应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于平面断裂中的J积分

杨维阳　张少琴　　陈华才

（太原重型机械学院）　　　（包头铁路电大）

（李灏推荐，1989年5月22日收到）

摘　　要

本文利用复变函数和微积分的理论讨论线弹性各向同性均匀材料板和正交异性复合材料板Ⅰ、Ⅱ型裂纹尖端附近的J积分，得到了下列结果：

(1)将各个J积分统一化为对坐标的曲线积分的标准形式：

$$J=\int_{\Gamma}P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

(2)　证明了各个J积分的路径无关性．

(3)　推出了各个J积分的具体计算公式．

一、预　备　知　识

本文讨论线弹性各向同性均匀材料板和正交异性复合材料板Ⅰ、Ⅱ型裂纹尖端附近的J积分，现将在具体推导过程中要用到的有关结论或参考文献摘录如下：

1.1　应力场、应变场和位移场

对于线弹性各向同性均匀材料板，其Ⅰ型裂纹尖端附近有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}}\left[{\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{1/2}}+\frac{y}{2}{\rm Im}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\right]\\ \sigma_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}}\left[{\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{1/2}}-\frac{y}{2}{\rm Im}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\right]\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}}\left[\frac{y}{2}{\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}E}\left[(1-\nu){\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{1/2}}+(1+\nu)\frac{y}{2}{\rm Im}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\right]\\ \varepsilon_y&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}E}\left[(1-\nu){\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{1/2}}-(1+\nu)\frac{y}{2}{\rm Im}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\right]\\ \gamma_{xy}&=\frac{K_{\rm I}}{(2\pi)^{1/2}E}(1+\nu)y\,{\rm Re}\frac{1}{(z-a)^{3/2}}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}E}\left[2(1-\nu)\mathrm{Re}(z-a)^{\frac{1}{2}}-(1+\nu)y\,\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\right] \\ v&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}E}\left[4\mathrm{Im}(z-a)^{\frac{1}{2}}-(1+\nu)y\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其Ⅱ型裂纹情况，见[1]、[2]。

对于线弹性正交异性复合材料板的情况，见[2]～[6]。

1.2 J积分概念

J积分定义为[7]

$$J=\int_{\Gamma} W dy-\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds \tag{1.4}$$

其中Γ是环绕裂纹尖端从裂纹下表面一点逆时针方向走到上表面一点的任意积分回路。W为应变能密度函数，对平面应力状态有

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy}) \tag{1.5}$$

而$\vec{T}$为积分回路Γ上的张力：

$$\vec{T}=[\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)]\vec{i}+[\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)]\vec{j}$$

$\vec{u}$为积分回路Γ上的位移向量：

$$\vec{u}=u\vec{i}+v\vec{j}$$

从而

$$\vec{T}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds=\left(\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy-\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \tag{1.6}$$

将(1.5)，(1.6)代入(1.4)，注意到应变-位移关系：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

有

$$J=\int_{\Gamma}\left(\tau_{xy}\varepsilon_x+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left[-\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x-\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dy \tag{1.7}$$

1.3 有关数学公式

(1)格林公式 设Γ为区域D的边界曲线，P，Q，$\partial P/\partial y$，$\partial Q/\partial x$在区域$D+\Gamma$上连续，则

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{1.8}$$

其推论是：在上述条件下，若$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$，则

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy=0 \tag{1.9}$$

(2)二次曲线的判定 对于平面二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{1.10}$$

则当$a=c\neq 0$，$b=0$时为圆；当$\delta>0$，$D\neq 0$，$D\cdot S<0$时为椭圆，其中

$$D=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ a & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad S=a+c$$

(3)对于各向同性均匀材料板，用到：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{Re}Z}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{Im}Z}{\partial y}=\mathrm{Re}Z', \quad \frac{\partial \mathrm{Im}Z}{\partial x}=-\frac{\partial \mathrm{Re}Z}{\partial y}=\mathrm{Im}Z' \\ &\frac{\partial \mathrm{Re}\bar{Z}}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{Im}\bar{Z}}{\partial y}=\mathrm{Re}Z, \quad \frac{\partial \mathrm{Im}\bar{Z}}{\partial x}=-\frac{\partial \mathrm{Re}\bar{Z}}{\partial y}=\mathrm{Im}Z \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

其中 $Z=\dfrac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \bar{Z}=2(z-a)^{\frac{1}{2}}$, $\quad Z'=-\dfrac{1}{2(z-a)^{\frac{3}{2}}}$

