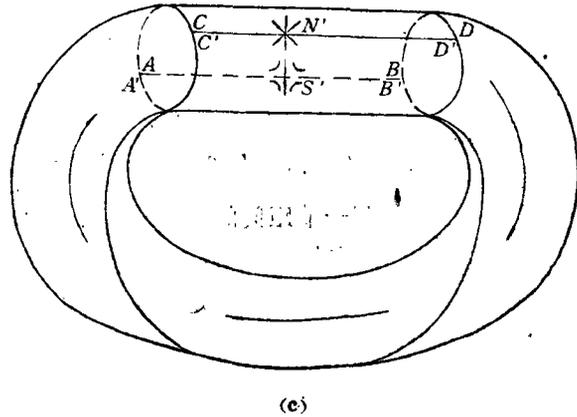
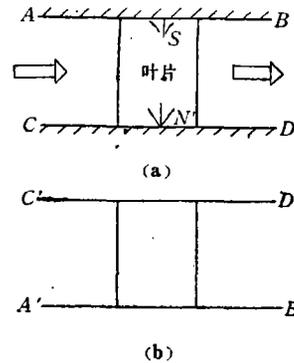


图4 叶栅流道子午截面分析图

卷曲，使AB线与A'B'线贴在一起，形成一个圆柱面（图4(c)），再把这个柱面的两头延伸，并使其首尾相接，形成一个环面。在这个环面上有流线环绕，但除了AA'C'C与BB'D'D之间的表面以外，其余各处均无奇点。类似于前面的分析，并考虑到环面的亏格为1，由式(2.1)得到子午截面内奇点总数所服从的规律为：

$$\sum N + 0.5 \sum N' = \sum S + 0.5 \sum S' \tag{4.2}$$

由上面的推导过程可以看出,式(4.2)不仅适用于叶栅流道的子午截面和任何 $S_2$ 流面,而且也适用于描述任何管内流动的子午截面上流线的奇点分布规律。

### c、前后缘截面

研究前后缘截面(见图5)内的流动也是非常重要的,尤其在前缘区域,来流边界层要分离,卷绕成马蹄涡,这不仅引起叶栅总压损失的增加,而且使该区域端壁的热传导率取极值,因此无论实验研究还是数值计算都对这一区域的流动非常重视。

由图5可见,无论是前缘截面(设 $aa'$ 伸向上游无限远处),还是后缘截面(设 $bb'$ 伸向下游无限远处),其连通数均为1.由式(2.3)即可得到前后缘截面上的奇点数的规律为:

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = 0 \quad (4.3)$$

### d、跨叶片截面

无论是环形叶栅还是直列叶栅,它们的跨叶片截面(对于环形叶栅为某一半径处的截面,对于直列叶栅为某一高度的截面)都可在一个平面上展布成平面叶栅.假设这个平面叶栅由 $n$ 个叶片组成, $n$ 应为充分大,以保证流场相对于叶栅节距是周期的.显然对于这样一个流场,其连通数为 $n+1$ ,于是,由式(2.3)可得出叶型截面上任一节距内流线矢量场奇点数规律:

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = -1 \quad (4.4)$$

式(4.4)在形式上与孤立叶片的二维截面流场中奇点总数公式一样<sup>[2]</sup>.式(4.4)适用于任何叶栅跨叶片截面(或 $S_1$ 流面)流场中奇点数的计算。

## 五、结 论

文中建立了如下各拓扑法则:

1. 在不带围带的动叶栅表面摩擦力矢量场中

$$\sum N_i = \sum S_i$$

2. 在环形叶栅或平面叶栅的表面摩擦力矢量场中

$$\sum N_i - \sum S_i = -2$$

3. 在叶栅横截面二次流场中

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = 1$$

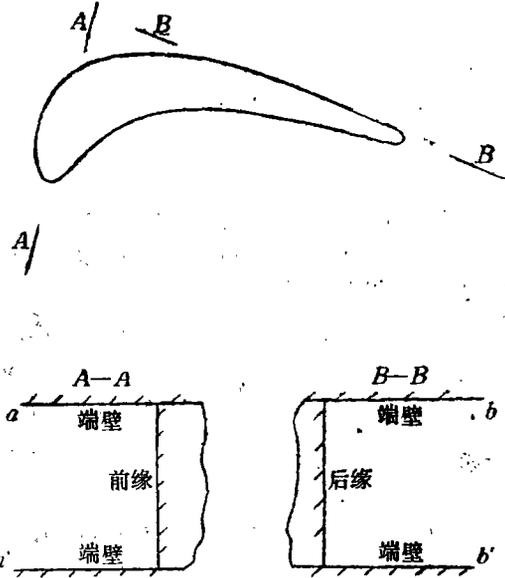


图5 叶栅前、后缘截面示意图

4. 在子午截面或前、后缘截面流场中

$$(\sum N + 0.5 \sum N') = \sum S + 0.5 \sum S'$$

5. 在叶栅跨叶片截面流场中

$$(\sum N + 0.5 \sum N') - (\sum S + 0.5 \sum S') = -1$$

### 参 考 文 献

- [1] Lighthill, M. J., Attachment and Separation in three-dimensional flow; Section Two 2-6, *Laminar Boundary Layers*, Ed by Rosenhead, Oxford Univ. Press (1963), 72-82.
- [2] Hunt, J. C. R., C. J. Abell, J. A. Peterka, and H. Woo, Kinematical studies of the flows around free or surface-mounted obstacles, applying topology to flow visualization, *J. Fluid Mechanics*, 88, Part I (1978), 179-200.
- [3] 秦元勋, 《微分方程所定义的积分曲线》, 上册 (1959).

## An Application of Topological Analysis to Studying the Three-Dimensional Flow in Cascades, Part I—Topological Rules for Skin-Friction Lines and Section Streamlines

Kang Shun

(*Haerbin Institute of Technology, Haerbin*)

### Abstract

Based on the working of Lighthill and Hunt et al., in the present paper the author has established the topological rules adapting to analysing the skin-friction lines and the section streamlines in cascades. These rules are (1) for a rotor cascade without shroud band, the total number of nodal points equals that of saddle points on the skin-friction line vector fields in each pitch range, (2) for an annular or straight cascade with no clearances at blade ends, the total number of saddle points is two more than that of nodal points on the skin-friction line fields in a pitch, (3) the total number of saddles in the secondary flow fields on cross sections in cascade is one less than that of nodes, (4) in the section streamline vector fields on a meridian surface penetrating a flow passage, and on leading and trailing edge sections, the total number of nodes is equal to that of saddles (5) on the streamline vector fields of a blade-to-blade surface, the total number of nodes is one less than that of saddles.