应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

三边夹紧一边自由的矩形厚板的弯曲*

程昌钧　杨骁

（兰州大学，1989年8月21日收到）

摘　要

利用厚板的Reissner理论中的广义简支边概念[1]得到了三边夹紧一边自由受均布横向载荷作用的矩形厚板的精确解．研究和考察了板的厚度对弯曲的影响及薄板弯曲的Kirchhoff理论的适用范围．

一、引　言

不计横向剪切变形效应的经典Kirchhoff薄板弯曲理论在板的厚度h远小于板的其他特征尺寸的情况下能够给出足够精确的结果．但是在某些重要的情况下，根据Kirchhoff理论却不能指望得到符合物理实际的结果．自20世纪以来，许多人都研究了计及横向剪切效应的中厚板的弯曲并提出了各种理论．Reissner理论[2,3]是其中的一种，由于它具有一定的精度而又不太复杂因而广泛地用于解决中厚板的弯曲问题．

基于Reissner理论建立的边界值问题较之由Kirchhoff理论建立的边界值问题更为复杂．因为在边界值问题中包含了挠度W和横向剪力V_x，V_y，所以求解这种边值问题也更困难．为了求解方便，[5]和[4]中的作者引入了一个应力函数Φ，并把关于W，V_x和V_y的三个耦合的控制方程转化成关于W和Φ的两个非耦合的方程．即使这样，只有很少的文章给出了根据Reissner理论得到的厚板弯曲的精确解．在[5]的基础上，[1]中的作者成功地提出了厚板理论中的广义简支边概念（记为GSSB）．根据这种概念，原则上可以得到具有任意边界条件和任意横向载荷作用的矩形板弯曲的精确解．在本文中，我们利用[1]中建立的GSSB和迭加原理分析了三边夹紧一边自由并受一个均布横向载荷q作用的矩形厚板的弯曲并得到了问题的精确解．问题最后化为求解一个关于待定常数a_n，b_n，c_n和d_m，e_m（n，$m=1$，2，…）的无穷维线代数方程组．数值地研究了板的厚度h对于弯曲的影响并考察了Kirchhoff理论的适用范围．

二、问题的描述和求解

假设各向同性矩形板的长度、宽度和厚度分别为a，b，h，杨氏弹性模量和泊桑比为E，

* 叶开沅推荐．

ν. 并且假设板的 $x=0$ 及 $y=0$，$y=b$ 三个边是夹紧的而另一边 $x=a$ 是自由的（见图1指示）. 在这种情况下，控制方程给定为[5]

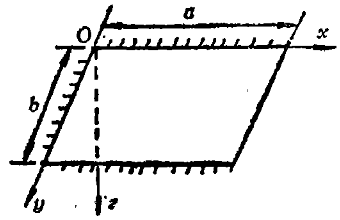

图1 矩形板

$$D\Delta^2 W=q-\frac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)}\Delta q,\quad \Delta^2\Phi-\frac{10}{h^2}\Phi=0 \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} W=\beta_x=\beta_y=0, & \text{当}x=0 \\ M_x=V_x=M_{xy}=0, & \text{当}x=a \\ W=\beta_y=\beta_x=0, & \text{当}y=0,\ b \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

其中，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，W和Φ是板的挠度和应力函数. V_x和V_y是横向剪力，给定为

$$\left.\begin{array}{l} V_x=-D\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta W-\dfrac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)}\dfrac{\partial q}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ V_y=-D\dfrac{\partial}{\partial y}\Delta W-\dfrac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)}\dfrac{\partial q}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

弯矩和扭矩为

$$\left.\begin{array}{l} M_x=-D\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\dfrac{h^2}{5}\dfrac{\partial V_x}{\partial x}-\dfrac{\nu h^2}{10(1-\nu)}q \\ M_y=-D\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)+\dfrac{h^2}{5}\dfrac{\partial V_y}{\partial y}-\dfrac{\nu h^2}{10(1-\nu)}q \\ M_{xy}=-(1-\nu)D\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\dfrac{h^2}{10}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y}+\dfrac{\partial V_y}{\partial x}\right) \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

同时转角为

$$\beta_x=-\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{h^2}{5(1-\nu)D}V_x,\quad \beta_y=-\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{h^2}{5(1-\nu)D}V_y \tag{2.5}$$

一般地说，求解边值问题(2.1)和(2.2)是很困难的. 但是利用GSSB概念[1]和迭加原理，我们可以得到问题的解.

