应用数学和力学, 第 25 卷 第 6 期(2004 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 06_0621_06

关于单形的中面*

李小燕[1,2], 何斌吾[1,3], 冷岗松[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436;
2. 湖南师范大学 数学系, 长沙 410081;
3. 湖南理工大学 数学系, 湖南岳阳 414000)

(郭兴明推荐)

摘要: 在 n 维欧氏空间中, 作为三角形的高维推广的单形的中面是最近才引入的一个重要的几何概念• 该文利用 Grassmann 代数的方法获得了单形的中面面积的解析表达式, 证明了单形的中面类似于三角形中线的性质, 例如, 对于一个给定的单形, 存在另一个单形使得其边长分别等于给定单形的中面面积; 一个单形的所有中面有且仅有一个公共点等• 同时, 利用中面面积的解析表达式证明了单形中面与单形的棱长、外接圆半径、中线长、角平分面等之间的一些优美性质, 建立了一些新的重要的几何不等式•

关 键 词: 单形; 中面; 中线; Grassmann 代数; 几何不等式

中图分类号: O184 文献标识码: A

引 言

距离几何作为几何学的一个分支是在本世纪 20 年代末开创的• 近年来, 距离几何在统计学、分子生物学、计量学以及机器人学等方面得到了应用, 并引起了一些统计学家及生物化学家们的广泛关注•

众所周知, 三角形的中线具有很多优美的性质, 例如, 三中线可以构成另一个三角形, 三中线有唯一的公共点等等• 然而, 在 n 维欧氏空间中, 作为三角形的高维推广的单形, 文[1]中定义的中线并不具有类似的性质• 这个问题一直让几何工作者感到困惑, 直到文[2]首次引入单形中面的概念并证明了部分有关的性质• 本文利用拉姆代数的方法获得了单形的中面面积的解析表达式, 证明了单形中面的类似于三角形中线的一些优美性质, 建立了一系列涉及到单形中面与边长、外径、中线的重要的几何不等式•

设 $\Omega = \langle A_0, A_1, \cdots, A_n \rangle$ 代表以 $\langle A_0, A_1, \cdots, A_n \rangle$ 为顶点集的 n 维单形, $V(\Omega)$ 代表单形 Ω 的体积, $\Omega_i = \langle A_0, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, A_n \rangle$ (这里 $\hat{A}_i$ 表示 A_i 被删除) 代表 Ω 的 $n-1$ 维面, S_i 表示 Ω_i 的面积(即 $n-1$ 维体积), m_i 表示 Ω 的过顶点 A_i 的中线长 $(i = 0, 1, \cdots, n)$, $\rho_{ij} = |A_iA_j|$, θ_{ij} 表示 Ω_i 和 Ω_j 之间的二面角 $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$•

文[2]给出了中面的概念•

* 收稿日期: 2002_09_01; 修订日期: 2003_11_25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271071)
作者简介: 李小燕(1963—), 女, 湖南常德人, 副教授, 博士(联系人. Tel/Fax: +86_21_56680206; E_mail: lixy77@sohu.com).

定义 1　设 M_{ij} 是单形 $\Omega = \langle A_0, A_1, \cdots, A_n\rangle$ 的边 A_iA_j 的中点. 则称 $n-1$ 维单形 $\Omega_{ij} = \langle M_{ij}, A_0, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, \hat{A}_j, \cdots, A_n\rangle$ 为单形 Ω 的边 A_iA_j 上的中面 $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$.

本文得到了如下主要结论.

定理 1　设 S_i 是单形 Ω 的 $n-1$ 维面 Ω_i 的面积 $(i = 0, 1, \cdots, n)$, S_{ij} 是中面 Ω_{ij} 的面积, θ_{ij} 是 Ω_i 和 Ω_j $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$ 所成的二面角. 则

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\quad S_i^2 + S_j^2 + 2S_iS_j\cos\theta_{ij}. \tag{1}$$

定理 2　设 Ω 是 E^n 中的 n 维单形, S_{ij} $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$ 是 Ω 的中面 Ω_{ij} 的面积. 则在 E^n 中存在另一个 n 维单形 $\Omega' = \langle A'_0, A'_1, \cdots, A'_n\rangle$ 使得

$$|A'_iA'_j| = \quad S_{ij} \quad 和 \quad V(\Omega') = C(n)V^{n-1}(\Omega),$$

这里
$$C(n) = [(n+1)/(n!)^2](n/2)^n.$$

定理 3　单形 Ω 的所有中面 Ω_{ij} $(0 \leqslant i < j \leqslant n)$ 有唯一的公共点.