而 $z-a=x-a+iy$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}-\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(x-a)^2-y^2}{[(x-a)^2+y^2]^2} \\ &\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}+\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{2(x-a)y}{[(x-a)^2+y^2]^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} \\ &2\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{y}{(x-a)^2+y^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

(4)对于弹性常数使得$\Delta>0$的正交异性复合材料板，用到：

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\bar{U}_j}{\partial x}=\frac{1}{\beta_j}\frac{\partial \mathrm{Im}\bar{U}_j}{\partial y}=\mathrm{Re}U_j, \quad \frac{\partial \mathrm{Im}\bar{U}_j}{\partial x}=-\frac{1}{\beta_j}\frac{\partial \mathrm{Re}\bar{U}_j}{\partial y}=\mathrm{Im}U_j \tag{1.14}$$

其中 $U_j=\dfrac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}$, $\quad \bar{U}_j=2(z_j-a)^{\frac{1}{2}}$

而 $z_j-a=x-a+i\beta_j y$, $\qquad j=1, 2$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-a}{(x-a)^2+\beta_j^2 y^2} \\ &2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\beta_j y}{(x-a)^2+\beta_j^2 y^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

(5)对于弹性常数使得$\Delta<0$的正交异性复合材料板，用到：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{Re}\bar{U}_j}{\partial x}=\mathrm{Re}U_j, \quad \frac{\partial \mathrm{Re}\bar{U}_j}{\partial y}=(-1)^{j-1}\alpha\mathrm{Re}U_j-\beta\mathrm{Im}U_j \\ &\frac{\partial \mathrm{Im}\bar{U}_j}{\partial x}=\mathrm{Im}U_j, \quad \frac{\partial \mathrm{Im}\bar{U}_j}{\partial y}=(-1)^{j-1}\alpha\mathrm{Im}U_j+\beta\mathrm{Re}U_j \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

其中 $U_j=\dfrac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}$, $\bar{U}_j=2(z_j-a)^{\frac{1}{2}}$

而
$$z_j-a=x-a+(-1)^{j-1}\alpha y+i\beta y,\qquad j=1,\ 2$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-a+(-1)^{j-1}\alpha y}{[x-a+(-1)^{j-1}\alpha y]^2+\beta^2y^2}\\&2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_j-a)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\beta y}{[x-a+(-1)^{j-1}\alpha y]^2+\beta^2y^2}\end{aligned}\right\}\tag{1.17}$$

二、J积分的表示式

现将各种情况下的J积分统一化为对坐标的曲线积分的标准形式:

$$\int_\Gamma P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy\tag{2.1}$$

2.1 Ⅰ型裂纹

(1)各向同性均匀材料板

将应力场、应变场、位移场的解析解(1.1),(1.2),(1.3)代入(1.7),注意到(1.11),得到

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi E}\int_\Gamma\Big[2\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}+y\Big(\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)}$$
$$-\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\Big)\Big]dx-y\Big(\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)dy\tag{2.2}$$

由(1.12),(1.13),上式化为

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{\pi E}\int_\Gamma\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}\tag{2.3}$$

(2)$\Delta>0$的正交异性复合材料板

将相应应力场、应变场、位移场的解析解代入(1.7),注意到(1.14),有

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\cdot\frac{b_{22}}{2}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2(\beta_2-\beta_1)}\Big[\beta_2\int_\Gamma 2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$+\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)\beta_1dy-\beta_1\int_\Gamma 2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$+\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)\beta_2dy\Big]\tag{2.4}$$

由(1.15),上式化为

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\cdot\frac{b_{22}}{2}(\beta_1+\beta_2)^2\int_\Gamma\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}\tag{2.5}$$

(3)$\Delta<0$的正交异性复合材料板

将相应应力场、应变场、位移场的解析解代入(1.7)，注意到(1.16)，有

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^{2}}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta}{\alpha(\alpha^{2}+\beta^{2})}\left\{\int_{\Gamma}\left[-\beta\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right)\right.\right.$$
$$\left.+2\alpha\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right]dx+2(\alpha^{2}+\beta^{2})\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}dy$$
$$+\int_{\Gamma}\left[\beta\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\right)+2\alpha\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\right]dx$$
$$\left.-2(\alpha^{2}+\beta^{2})\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}dy\right\}\tag{2.6}$$

由(1.17)，上式化为

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^{2}}{\pi}b_{22}\beta^{2}\int_{\Gamma}\frac{y^{2}[-y\,dx+(x-a)dy]}{[(x-a+\alpha y)^{2}+\beta^{2}y^{2}][(x-a-\alpha y)^{2}+\beta^{2}y^{2}]}\tag{2.7}$$