众所周知，如果一个矩形厚板的某个边界，例如边界$x=0$，是简支的，那么沿着这条边界 $x=0$，相应的挠度、弯矩和转角应为零，即我们有三个边界条件 $W|_{x=0}=M_x|_{x=0}=\beta_y|_{x=0}=0$. 现在设边界$x=0$是一个广义简支边，这时仍有$M_x|_{x=0}=0$，但沿此边界的挠度$W$和转角$\beta_y$不为零；同时，与通常简支边一样，沿着此边界存在剪力V_x和扭矩M_{xy}. 根据这样的观点，显然，问题(2.1)、(2.2)的解可认为是下面四个问题的解的适当组合.

(1)问题(Ⅰ)的解 在这个问题中，假设矩形板受了一个均布载荷q的作用，并且四个边界都是简支的. 因此，边值问题给定为

$$D\Delta^2 W_1=q,\quad \Delta^2\Phi_1-\frac{10}{h^2}\Phi_1=0 \tag{2.6a}$$

$$\left.\begin{array}{ll} W_1=M_{1x}=\beta_{1y}=0, & \text{当}x=0,\ a \\ W_1=M_{1y}=\beta_{1x}=0, & \text{当}y=0,\ b \end{array}\right\} \tag{2.6b}$$

显然，(2.6)的解可以表成为

$$W_1=\frac{qa^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{Z_{0n}+\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\Big[\mathrm{sh}\Big(\alpha_n\frac{x}{b}\Big)+\mathrm{sh}\Big(\alpha_n\frac{a-x}{b}\Big)\Big]A_{1n}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\Big[\alpha_n\frac{x}{b}\Big(\mathrm{ch}\Big(\alpha_n\frac{x}{b}\Big)-\mathrm{ch}\Big(\alpha_n\frac{a-x}{b}\Big)\Big)$$

$$-\alpha_n\frac{a}{b}\,\frac{\mathrm{sh}(\alpha_n x/b)}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\Big(\mathrm{ch}\Big(\alpha_n\frac{a}{b}\Big)-1\Big)\Big]B_{1n}\Big\}\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.7}$$

$$\Phi_1=qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\Big[\mathrm{ch}\Big(\gamma_n\frac{x}{b}\Big)-\mathrm{ch}\Big(\gamma_n\frac{a-x}{b}\Big)\Big]C_{1n}\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.8}$$

沿着边界$x=0$的转角β_{1x}给定为

$$\beta_{1x}|_{x=0}=-\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\alpha_n\frac{a}{b}\Big[D_{1n}+\Big(1+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)b^2}\Big)E_{1n}$$

$$+\frac{h^2\alpha_n}{5(1-\nu)ab}F_{1n}\Big]\Big\}\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.9}$$

沿着边界$x=a$的扭矩M_{1xy}和剪切V_{1x}为

$$M_{1xy}|_{x=a}=qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(\alpha_n\frac{a}{b}\Big)^2\Big[(1-\nu)D_{1n}+\Big(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\Big)E_{1n}\Big]$$

$$+\frac{h^2}{10b^2}(\alpha_n^2+\gamma_n^2)F_{1n}\Big\}\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.10}$$

$$V_{1x}|_{x=a}=-qa\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\Big[2\Big(\alpha_n\frac{a}{b}\Big)^3\Big(\mathrm{ch}\Big(\alpha_n\frac{a}{b}\Big)-1\Big)\Big]B_{1n}$$

$$+\alpha_n\frac{a}{b}\Big(\mathrm{ch}\Big(\gamma_n\frac{a}{b}\Big)-1\Big)C_{1n}\Big\}\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.11}$$

并且我们还有

$$\beta_{1y}|_{y=0}=-\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{G_{1m}\lambda_m+\lambda_m\Big(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\Big)H_{1m}$$

$$-\frac{h^2\lambda_m}{5(1-\nu)a^2}I_{1m}\Big\}\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.12}$$

$$\beta_{1y}|_{y=b}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{G_{1m}\lambda_m+\lambda_m\Big(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\Big)H_{1m}$$

$$-\frac{h^2\lambda_m}{5(1-\nu)a^2}I_{1m}\Big\}\sin\lambda_m\frac{x}{a}=-\beta_{1y}|_{y=0} \tag{2.13}$$