1　定理的证明

为了证明上面的定理, 我们先列出如下已知的结果. 假设 Φ 是 E^n 中的 n 维外微分, 即 $\Phi \in \wedge^n(E^n)$. 则有如下著名结果[3,4].

引理 1　设 $\Phi \in \wedge^n(E^n)$, $\Phi \neq 0$, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是 E^n 中的两组基. 假设

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{u}_i \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

则
$$\Phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \det(a_{ij})_{n\times n}\cdot\Phi(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n). \tag{2}$$

我们还需要用到如下经典公式[4,5].

引理 2　设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 是 E^n 中线性无关的向量组, $\Phi \in \wedge^n(E^n)$. 则

$$\Phi(\boldsymbol{u}_2 \wedge \boldsymbol{u}_3 \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_3 \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n, \cdots, \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 \cdots \wedge \boldsymbol{u}_{n-1}) = \Phi^{n-1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n). \tag{3}$$

定理 1 的证明

设　$\boldsymbol{u}_i = A_0A_i$,

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i}{2(n-1)!}\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\boldsymbol{u}}_i \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2(n-1)!}A_1A_2 \wedge A_1A_3 \wedge \cdots \wedge A_1A_n.$$

则

$$|\alpha_i| = \frac{1}{2}S_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2(n-1)!}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \wedge (\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_1) = -\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_n.$$

另一方面,

$$S_{01} = \frac{1}{(n-1)!}|A_2M_{01} \wedge A_2A_3 \wedge \cdots \wedge A_2A_n| =$$
$$\frac{1}{2(n-1)!}|(A_2A_1 + A_2A_0) \wedge A_2A_3 \wedge \cdots \wedge A_2A_n| =$$

$$\frac{1}{2(n-1)!}|(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2)\wedge(\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2)\wedge(\boldsymbol{u}_4-\boldsymbol{u}_2)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_2)|=$$
$$\frac{1}{2(n-1)!}|-2\boldsymbol{u}_2\wedge\boldsymbol{u}_3\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_3\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n+\cdots+$$
$$(-1)^i\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n+\cdots+(-1)^n\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}|=$$
$$|2\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|=|\alpha_1-\alpha_0|.$$

类似地,我们有

$$S_{0i}=|\alpha_i-\alpha_0|\qquad(i=2,3,\cdots,n).$$

设 $\boldsymbol{m}_{ij}=A_0M_{ij}$, 当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时,

$$S_{ij}=\frac{1}{(n-1)!}|\boldsymbol{m}_{ij}\wedge\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_i\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_j\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n|=$$
$$\frac{1}{2(n-1)!}|(\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{u}_j)\wedge\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_i\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_j\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n|=$$
$$\frac{(-1)^i}{2(n-1)!}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n-$$
$$\frac{(-1)^j}{2(n-1)!}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\hat{\boldsymbol{u}}^j\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n=$$
$$|\alpha_i-\alpha_j|.$$

因此,对于 Ω 的所有的中面 $S_{ij}(0\leqslant i<j\leqslant n)$, 都有

$$S_{ij}=|\alpha_i-\alpha_j|\qquad(0\leqslant i<j\leqslant n).$$

进一步,我们得到

$$S_{ij}^2=|\alpha_j-\alpha_i|^2=\langle\alpha_j-\alpha_i,\alpha_j-\alpha_i\rangle=\alpha_i^2+\alpha_j^2-2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=$$
$$\frac{1}{4}S_i^2+\frac{1}{4}S_j^2+\frac{1}{2}S_iS_j\cos\theta_{ij},$$

于是,我们得到 S_{ij} 的解析表达式. □

定理 2 的证明

根据定理 1 的证明可知,在 $\wedge^{n-1}(E^n)$ 中,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,而向量组 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 仿射无关. 不失一般性,我们可置 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的起点在 $\wedge^{n-1}(E^n)$ 的原点,终点分别用 $A'_0,A'_1,\cdots,A'_n$ 表示. 则 $A'_0,A'_1,\cdots,A'_n$ 是 $\wedge^{n-1}(E^n)$ 中的 $n+1$ 个仿射无关点. 因为 $\wedge^{n-1}(E^n)$ 与 E^n 同构,所以 $A'_0,A'_1,\cdots,A'_n$ 是 E^n 中的仿射无关点. 从而 $\Omega'=\langle A'_0,A'_1,\cdots,A'_n\rangle$ 非退化的 n 维单形,且有 $|A'_iA'_j|=|\alpha_i-\alpha_j|$.