2.2 Ⅱ型裂纹

依次仿照2.1中(1)，(2)，(3)的推导，得到

(1)各向同性均匀材料板

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^{2}}{2\pi E}\int_{\Gamma}\left[2\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}-y\left(\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\right)\right]dx+\left[2\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\right)\right.$$
$$\left.+y\left(\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}+\mathrm{Re}\frac{1}{(z-a)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]dy$$
$$=\frac{K_{\mathrm{II}}^{2}}{\pi E}\int_{\Gamma}\frac{(x-a)^{2}[-y\,dx+(x-a)dy]}{[(x-a)^{2}+y^{2}]^{2}}\tag{2.8}$$

(2)Δ>0 的正交异性复合材料板

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^{2}}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}\frac{\beta_{1}+\beta_{2}}{\beta_{2}-\beta_{1}}\left[-\int_{\Gamma}2\beta_{1}\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}dx\right.$$
$$+\beta_{1}^{2}\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right)dy+\int_{\Gamma}2\beta_{2}\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$\left.+\beta_{2}^{2}\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z_{2}-a)^{\frac{1}{2}}}\right)dy\right]$$
$$=\frac{K_{\mathrm{II}}^{2}}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}(\beta_{1}+\beta_{2})^{2}\int_{\Gamma}\frac{(x-a)^{2}[-y\,dx+(x-a)dy]}{[(x-a)^{2}+\beta_{1}^{2}y^{2}][(x-a)^{2}+\beta_{2}^{2}y^{2}]}\tag{2.9}$$

(3)Δ<0的正交异性复合材料板

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^{2}}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}\frac{\beta}{\alpha}\left\{\int_{\Gamma}\left[\beta\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right)\right.\right.$$
$$\left.+2\alpha\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right]dx+2\left[\alpha\beta\left(\mathrm{Re}^{2}\frac{1}{(z_{1}-a)^{\frac{1}{2}}}\right.\right.$$

$$-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)+(\alpha^2-\beta^2)\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dy$$

$$+\int_\Gamma\Big[-\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$+2\alpha\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dx+2\Big[\alpha\beta\Big(\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$-(\alpha^2-\beta^2)\,\mathrm{Re}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\Big]dy\Big\}$$

$$=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{\pi}b_{11}\beta^2\int_\Gamma\frac{(x-a)^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]} \tag{2.10}$$

三、J 积分的路径无关性

3.1　I 型裂纹

(1)各向同性均匀材料板　由(2.1)，(2.3)，可记

$$P=-\frac{y^3}{[(x-a)^2+y^2]^2},\qquad Q=\frac{(x-a)y^2}{[(x-a)^2+y^2]^2}$$

有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2[y^2-3(x-a)^2]}{[(x-a)^2+y^2]^3}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

于是由(1.9)可知，沿封闭回路$l=\gamma+DB-\Gamma-CA$，（如图1），有

$$\oint_l\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}=0 \tag{*}$$

注意到CA和DB是沿着裂纹上、下表面的线段，可认为$y=0$，于是

$$\int_{DB}\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}=\int_{CA}\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}=0$$

从而由(*)式得到

$$\int_\gamma\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}=\int_\Gamma\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+y^2]^2}$$

这说明J积分(2.3)即(2.2)与路径无关．

(2)$\Delta>0$的正交异性复合材料板　由(2.1)，(2.5)可记

$$P=-\frac{y^3}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]},$$

$$Q=\frac{(x-a)y^2}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}$$

有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{y^2[3(x-a)^4+(\beta_1^2+\beta_2^2)(x-a)^2y^2-\beta_1^2\beta_2^2y^4]}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2]^2[(x-a)^2+\beta_2^2y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

仿(1)中推导，J积分(2.5)即(2.4)与路径无关：

$$\int_\gamma\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}$$

$$=\int_{\Gamma}\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}$$

其中γ和Γ如图2所示。

(3)$\Delta<0$的正交异性复合材料板　由(2.1)，(2.7)，可记

$$P=-\frac{y^3}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

$$Q=\frac{(x-a)y^2}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2[-3(x-a)^4+2(\alpha^2-\beta^2)(x-a)^2y^2+(\alpha^2+\beta^2)^2y^4]}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2]^2[(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