在上述表达式中，我们已定义了下面的量：

$$\alpha_n=n\pi,\quad \gamma_n=\left(\alpha_n^2+\frac{10b^2}{h^2}\right)^{1/2},\quad \lambda_m=m\pi,\quad \beta_m=\left(\lambda_m^2+\frac{10b^2}{h^2}\right)^{1/2}$$

$$Q_n=\frac{2}{\alpha_n}(1-(-1)^n),\quad Z_{0n}=\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{Q_n}{\alpha_n^4},\quad A_{1n}=-\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{Q_n}{\alpha_n^4}$$

$$B_{1n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)b^2}\alpha_n^2\right)Z_{0n},\quad C_{1n}=\frac{(2-\nu)h^2\alpha_nQ_n}{10(1-\nu)a^2\gamma_n}$$

$$D_{1n}=\frac{1-\mathrm{ch}(\alpha_na/b)}{\mathrm{sh}(\alpha_na/b)}\left[A_{1n}+\frac{\alpha_n(a/b)}{\mathrm{sh}(\alpha_na/b)}B_{1n}\right]$$

$$E_{1n}=\frac{1-\mathrm{ch}(\alpha_na/b)}{\mathrm{sh}(\alpha_na/b)}B_{1n},\quad F_{1n}=\frac{1-\mathrm{ch}(\gamma_na/b)}{\mathrm{sh}(\gamma_na/b)}C_{1n}$$

$$G_{1m}=\frac{1-\mathrm{ch}(\lambda_mb/a)}{\mathrm{sh}(\lambda_mb/a)}\left[-\frac{Q_m}{\lambda_m^4}+\frac{bQ_m}{2\lambda_m^3\mathrm{sh}(\lambda_mb/a)a}\left(1-\frac{(2-\nu)h^2\lambda_m^2}{10(1-\nu)a^2}\right)\right]$$

$$H_{1m}=\frac{1-\mathrm{ch}(\lambda_mb/a)}{2\lambda_m^4\mathrm{sh}(\lambda_mb/a)}\left(1-\frac{(2-\nu)h^2\lambda_m^2}{10(1-\nu)a^2}\right)Q_m$$

$$I_{1m}=\frac{(2-\nu)h^2\lambda_m}{10(1-\nu)a^2\beta_m}\cdot\frac{\mathrm{ch}(\beta_mb/a)-1}{\mathrm{sh}(\beta_mb/a)}Q_m$$

（2） **问题(Ⅱ)的解** 在这个问题中，假设矩形板的边界$x=0$受了一个分布弯矩M_{2x}的作用，同时其他三边是简支边．因此，边界值问题给定为

$$D\Delta^2W_2=0,\quad \Delta^2\Phi_2-\frac{10}{h^2}\Phi_2=0 \tag{2.14a}$$

$$\left.\begin{array}{ll} W_2=\beta_{2y}=0,\quad M_{2x}=qa^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin\alpha_n\dfrac{y}{b}, & \text{当}x=0\\ W_2=M_{2x}=\beta_{2y}=0, & \text{当}x=a\\ W_2=M_{2y}=\beta_{2x}=0, & \text{当}y=0,\ b \end{array}\right\} \tag{2.14b}$$

其中，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$暂时是未知常数．它们和问题(Ⅲ)～(Ⅳ)中引入常数将由(2.2)中的一部份边界条件决定．满足(2.14)的解可给定为

$$W_2=\frac{qa^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{2a\alpha_n\mathrm{sh}(\alpha_na/b)}\left\{\frac{x}{a}\mathrm{ch}\left(\alpha_n\frac{a-x}{b}\right)-\frac{\mathrm{sh}(\alpha_nx/b)}{\mathrm{sh}(\alpha_na/b)}\right\}a_n\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.15}$$

$$\Phi_2=qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\mathrm{ch}(\gamma_n(a-x)/b)}{\mathrm{sh}(\gamma_na/b)}a_n\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.16}$$