由定理 1 的证明可知, $|\alpha_i-\alpha_j|=S_{ij}$. 因此,

$$|A'_iA'_j|=S_{ij}\qquad(0\leqslant i<j\leqslant n).$$

进一步利用引理 1 和引理 2, 可得

$$V(\Omega')=\frac{1}{n!}\Phi(\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_1-\alpha_0)=$$
$$\frac{1}{n!}\Phi(2\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+2\alpha_n)=$$
$$\frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&2\end{pmatrix}\cdot\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$\frac{1}{n!}(n+1)\frac{(-1)^{1+2+\cdots+n}}{(2(n-1)!)^n}\times$$

$$\Phi(\boldsymbol{u}_2\wedge\boldsymbol{u}_3\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n,\cdots,\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{n-1})=$$
$$\frac{n+1}{2^n(n!(n-1)!)^n}\Phi^{n-1}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)=$$
$$\frac{n+1}{2^n(n!(n-1)!)^n}(n!V^{n-1}(\Omega))=\frac{n+1}{(n!)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^n V^{n-1}(\Omega).$$

定理 2 得证. □

定理 3 的证明

单形 Ω 有 $\binom{n+1}{2}$ 个中面, 根据 Helly 定理[6, p. 4], 只要证明任意 $n+1$ 个中面有唯一公共点. 不失一般性, 只需证明 $\Omega_{01},\Omega_{02},\cdots,\Omega_{0n}$ 和 Ω_{12} 有唯一公共点即可. 取 Ω 为重心坐标单形, 我们可得中面的重心坐标方程如下:

$$\Omega_{0i}:\quad \mu_0-\mu_i=0\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$
$$\Omega_{12}:\quad \mu_1-\mu_2=0.$$

上面方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&-1&\cdots&0&0\end{vmatrix}=0.$$

根据 Menclaus 定理, 这 $n+1$ 个超平面有唯一公共点. 定理 3 得证. □

2　有关中面的不等式

定理 4　设 $T_{ij}(0\leqslant i<j\leqslant n)$ 是 Ω 的二面角 θ_{ij} 的角平分面的面积, S_{ij} 是中面 Ω_{ij} 的面积. 则

$$S_{ij}\geqslant T_{ij}\qquad(0\leqslant i<j\leqslant n),$$

等式成立当且仅当 $S_0=S_1=\cdots=S_n$.

证明　根据 $T_{ij}(0\leqslant i<j\leqslant n)$ 的解析表达式[7]:

$$T_{ij}=\frac{2S_iS_j}{S_i+S_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}.\tag{4}$$

对(4)利用算术_几何平均不等式, 可得

$$T_{ij}\leqslant\sqrt{S_iS_j}\cos(\theta_{ij}/2).$$

利用定理 1, 我们得到

$$\frac{S_{ij}}{T_{ij}}\geqslant 0.5\frac{\sqrt{S_i^2+S_j^2+2S_iS_j\cos\theta_{ij}}}{\sqrt{S_iS_j}\cos(\theta_{ij}/2)}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+2\cos\theta_{ij}}{\cos^2(\theta_{ij}/2)}}=1.$$ □

定理 5　设 S_i 是单形 Ω 的 $n-1$ 维面 Ω_i 的面积, S_{ij} 是中面 Ω_{ij} 的面积. 假设

$$S_0=\max_{0\leqslant i\leqslant n}S_i,\quad S_n=\min_{0\leqslant i\leqslant n}S_i.$$

则
$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{S_{ij}^2}{S_iS_j}\leqslant\frac{(n+1)^2}{16}\cdot\frac{(S_0+S_n)^2}{S_0S_n},$$

当 Ω 是正则单形时等式成立.

为了证明定理 5, 我们需要用到下面著名的不等式.

引理 3 (Kantorovich)　设 $a_k>0,\ k=1,2,\cdots,n,\ \sum_{k=1}^n a_k=1,\ 0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{(b_1+b_n)^2}{4b_1 b_n}.$$

定理 5 的证明

对任意 $n+1$ 个实常数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，有如下著名的结论[7]：

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \geqslant 2 \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \cos\theta_{ij}, \tag{5}$$

结合(1)和(5)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j S_{ij}^2 &= \frac{1}{4}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (S_i^2+S_j^2) + \frac{1}{4}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_iS_i)(x_jS_j)\cos\theta_{ij} \leqslant \\ &\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} x_i S_i^2 - \sum_{i=0}^{n} x_i^2 S_i^2\right) + \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(x_iS_i)^2 = \\ &\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} x_i S_i^2.\end{aligned} \tag{6}$$