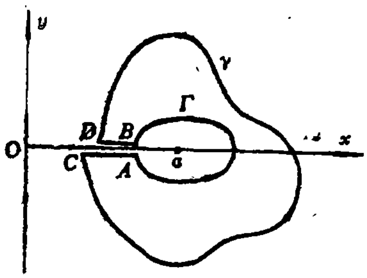

图 1

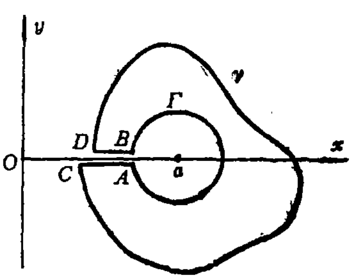

图 2

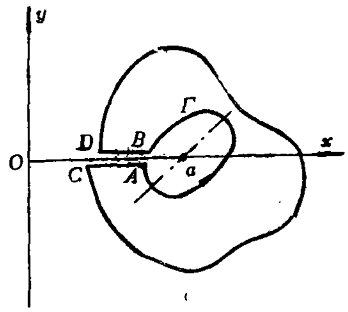

图 3

仿(1)中推导，J积分(2.7)即(2.6)与路径无关：

$$\int_{\gamma}\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

$$=\int_{\Gamma}\frac{y^2[-ydx+(x-a)dy]}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

其中γ和Γ如图 3 所示。

3.2　Ⅱ型裂纹

(1)各向同性均匀材料板　由(2.1)，(2.8)，可记

$$P=-\frac{(x-a)^2y}{[(x-a)^2+y^2]^2},\qquad Q=\frac{(x-a)^3}{[(x-a)^2+y^2]^2}$$

有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-a)^2[3y^2-(x-a)^2]}{[(x-a)^2+y^2]^3}=\frac{\partial Q}{\partial x}\tag{3.1}$$

(2)$\Delta>0$ 的正交异性复合材料板　由(2.1)，(2.9)，可记

$$P=-\frac{(x-a)^2y}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}$$

$$Q=\frac{(x-a)^3}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2][(x-a)^2+\beta_2^2y^2]}$$

有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-a)^2[-(x-a)^4+(\beta_1^2+\beta_2^2)(x-a)^2y^2+3\beta_1^2\beta_2^2y^4]}{[(x-a)^2+\beta_1^2y^2]^2[(x-a)^2+\beta_2^2y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.2}$$

(3)Δ<0的正交异性复合材料板 由(2.1)，(2.10)，可记

$$P=-\frac{(x-a)^2y}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

$$Q=\frac{(x-a)^3}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2][(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]}$$

有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-a)^2[-(x-a)^4-2(\alpha^2-\beta^2)(x-a)^2y^2+3(\alpha^2+\beta^2)^2y^4]}{[(x-a+\alpha y)^2+\beta^2y^2]^2[(x-a-\alpha y)^2+\beta^2y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.3}$$

由(3.1)，(3.2)，(3.3)，仿3.1中的推导可知，J积分(2.8)，(2.9)，(2.10)均与积分路径无关。

四、J积分的计算公式

4.1 Ⅰ型裂纹

(1)各向同性均匀材料板 因为J积分(2.3)即(2.2)与路径无关，所以可取Γ为正向小圆周：

$$\Gamma:\ x-a=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, \qquad (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

即图1中的内曲线Γ：$(x-a)^2+y^2=r^2$，$r=\text{const}\ll a$，起点$A(r,\ -\pi)$，终点$B(r,\ \pi)$。代入(2.3)得到

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{\pi E}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{K_{\rm I}^2}{E} \tag{4.1}$$

(2)Δ>0的正交异性复合材料板 因为J积分(2.5)即(2.4)与路径无关，所以可取Γ为正向小椭圆：

$$\Gamma:\ x-a=\beta_2 r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, \qquad (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

即图2中的内曲线Γ：$(x-a)^2+\beta_2^2y^2=\beta_2^2r^2$，$r=\text{const}\ll a$，起点$A(r,\ -\pi)$，终点$B(r,\ \pi)$。代入(2.5)得到

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\beta_2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\beta_2^2\cos^2\theta+\beta_1^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{K_{\rm I}^2}{2\pi}b_{22}\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\beta_2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\beta_2^2\cos^2\theta+\beta_1^2\sin^2\theta}d\theta$$

令$x=\text{ctg}\theta$，上式化为广义积分。经计算有

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{2\pi}b_{22}\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\beta_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\beta_2^2x^2+\beta_1^2)(x^2+1)}dx$$

$$=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2}=K_{\rm I}^2\frac{b_{11}}{2}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2) \tag{4.2}$$