沿着边界$x=0$的转角β_{2x}为

$$\beta_{2x}|_{x=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}^2(\alpha_n a/b)}-\frac{\mathrm{cth}(\alpha_n a/b)}{2\alpha_n}\left(\frac{b}{a}+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)ab}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{th}(\gamma_n a/b)}\cdot\frac{h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)ab\gamma_n}\right\}a_n\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.17}$$

沿着边界 $x=a$ 的扭矩M_{2xy}和剪力V_{2x}为

$$M_{2xy}|_{x=a}=qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\left\{\frac{1}{2}(1-\nu)\alpha_n\frac{a}{b}\,\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)+\frac{h^2\alpha_n}{10b^2\gamma_n}(\alpha_n^2+\gamma_n^2)\right\}a_n\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.18}$$

$$V_{2x}|_{x=a}=-qa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n a}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)b}\left(1-\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\right)a_n\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.19}$$

同时沿着 $y=0$，$y=b$ 两个边界的转角为

$$\beta_{2y}|_{y=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\alpha_n a}{\lambda_m(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)b}\left(\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2}\right)-\frac{2h^2\alpha_n}{5(1-\nu)ab\lambda_m}\cdot\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right\}a_n\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.20}$$

$$\beta_{2y}|_{y=b}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{2\alpha_n a}{\lambda_m(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)b}\left(\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2}\right)-\frac{2h^2\alpha_n}{5(1-\nu)ab\lambda_m}\cdot\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right\}a_n\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.21}$$

（3） **问题(Ⅲ)的解** 在这个问题中，假设矩形板的边界$x=a$是广义简支边，同时其余三边是简支的。因此，控制问题给定为

$$D\Delta^2W_3=0,\quad \Delta^3\Phi_3-\frac{10}{h^2}\Phi_3=0 \tag{2.22a}$$

$$\left.\begin{aligned}&W_3=M_{3y}=\beta_{3x}=0, &&\text{当}\ y=0,\ b\\&W_3=M_{3x}=\beta_{3y}=0, &&\text{当}\ x=0\\&W_3=\frac{qa^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\alpha_n\frac{y}{b},\quad M_{3x}=0,\\&\beta_{3y}=\frac{qa^3}{D}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\alpha_n\frac{y}{b}\end{aligned}\right\} \tag{2.22b}$$

其中，b_n和 c_n是待定常数．

满足(2.22)的解给定为

$$W_3=\frac{qa^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\left\{\mathrm{sh}\left(\alpha_n\frac{x}{b}\right)b_n+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{x}{a}\mathrm{ch}\left(\alpha_n\frac{x}{b}\right)-\frac{\mathrm{sh}(\alpha_n x/b)}{\mathrm{th}(\alpha_n a/b)}\right)c_n\right\}\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.23}$$

$$\Phi_3=-qa^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(1-\nu)a\,\mathrm{ch}(\gamma_n x/b)}{h^2\gamma_n\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}\left[a\alpha_n b_n+b\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)c_n\right]\cdot\cos\alpha_n\frac{y}{b}+\frac{5(1-\nu)ab}{h^2\gamma_0\mathrm{sh}(\gamma_0 a/b)}\mathrm{ch}\left(\gamma_0\frac{x}{b}\right)c_0\right\} \tag{2.24}$$

根据(2.23)和(2.24)，我们得到下面的量：

$$\beta_{3x}|_{x=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{a}{b}\left[\frac{\alpha_n}{\gamma_n\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}-\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\right]b_n\sin\alpha_n\frac{y}{b}$$
$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\nu)\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\left[\alpha_n\frac{a}{b}\,\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)-\left(1+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2(1-\nu)}\right)+\frac{\alpha_n}{(1-\nu)\gamma_n\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}\cdot\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right]c_n\right\}\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.25}$$

$$M_{3xy}|_{x=a}=qa^2\sum_{n=1}^{\infty}(1-\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2\alpha_n\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)\left[\frac{(\alpha_n^2+\gamma_n^2)}{2\gamma_n}-\alpha_n\right]\cdot b_n\cos\alpha_n\frac{y}{b}+\frac{qa^3}{2b}(1-\nu)\gamma_0\mathrm{cth}\left(\gamma_0\frac{a}{b}\right)c_0$$
$$+qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-\nu)^2\alpha_n^2a^2}{2\mathrm{sh}^2(\alpha_n a/b)b^2}-\frac{\alpha_n a^2\mathrm{cth}(\alpha_n a/b)}{2b^2}\left(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)+\frac{(1-\nu)a}{2b\gamma_n}(\alpha_n^2+\gamma_n^2)\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\cdot\mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)\right\}c_n\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.26}$$

