应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

几类可积的非线性常微分方程(Ⅱ)
——高阶方程*

李 鸿 祥

（上海铁道学院，1989年4月29日收到）

摘　　要

本文给出几类可积的高阶非线性常微分方程，指出一些已知的可积性结果或可积方程都是它们的特例．这些方程在物理学和力学中有着广泛的应用背景．

一、引　　言

二阶及二阶以上的高阶非线性常微分方程在物理学及各种力学中有着广泛的应用．本文利用类似于[1]中所用过的未知函数的任意函数变换法，给出几类可积的高阶非线性变系数常微分方程，指出[2～6]中的一些可积方程都是本文所给出的可积方程的特例．

二、二　阶　方　程

假设本文所提到的函数都定义在某个区间I内，且在其中满足定理中的条件．

定理2.1　设$G\in C^1$，w，f，$\varphi\in C^2$，$G(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，$\varphi=\varphi(x)$，$w(y)\neq\text{const}$，b和c为实常数，则二阶方程

$$\begin{aligned}&fw'(y)y''+fw''(y)y'^2+[2f'+(bG-G'/G)f]w'(y)y'\\&+[f''+(bG-G'/G)f'+cfG^2]w(y)\\&+\varphi''+(bG-G'/G)\varphi'+c\varphi G^2=0\end{aligned}\tag{2.1}$$

可积，且其通积分为

(i)　$b^2<4c$时，
$$f(x)w(y)+\varphi(x)=\exp\left[-\frac{b}{2}\int G(x)dx\right]\cdot\left[C_1\cos\left(\omega\int Gdx\right)+C_2\sin\left(\omega\int G(x)dx\right)\right]\tag{2.2}$$

(ii)　$b^2=4c$时，
$$f(x)w(y)+\varphi(x)=\exp\left[-\frac{b}{2}\int G(x)dx\right]\left(C_1+C_2\int G(x)dx\right)\tag{2.3}$$

* 楼世博推荐．

(iii) $b^2>4c$时，$f(x)w(y)+\varphi(x)=C_1\exp\left[\left(-\frac{b}{2}+\tau\right)\int G(x)dx\right]$

$$+C_2\exp\left[\left(-\frac{b}{2}-\tau\right)\int G(x)dx\right] \qquad (2.4)$$

式中 C_1和C_2 为任意常数（下同），$\omega=\sqrt{4c-b^2}/2$，$\tau=\sqrt{b^2-4c}/2$。

证 令

$$f(x)w(y)+\varphi(x)=v \qquad (2.5)$$

则方程(2.1)变为[2]中可积的二阶变系数线性方程(3.1)：

$$v''+(bG-G'/G)v'+cG^2v=0$$

将其通解代入(2.5)式，便得通积分(2.2)～(2.4)式。证毕。

当$f(x)\equiv1$，$\varphi(x)\equiv0$时，方程(2.1)变为

$$w'(y)y''+w''(y)y'^2+(bG-G'/G)w'(y)y'+cG^2w(y)=0 \qquad (2.6)$$

这是[3]中可积的非线性方程(2.1)。[2]中方程(3.1)是它当$w(y)=v$时的特例。

当$f(x)\equiv1$，$\varphi(x)\equiv0$，$G(x)=1/x$时，方程(2.1)变为

$$w'(y)y''+w''(y)y'^2+\frac{b+1}{x}w'(y)y'+\frac{c}{x^2}w(y)=0 \qquad (2.7)$$

二阶Euler方程

$$y''+\frac{a_1}{x}y'+\frac{a_2}{x^2}y=0$$

是(2.7)当$w(y)=y$，$b=a_1-1$，$c=a_2$时的特例。

当$f(x)\equiv1$，$\varphi(x)\equiv0$，$G(x)\equiv1$时，方程(2.1)变为

$$w'(y)y''+w''(y)y'^2+bw'(y)y'+cw(y)=0 \qquad (2.8)$$

二阶常系数线性方程

$$y''+by'+cy=0$$

显然是(2.8)当$w(y)=y$时的特例。

定理2.2 设 G，$F\in C^1$，w，f，$\varphi\in C^2$，$G(x)\neq0$，$f(x)\neq0$，$F=F(x)$，$\varphi=\varphi(x)$，$w(y)\neq\text{const}$，b和c为实常数，则二阶方程

$$\begin{aligned}&fw'(y)y''+fw''(y)y'^2+[2f'+(bG-2F-G'/G)f]w'(y)y'\\&+\{f''+(bG-2F-G'/G)f'+[F^2-F'-F(bG-G'/G)+cG^2]f\}w(y)\\&+\varphi''+(bG-2F-G'/G)\varphi'+[F^2-F'-F(bG-G'/G)+cG^2]\varphi=0\end{aligned} \qquad (2.9)$$