(3)Δ<0的正交异性复合材料板 因为J积分(2.7)即(2.6)与路径无关，所以可取Γ为

正向小椭圆：

$$\Gamma:\ x-a=r(\beta\cos\theta-\alpha\sin\theta),\ \ y=r\sin\theta,\qquad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

即图3中的内曲线Γ：$(x-a)^2+2\alpha(x-a)y+(\alpha^2+\beta^2)y^2=\beta^2r^2$，$r=\text{const}\ll a$，起点$A(r,-\pi)$，终点$B(r,\pi)$。代入(2.7)得到

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{\pi}b_{22}\beta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\beta^2-4\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+4\alpha^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{K_{\rm I}^2}{\pi}b_{22}\beta\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2\theta}{\beta^2-4\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+4\alpha^2\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\beta^2+4\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+4\alpha^2\sin^2\theta}\right)d\theta$$

令$x=\text{ctg}\theta$，上式化为广义积分，经计算有

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{\pi}b_{22}\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(\beta^2x^2-4\alpha\beta x+4\alpha^2+\beta^2)(x^2+1)}+\frac{1}{(\beta^2x^2+4\alpha\beta x+4\alpha^2+\beta^2)(x^2+1)}\right]dx$$

$$=K_{\rm I}^2b_{22}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}=K_{\rm I}^2b_{11}\beta(\alpha^2+\beta^2)\tag{4.3}$$

4.2 Ⅱ型裂纹

对J积分(2.8)，(2.9)，(2.10)依次仿照4.1中(1)，(2)，(3)的推导，有

(1)各向同性均匀材料板

$$J=\frac{K_{\rm II}^2}{\pi E}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{K_{\rm II}^2}{E}\tag{4.4}$$

(2)$\Delta>0$的正交异性复合材料板

$$J=\frac{K_{\rm II}^2}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}\beta_2(\beta_1+\beta_2)^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2\theta}{\beta_2^2\cos^2\theta+\beta_1^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{2}(\beta_1+\beta_2)=K_{\rm II}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1^2\beta_2^2}\tag{4.5}$$

(3)$\Delta<0$的正交异性复合材料板

$$J=\frac{K_{\rm II}^2}{\pi}b_{11}\beta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\beta^2\cos^2\theta-2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+\alpha^2\sin^2\theta}{\beta^2-4\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+4\alpha^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=K_{\rm II}^2b_{11}\beta=K_{\rm II}^2b_{22}\frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\tag{4.6}$$

本文利用复变函数和微积分的理论相继讨论了线弹性各向同性均匀材料板和正交异性复合材料板Ⅰ、Ⅱ型裂纹尖端附近的各个J积分的表示式，路径无关性与计算公式。基于J积分在平面断裂中的重要地位，本文所得到的一系列结果具有一定的实用和参考价值。

参 考 文 献

[1] 褚武扬编著，《断裂力学基础》，科学出版社（1979），265—267.

[2] Corten, H. T., *Fracture Mechanics of Composites*, in *Fracture*, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York, 7 (1972), 690—691, 695—703.

[3] 李灏、陈树坚、郭碧坚，《断裂力学与复合材料力学》，华中工学院出版社（1986），337—348.

[4] 杨维阳、张少琴，关于复合材料单层板Ⅰ型裂纹尖端应力场的探讨，太原重型机械学院学报，7, 3 (1986), 46—53.

[5] 杨维阳、张少琴，关于复合材料单层板Ⅰ型裂纹尖端附近应变场与位移场的探讨，太原重型机械学院学报，8, 1 (1987), 77—87.

[6] 杨维阳、张少琴，复合材料单层板Ⅱ型裂纹尖端附近应力场、应变场和位移场的解析解，太原重型机械学院学报，9, 2 (1988), 46—58.

[7] Rice, J. R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *J. Applied Mechanics*, 35, 2 (1968), 379—386.

On J-Integrals in the Plane Fracture

Yang Wei-yang Zhang Shao-qin

(Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan)

Chen Hua-cai

(Baotou Railroad TV University, Baotou)

Abstract

In this paper, we discuss J-integrals near models Ⅰ and Ⅱ crack tips for the plates of linear-elastic isotropic homogeneous material and orthotropic composite material, using the theories of complex function and calculus, and obtain the result as follows:

(1) The various J-integrals are transformed into the standard form of line integrals with respect to coordinates:

$$J=\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

(2) Independence of path of the various J-integrals is proved.

(3) Computing formulae of J-integrals are derived.