$$V_{3x}|_{x=a}=qa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(1-\nu)a^3}{h^2b\gamma_n}\alpha_n^2\mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)b_n\sin\alpha_n\frac{y}{b}$$

$$+qa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)a^2}{b^2}\,\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)\left[-\alpha_n^2+\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\left(\alpha_n^2+\frac{5b^2}{h^2}\right)\right]c_n\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.27}$$

$$\beta_{3y}|_{y=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^m\frac{\alpha_n a}{\lambda_m b}\left(\frac{1}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right)b_n\sin\lambda_m\frac{x}{a}$$

$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{\lambda_m(1+(\gamma_0 a/\lambda_m b)^2)}c_0\sin\lambda_m\frac{x}{a}$$

$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^m\alpha_n^2}{\lambda_m(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)}\left(\frac{h^2}{5b^2}-\frac{(1-\nu)a^2}{(\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2)b^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2(-1)^m}{\lambda_m(1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2)}\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right\}c_n\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.28}$$

$$\beta_{3y}|_{y=b}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}a\alpha_n}{2b\lambda_m}\left(\frac{1}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right)$$

$$\cdot b_n\sin\lambda_m\frac{x}{a}+\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{\lambda_m(1+(\gamma_0 a/\lambda_m b)^2)}c_0\sin\lambda_m\frac{x}{a}$$

$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\left\{\frac{2\alpha_n^2}{\lambda_m(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)}\right.$$

$$\cdot\left(\frac{h^2}{5b^2}-\frac{(1-\nu)a^2}{(\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2)b^2}\right)-\frac{2}{\lambda_m(1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2)}$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right\}c_n\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.29}$$

（4） **问题(Ⅳ)的解** 在这个问题中，假设矩形板的边界$x=0$和$x=a$是简支边，同时其余两个边界作用着分布弯矩．因此，控制问题给定为

$$D\Delta^2W_4=0,\quad \Delta^2\Phi_4-\frac{10}{h^2}\Phi_4=0 \tag{2.30a}$$

$$\left.\begin{aligned}&W_4=M_{4x}=\beta_{4y}=0, && \text{当}x=0,\ a\\&W_4=\beta_{4x}=0,\quad M_{4y}=qa^2\sum_{m=1}^{\infty}d_m\sin\lambda_m\frac{x}{a}, && \text{当}y=0\\&W_4=\beta_{4x}=0,\quad M_{4y}=qa^2\sum_{m=1}^{\infty}e_m\sin\lambda_m\frac{x}{a}, && \text{当}y=b\end{aligned}\right\} \tag{2.30b}$$

其中，d_m和e_m是待定常数．问题(2.30)的解为

$$W_4=\frac{qa^4}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2a\lambda_m\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\left\{\left[y\,\mathrm{ch}\left(\lambda_m\frac{b-y}{a}\right)-b\frac{\mathrm{sh}(\lambda_m y/a)}{\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\right]d_m\right.$$

$$\left.+\left[b\,\mathrm{cth}\left(\lambda_m\frac{b}{a}\right)\mathrm{sh}\left(\lambda_m\frac{y}{a}\right)-y\,\mathrm{ch}\left(\lambda_m\frac{y}{a}\right)\right]e_m\right\}\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.31}$$

$$\Phi_4=qa^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{\beta_m\mathrm{sh}(\beta_m b/a)}\left[\mathrm{ch}\left(\beta_m\frac{b-y}{a}\right)d_m\right.$$

$$\left.-\mathrm{ch}\left(\beta_m\frac{y}{a}\right)e_m\right]\cos\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.32}$$

由(2.31)和(2.32)，我们得到下面的量，

$$\beta_{4x}|_{x=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\lambda_m}{\alpha_n}\left\{\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}\left[\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{b^2}{a^2(\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2)}\right]-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\cdot\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right\}d_m\sin\alpha_n\frac{y}{b}$$