可积，且其通积分为

$$f(x)w(y)+\varphi(x)=v\exp\left(\int F(x)dx\right) \qquad (2.10)$$

式中v为[2]中方程(3.1)的通解。

证 变换

$$f(x)w(y)+\varphi(x)=u \qquad (2.11)$$

将方程(2.9)化为[2]中可积的二阶线性方程(3.9)。后者的通解为

$$u=v\exp\left(\int F(x)dx\right)$$

式中v为[2]中方程(3.1)的通解．代入变换(2.11)，即得通积分(2.10)．

当$f(x)\equiv 1$，$\varphi(x)\equiv 0$时，方程(2.9)变为

$$w'(y)y''+w''(y)y'^2+(bG-2F-G'/G)w'(y)y' +[F^2-F'-F(bG-G'/G)+cG^2]w(y)=0 \tag{2.12}$$

这是[3]中的方程(2.9)．

同法可证

定理2.3 设$Q,F,H\in C^1,f,\varphi,M,N,G,w\in C^2,MH-NF\neq 0$，$R(x)\neq 0$，$G(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，$w(y)\neq \text{const}$，$a,b,c$为实常数，则二阶非线性方程

$$fw'(y)y''+fw''(y)y'^2+[2f'-(\Psi+R'/R)f]w'(y)y' +[f''-(\Psi+R'/R)f'+\Phi Rf]w(y)+\varphi''-(\Psi+R'/R)\varphi' +\Phi R\varphi=0 \tag{2.13}$$

可积，式中R，Ψ，Φ分别如[2]中(2.12)，(2.13)，(2.14)所示，且其通积分为

$$f(x)w(y)+\varphi(x)=B\exp\left(-\int R(x)udx\right) \tag{2.14}$$

式中u为[2]中(2.11)的通解，B为积分常数．

如果用$NL[y]$表示方程(2.1)，(2.6)～(2.9)，(2.12)或(2.13)的左端，且设$h(x)\in C$为一连续函数，则二阶非线性方程

$$NL[y]=h(x) \tag{2.15}$$

显然是可积的．

从定理2.1和定理2.2的证明中可看出，二阶非线性方程(2.1)，(2.6)～(2.9)，(2.12)，(2.13)和(2.15)都可经关于未知函数y的函数变换化为二阶线性方程．因此，我们称这些方程为**拟线性方程**．

我们指出，[4]和[5]中下列诸二阶非线性方程都是本文方程(2.1)，(2.6)，(2.7)或(2.8)的特例：

在[4]中：6.107，6.113，6.117，6.122，6.124—125，6.128，6.150—151，6.157，6.164，6.169—170，6.173，6.175—176，6.179—180，6.185．

在[5]中：4.125—126，4.128—130，4.135—136，4.145，4.150—151，4.153，4.158，4.187，4.190，4.195，4.197，4.199—201，4.203，4.208—210，4.212—214，4.217，4.219—221，4.223，4.227—230，4.240．

例2.1 方程$2yy''-3y'^2-4y^2=0$([4，(6.151)])有平凡解$y=0$；当$y>0$时，它可改写为

$$-\frac{1}{4}y^{-5/2}(2yy''-3y'^2)+y^{-1/2}=0$$

即
$$(y^{-1/2})''+y^{-1/2}=0$$

它是(2.8)型的．此处$w(y)=y^{-1/2}$，$b=0$，$c=1$，且$b^2-4c=-4<0$，$\omega=1$．根据(2.2)式，得通解

$$y=(C_1\cos x+C_2\sin x)^{-2}$$

注意，这里所用的方法与[4]中的不同．

例2.2 方程 $x^3yy''+x^3y'^2+6x^2yy'+3xy^2=a$ ([5, (4.229)])可改写为

$$(y^2)''+\frac{6}{x}(y^2)'+\frac{6}{x^2}y^2=\frac{2a}{x^3}$$

与它对应的齐次方程

$$(y^2)''+\frac{6}{x}(y^2)'+\frac{6}{x^2}y^2=0$$

是(2.7)当$w(y)=y^2$，$b=5$，$c=6$时的特例．由于$b^2-4c=1>0$，$\tau=1/2$，故其通积分可由(2.4)式得出

$$y^2=C_1x^{-2}+C_2x^{-3}$$

又 $y^2=a/x$是原方程的一个特积分，故所求通积分为

$$y^2=C_1x^{-2}+C_2x^{-3}+ax^{-1}$$

三、n(⩾3) 阶方程

定理3.1 设 $G\in C^2$，$f,w,\varphi\in C^3$，$G(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，$\varphi=\varphi(x)$，$w(y)\neq\text{const}$，a_1，a_2，a_3为实常数，则三阶非线性方程