在(6)中取 $x_i = S_i^{-1}(i=0,1,\cdots,n)$，根据 Kantorovich 不等式，可得

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{S_{ij}^2}{S_iS_j} &\leqslant \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{S_i}\sum_{i=0}^{n} S_i = \frac{(n+1)^2}{4}\sum_{i=0}^{n}\frac{S_i}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+1)S_i} \leqslant \\ &\frac{(n+1)^2}{16}\cdot\frac{(S_0+S_n)^2}{S_0S_n}.\end{aligned}$$

□

定理 6　设 $\Omega = \langle A_0, A_1, \cdots, A_n\rangle$ 是 n 维单形，$\rho_{ij} = |A_iA_j|$，R 是 Ω 的外径，m_i 是过顶点 A_i 的中线长，则

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} S_{ij}^2 \leqslant \frac{((n+1)(n-1)!)^{n-4}}{(4(n+1)!)^{n-2}}\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^2\right)^{n-1}, \tag{7}$$

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} S_{ij}^2 \leqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{(4n^{n-2}(n-1)!)^2} R^{2(n-1)}, \tag{8}$$

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} S_{ij}^2 \leqslant \frac{n^{n+2}}{(4n!)^2(n+1)^{2(n-2)}}\left(\sum_{i=0}^{n} m_i^2\right)^{n-1}, \tag{9}$$

当 Ω 是正则单形时等式成立.

为了证明定理 6，我们需要下面的引理.

引理 4　对 E^n 中的 n 维单形 Ω，有

$$\sum_{i=0}^{n} S_i^2 \leqslant \frac{((n-1)!)^{n-4}}{((n+1)!)^{n-2}}\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^2\right)^{n-1}, \tag{10}$$

当且仅当 Ω 是正则单形时等式成立.

引理 4 是文[8]中定理的特殊情形，在文[8]中(1.5)式取 $k=2$，$l=n-1$，$N=n+1$ 即得(10).

定理 6 的证明

在(6)中令 $x_i = 1\ (i=0,1,\cdots,n)$ 得到

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} S_{ij}^2 \leqslant \frac{n+1}{4}\sum_{i=0}^{n} S_i^2. \tag{11}$$

结合(10)和(11)，不等式(7)得证.

应用已有的结果[1,8]：

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^2 \leqslant (n+1)^2R^2,\quad \sum_{i=0}^{n} m_i^2 = \frac{n+1}{n^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^2.$$

我们得到(8)和(9)• □

[参 考 文 献]

[1] Sanyal A. Medians of a simplex[J]. Amer Math Monthly, 1967, **74**(8): 967—998.

[2] GUO Shu_guang. Some properties for middle sections of a simplex and their applications[J]. J Math (PRC), 1997, **17**(3): 413—416.

[3] Boothby W M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry[M]. New York: Academic Press, 1975.

[4] LENG Gang_song, ZHOU Guo_biao. Inverse forms of Hadamard inequality[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2002, **23**(4): 990—997.

[5] Reznikov A G. A strenghened isoperimetric inequality for simplices[A]. In: J Lindenstrauss, V D Milmar Eds. Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math[C]. 1469. New York: Springer, 1991, 90—93.

[6] Schneider R. Covex Bodies: The Brunn_Minkowski Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[7] LENG Gang_song, SHEN Zhu, TANG Li_hua. Inequalities for two simplices[J]. J Math Anal Appl, 2000, **248**(2): 429—437.

[8] Mitrinovic D S, Peçariç J E, Volenee V. Recent Advances in Geometric Inequalities[M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad Publ, 1989.

Mid_Facets of a Simplex

LI Xiao_yan[1,2], HE Bin_wu[1,3], LENG Gang_song[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai 200436, P.R.China;
2. Department of Mathematics, Hunan Normal University,
Changsha 410081, P.R.China;
3. Department of Mathematics, Hanan University of Science and Technology,
Yueyang, Hunan 414000, P.R.China)

Abstract: The mid_facet of a simplex in n_dimensional Euclidean space which was introduced quite recently is an important geometric element. An analytic expression for the mid_facet area of a simplex is firstly given. In order to obtain the expression, the exterior differential method was presented. Furthermore, the properties of the mid_facets of a simplex analogous to median lines of a triangle (such as for all mid_facets of a simplex, there exists another simplex such that its edge_lengths equal to these mid_facets area respectively, and all of the mid_facets of a simplex have a common point) were proved. Finally, by applying the analytic expression, a number of inequalities which combine edge_lengths, circumradius, median line, bisection area and facet area with the mid_facet area for a simplex were established.

Key words: simplex; mid_facet; median line; Grassmann algebra; geometric inequality