$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}\lambda_m}{\alpha_n}\left\{\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}\right.$$

$$\cdot\left[\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}-\frac{b^2}{a^2(\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2)}\right]$$

$$\left.-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\cdot\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right\}e_m\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.33}$$

$$M_{4xy}|_{x=a}=qa^2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\lambda_m h^2}{10ab}\left[2-\left(\frac{\lambda_m}{\beta_m}\right)^2\right](d_m-e_m)$$

$$+qa^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m b}{a}\left\{\left[(1-\nu)\frac{\alpha_n^2-(\lambda_m b/a)^2}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}+\left(1-\nu+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5a^2}\right)\right]\right.$$

$$\cdot\left[\frac{(-1)^m}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}d_m+\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha_n^2+(\beta_m b/a)^2}e_m\right]$$

$$\left.+\frac{h^2}{5a^2}\cdot\frac{\lambda_m^2+\beta_m^2}{\alpha_n^2+(\beta_m b/a)^2}[(-1)^m d_m-(-1)^{m+n}e_m]\right\}\cos\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.34}$$

$$V_{4x}|_{x=a}=qa\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\lambda_m}{\alpha_n}\left[\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\right]$$

$$\cdot[(-1)^m d_m-(-1)^{m+n}e_m]\sin\alpha_n\frac{y}{b} \tag{2.35}$$

$$\beta_{4y}|_{y=0}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{b}{2a\,\mathrm{sh}^2(\lambda_m b/a)}-\frac{\mathrm{cth}(\lambda_m b/a)}{2\lambda_m}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\mathrm{cth}\left(\beta_m\frac{b}{a}\right)\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right]d_m$$

$$-\left[\frac{b\,\mathrm{cth}(\lambda_m b/a)}{2a\,\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}-\frac{1}{2\lambda_m\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta_m b/a)}\cdot\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right]e_m\right\}\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.36}$$

$$\beta_{4y}|_{y=b}=\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{b\,\mathrm{cth}(\lambda_m b/a)}{2a\,\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}-\frac{1}{2\lambda_m\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta_m b/a)}\cdot\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right\}d_m\sin\lambda_m\frac{x}{a}$$

$$+\frac{qa^3}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{-\frac{b}{2a\,\mathrm{sh}^2(\lambda_m b/a)}+\frac{1}{2\lambda_m\mathrm{th}(\lambda_m b/a)}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)-\frac{h^2\lambda_m^2\mathrm{cth}(\beta_m b/a)}{5(1-\nu)\beta_m a^2}\right\}e_m\sin\lambda_m\frac{x}{a} \tag{2.37}$$

现在，令

$$W=\sum_{i=1}^{4}W_i,\quad \Phi=\sum_{i=1}^{4}\Phi_i \tag{2.38}$$

容易看到，由(2.38)给定的W和Φ满足方程(2.1)和(2.2)中的下面边界条件

$W=\beta_y=0$,　　当$x=0$

$M_x=0$,　　当$x=a$

$W=\beta_x=0$,　　当$y=0$，b

因此，W和Φ是问题(2.1)和(2.2)的解当且仅当它们满足(2.2)中其余的边界条件，即

$$\left.\begin{array}{ll}\beta_x=0, & \text{当}x=0\\ V_x=M_{xy}=0, & \text{当}x=a\\ \beta_y=0, & \text{当}y=0,\ b\end{array}\right\} \tag{2.39}$$

将W和Φ代入(2.39)并注意到(2.3)～(2.5)，我们得到如下方程:

$$\left[\frac{1}{2\mathrm{sh}^2(\alpha_n a/b)}-\frac{\mathrm{cth}(\alpha_n a/b)}{2\alpha_n}\left(\frac{b}{a}+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)ab}\right)+\frac{h^2\alpha_n^2\mathrm{cth}(\gamma_n a/b)}{5(1-\nu)ab\gamma_n}\right]a_n$$

$$+\frac{a\alpha_n}{b\,\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}\left(\frac{\alpha_n}{\gamma_n}-1\right)b_n$$

$$+(1-\nu)\left[\frac{1}{2\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)-\left(1+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)b^2}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_n}{\gamma_n\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}\left(\frac{1}{1-\nu}+\frac{h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)b^2}\right)\right]c_n$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\lambda_m}{\alpha_n}\left[\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}\left(\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}-\frac{b^2}{a^2(\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\cdot\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right]d_m+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\alpha_n}\lambda_m\left[\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}-\frac{b^2}{a^2(\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2)}\right)-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\cdot\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}\right]e_m$$