$$\begin{aligned}&fw'(y)y'''+fw'''(y)y'^3+3fw''(y)y'y''+[3f'+(a_1G-3G'/G)f]\\&\quad\cdot[w'(y)y''+w''(y)y'^2]+\{3f''+2(a_1G-3G'/G)f'\\&\quad+[a_2G^2-a_1G'+3(G'/G)^2-G''/G]f\}w'(y)y'\\&\quad+\{f'''+(a_1G-3G'/G)f''+[a_2G^2-a_1G'+3(G'/G)^2\\&\quad-G''/G]f'+a_3fG^3\}w(y)+\varphi'''+(a_1G-3G'/G)\varphi''\\&\quad+[a_2G^2-a_1G'+3(G'/G)^2-G''/G]\varphi'+a_3\varphi G^3=0\end{aligned}\tag{3.1}$$

可经变换

$$f(x)w(y)+\varphi(x)=u,\quad t=\int G(x)dx\tag{3.2}$$

化为常系数线性方程

$$\frac{d^3u}{dt^3}+a_1\frac{d^2u}{dt^2}+a_2\frac{du}{dt}+a_3u=0\tag{3.3}$$

证 将变换(3.2)代入(3.1)，即得方程(3.3)．证毕．

当$f(x)\equiv1$，$\varphi(x)\equiv0$时，方程(3.1)变为

$$\begin{aligned}&w'(y)y'''+w'''(y)y'^3+3w''(y)y'y''+(a_1G-3G'/G)[w'(y)y''\\&\quad+w''(y)y'^2]+[a_2G^2-a_1G'+3(G'/G)^2-G''/G]w'(y)y'\\&\quad+a_3G^3w(y)=0\end{aligned}\tag{3.4}$$

文[6]中的线性方程(2.1)是(3.4)当$w(y)=y$时的特例．

当$G(x)=1/x$时，方程(3.4)变为

$$\begin{aligned}&w'(y)y'''+w'''(y)y'^3+3w''(y)y'y''+\frac{a_1+3}{x}[w'(y)y''+w''(y)y'^2]\\&\quad+\frac{1}{x^2}(a_2+a_1+1)w'(y)y'+\frac{a_3}{x^3}w(y)=0\end{aligned}\tag{3.5}$$

显然，三阶Euler方程

$$y'''+\frac{b_1}{x}y''+\frac{b_2}{x^2}y'+\frac{b_3}{x^3}y=0$$

是(3.5)当$w(y)=y$，$a_1=b_1-3$，$a_2=b_2-b_1+2$，$a_3=b_3$时的特例。

当$G(x)\equiv 1$时，方程(3.4)变为常系数非线性方程

$$\begin{aligned}&w'(y)y'''+w'''(y)y'^3+3w''(y)y'y''+a_1[w'(y)y''+w''(y)y'^2]\\&+a_2w'(y)y'+a_3w(y)=0\end{aligned}\tag{3.6}$$

三阶常系数线性方程

$$y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=0$$

显然是方程(3.6)当$w(y)=y$时的特例。

定理3.2 设$G\in C^3$，$f,w,\varphi\in C^4$，$G(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，$\varphi=\varphi(x)$，$w(y)\neq\text{const}$，$a_i(i=1,\cdots,4)$为实常数。则四阶方程

$$\begin{aligned}&[fw(y)+\varphi]^{(4)}+(a_1G-6G'/G)[fw(y)+\varphi]'''+[a_2G^2-3a_1G'\\&+15(G'/G)^2-4G''/G][fw(y)+\varphi]''+[a_3G^3-a_2GG'+3a_1G'^2/G\\&-15(G'/G)^3-a_1G''-G'''/G+10G'G''/G^2][fw(y)+\varphi]'\\&+a_4G^4[fw(y)+\varphi]=0\end{aligned}\tag{3.7}$$

可经变换(3.2)化为常系数线性方程

$$\frac{d^4u}{dt^4}+a_1\frac{d^3u}{dt^3}+a_2\frac{d^2u}{dt^2}+a_3\frac{du}{dt}+a_4u=0\tag{3.8}$$

证 将变换(3.2)代入方程(3.7)，即得(3.8)。

置$w(y)=y$，$f(x)\equiv 1$，$\varphi(x)\equiv 0$，方程(3.7)便化为[6]中的四阶变系数线性方程(2.4)。因此，四阶Euler方程

$$x^4y^{(4)}+b_1x^3y'''+b_2x^2y''+b_3xy'+b_4y=0$$

和四阶常系数线性方程

$$y^{(4)}+a_1y'''+a_2y''+a_3y'+a_4y=0$$

都是方程(3.7)的特例。

定理3.3 设E，f，w，$\varphi\in C^n$，$E(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，$\varphi=\varphi(x)$，$w(v)\neq\text{const}$，a_i $(i=0,1,\cdots,n)$为实常数，且$a_0=1$。则n阶变系数非线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}E^{(i)}[fw(v)+\varphi]^{(n-j)}=0\tag{3.9}$$