$$=\alpha_n\frac{a}{b}\left[D_{1n}+\left(1+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)b^2}\right)E_{1n}\right]+\frac{h^2\alpha_n}{5(1-\nu)ab}F_{1n}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad(2.40)$$

$$\frac{1-\nu}{2b}a\gamma_0\operatorname{cth}\left(\gamma_0\frac{a}{b}\right)c_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}h^2}{5ab}\left[\lambda_m-\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\lambda_m}{\beta_m}\right)^2\right)\right]d_m$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^2}{5ab}\left[\lambda_m-\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\lambda_m}{\beta_m}\right)^2\right)\right]e_m=0\qquad(2.41)$$

$$\left\{\frac{1}{2\operatorname{sh}(\alpha_n a/b)}\left[(1-\nu)\alpha_n\frac{a}{b}\operatorname{cth}(\alpha_n a/b)-\left(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{h^2\alpha_n(\alpha_n^2+\gamma_n^2)}{10b^2\gamma_n\operatorname{sh}(\gamma_n a/b)}\right\}a_n$$

$$+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{\alpha_n}{2\gamma_n}\operatorname{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)(\alpha_n^2+\gamma_n^2)-\alpha_n^2\operatorname{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)\right]b_n$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left\{\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)^2\left[\frac{1-\nu}{\operatorname{sh}^2(\alpha_n a/b)}-\frac{b}{a\alpha_n}\operatorname{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)\left(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a}{b\gamma_n}\operatorname{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)(\alpha_n^2+\gamma_n^2)\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right\}c_n$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{\frac{1}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}\left[(1-\nu)\frac{(\lambda_m b/a)^2-\alpha_n^2}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}-\left(1-\nu+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5a^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{h^2(\lambda_m^2+\beta_m^2)}{5a^2(\alpha_n^2+(\beta_m b/a)^2)}\right\}\frac{b}{a}\lambda_m d_m$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\left\{\frac{1-\nu}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}\left[\frac{\alpha_n^2-(\lambda_m b/a)^2}{\alpha_n^2+(\lambda_m b/a)^2}+\left(1+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{h^2(\lambda_m^2+\beta_m^2)}{5a^2(\alpha_n^2+(\beta_m b/a)^2)}\right\}\frac{b}{a}\lambda_m e_m$$

$$=-\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)^2\left[(1-\nu)D_{1n}+\left(1-\nu+\frac{2h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right]E_{1n}-\frac{h^2}{10b^2}(\alpha_n^2+\gamma_n^2)F_{1n}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad(2.42)$$

$$
\frac{a}{b}\alpha_n\left[\frac{\alpha_n}{\gamma_n \mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}-\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}\right]a_n
$$

$$
+5(1-\nu)\frac{a^3\alpha_n^2}{h^2 b\gamma_n}\ \mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)b_n
$$

$$
+(1-\nu)\alpha_n\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[-\alpha_n \,\mathrm{cth}\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{\gamma_n}\mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{a}{b}\right)\left(\alpha_n^2+\frac{5b^2}{h^2}\right)\right]c_n
$$

$$
+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m\lambda_m}{\alpha_n}\left[\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\right]d_m
$$

$$
+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+n+1}}{\alpha_n}\lambda_m\left[\frac{1}{1+(\lambda_m b/\alpha_n a)^2}-\frac{1}{1+(\beta_m b/\alpha_n a)^2}\right]e_m
$$

$$
=2\left(\alpha_n\frac{a}{b}\right)^3\frac{\mathrm{ch}(\alpha_n a/b)-1}{\mathrm{sh}(\alpha_n a/b)}B_{1n}+\alpha_n\frac{a}{b}\frac{\mathrm{ch}(\gamma_n a/b)-1}{\mathrm{sh}(\gamma_n a/b)}C_{1n}
$$

$$
(n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.43}
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{\lambda_m}\left\{\frac{a}{b(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)}\left[\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}-\frac{1}{\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2}\right]\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right\}a_n
$$

$$
+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m\alpha_n a}{\lambda_m b}\left[\frac{1}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right]b_n
$$