可经变换

$$E(x)[f(x)w(v)+\varphi(x)]=y\tag{3.10}$$

化为常系数线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}a_jy^{(n-j)}=0\tag{3.11}$$

证 将变换(3.10)代入(3.9)，再利用Leibniz公式，即可得到方程(3.11)。

显然，令$f(x)\equiv 1$，$\varphi(x)\equiv 0$，$w(v)=v$，方程(3.9)就变为[6]中可积的n阶线性方程(3.1)。

类似地，易证下述定理：

定理3.4 设$E(x)$，$f(x)$，$w(v)$，$\varphi(x)$和a_i同定理3.3，则n阶变系数非线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}x^{n-(j-i)}E^{(i)}[fw(v)+\varphi]^{(n-j)}=0 \tag{3.12}$$

可经变换(3.10)化为n阶Euler方程

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}y^{(n-j)}=0 \tag{3.13}$$

因而可再经自变量变换$t=\ln x$化为n阶常系数线性方程。

当$f(x)\equiv 1$，$\varphi(x)\equiv 0$，$n=3$时，方程(3.9)呈下形

$$\begin{aligned} &w'(v)v'''+w'''(v)v'^3+3w''(v)v'v''+(3E'/E+a_1)[w'(v)v'' \\ &\quad +w''(v)v'^2]+(3E''/E+2a_1E'/E+a_2)w'(v)v' \\ &\quad +(E'''/E+a_1E''/E+a_2E'/E+a_3)w(v)=0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

例3.1 方程

$$y'''\cos y-y'^3\cos y-3y'y''\sin y-\frac{3}{x}(y''\cos y-y'^2\sin y)$$

$$+\frac{3}{x^2}y'\cos y+x^3\sin y=0$$

是(3.4)当$G(x)=x$，$w(y)=\sin y$，$a_1=a_2=0$，$a_3=1$时的特例。根据定理3.1，令$\sin y=u$，$t=x^2/2$，得

$$d^3u/dt^3-u=0$$

其特征方程有根$r_1=1$，$r_{2,3}=-1/2\pm\sqrt{3}\,i/2$。因此所给方程的通积分为

$$\sin y=C_1\exp[x^2/2]+\exp[-x^2/4]\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right)$$

例3.2 方程

$$yy'''+3y'y''+(3\cot x-1)yy''+(3\cot x-1)y'^2-2(1+\cot x)yy'=0$$

是(3.14)型的。这里$w(y)=y^2$，$E(x)=\sin x$，$a_1=-1$，$a_2=1$，$a_3=-1$。根据定理3.3，变换

$$y^2\sin x=v$$

将所给方程化为三阶常系数线性方程

$$\frac{d^3v}{dx^3}-\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-v=0$$

它的特征方程有根$r_1=1$，$r_2=i$，$r_3=-i$。因此，所给方程的通积分为

$$y^2\sin x=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$$

我们指出，在[4]和[5]中所收入的三阶及三阶以上的非线性方程很少。根据本文定理3.1～定理3.4，给函数$G(x)$，$f(x)$，$\varphi(x)$，$w(y)$和$E(x)$等以各种特殊形式，便可得到很多新的可积的高阶非线性常微分方程。

参 考 文 献

[1] 李鸿祥, Z. F. Starc, 几类可积的变系数非线性常微分方程(Ⅰ)——一阶方程, 应用数学和力学, 11, 3 (1990), 247—252.

[2] Li Hong-xiang, Elementary quadratures of ordinary differential equations, *Amer. Math. Monthly*, 89, 3 (1982), 198—208; *Math. Rev.*, 83d: 34008.

[3] Li Hong-xiang and Fan Xing, Re-discussion on elementary quadratures of ordinary differential equations, 上海铁道学院学报, 8, 2 (1987), 1—15.

[4] Kamke, E., 《常微分方程手册》, 张鸿林译, 科学出版社 (1980).

[5] Murphy, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, D. Van Nostrand, New York (1960).

[6] 李鸿祥, 关于几类高阶变系数线性方程的求解, 应用数学学报, 6, 1 (1983), 29—33; *Math. Rev.*, 85h: 34003.

Several Classes of Integrable Nonlinear Ordinary Differential Equations (Ⅱ)——Higher-Order Equations

Li Hong-xiang

(*Shanghai Institute of Railway Technology, Shanghai*)

Abstract

In this paper, several classes of integrable nonlinear higher-order ordinary differential equations are given. It is pointed out that some known results of integrability or integrable equations are all special cases of them. These equations have a wide-ranging applied background in physics and mechanics.