$$
+\frac{2(-1)^{m+1}}{\lambda_m(1+(\gamma_0 a/\lambda_m b)^2)}c_0
$$

$$
+\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^m\left\{\frac{\alpha_n^2}{\lambda_m(1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2)}\left[\frac{h^2}{5b^2}+\frac{(1-\nu)a^2}{b^2(\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2)}\right]\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{\lambda_m(1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2)}\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right\}c_n
$$

$$
+\left[\frac{b}{2\mathrm{sh}^2(\lambda_m b/a)a}-\frac{\mathrm{cth}(\lambda_m b/a)}{2\lambda_m}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right.
$$

$$
\left.+\mathrm{cth}\left(\beta_m\frac{b}{a}\right)\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right]d_m
$$

$$
+\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\left[-\frac{b}{a}\mathrm{cth}\left(\lambda_m\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{\lambda_m}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right]\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta_m b/a)}\cdot\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right\}e_m
$$

$$
=\lambda_m\left[G_{1m}+\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)H_{1m}\right]-\frac{h^2\lambda_m}{5(1-\nu)a^2}I_{1m}
$$

$$
(m=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.44}
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\lambda_m}\alpha_n\left\{\frac{1}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}\frac{a}{b}\left(\frac{h^2}{5(1-\nu)a^2}-\frac{1}{\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{h^2}{5(1-\nu)ab}\cdot\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right\}a_n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{m+n}\frac{\alpha_n a}{\lambda_m b}\left[\frac{1}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\right]b_n$$

$$+\frac{2(-1)^{m+1}}{\lambda_m(1+(\gamma_0 a/\lambda_m b)^2)}c_0$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+n}}{\lambda_m}\left\{\frac{\alpha_n^2}{1+(\alpha_n a/\lambda_m b)^2}\left[\frac{h^2}{5b^2}-\frac{(1-\nu)a^2}{(\lambda_m^2+(\alpha_n a/b)^2)b^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+(\gamma_n a/\lambda_m b)^2}\left(1+\frac{h^2\alpha_n^2}{5b^2}\right)\right\}c_n$$

$$+\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}(\lambda_m b/a)}\left[\frac{b}{a}\mathrm{cth}\left(\lambda_m\frac{b}{a}\right)-\frac{1}{\lambda_m}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{sh}(\beta_m b/a)}\cdot\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\right\}d_m+\left[\frac{-b}{2a\mathrm{sh}^2(\lambda_m b/a)}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{cth}(\lambda_m b/a)}{2\lambda_m}\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)-\frac{h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2\beta_m}\mathrm{cth}\left(\beta_m\frac{b}{a}\right)\right]e_m$$

$$=-\lambda_m\left[G_{1m}+\left(1+\frac{2h^2\lambda_m^2}{5(1-\nu)a^2}\right)H_{1m}\right]+\frac{h^2\lambda_m}{5(1-\nu)a^2}I_{1m}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.45}$$

容易看到，(2.40)～(2.45)是关于无穷多个常数a_n，b_n，c_n，d_m，e_m(n，$m=1$，2，…)和c_0的一个无穷维线代数方程组．求解这个方程组，我们可以得到常数a_n,b_n，c_n，d_m和e_m，因此得到问题(2.1)和(2.2)的解．

三、数值结果和分析

在实际求解(2.40)～(2.45)的过程中，我们总是只取有限项，并得到问题(2.1)和(2.2)的具有足够精度的近似解．为此，我们必须研究对方程组(2.40)～(2.45)应取多少项才能得到满意的结果．对于$\nu=1/3$的方形板，我们对若干m，n的值在表1中列出了相应的结果．由这个表看到，当取30项和40项时相应结果之间是很小的．对于W和$M_x(M_y)$的最大相对误差分别低于0.4%和4%．因此，取40项已足够了，即$m=n=40$．

下面，我们讨论矩形板的厚度h对弯曲的影响．我们考虑如下三种板：

(1) 设$a/b=1$且$\nu=1/3$；

(2) 设$a/b=0.5$且$\nu=1/3$；

(3) 设$a/b=2$且$\nu=1/3$．

对于这三种板，挠度和弯矩的最大值随比值h/a或h/b的变化示于图2～7中．我们看到在每个图的$h/a=0$(或$h/b=0$)处都有一条水平切线．这条切线正是由薄板的Kirchhoff理论得到的

经典结果.由这些图，我们还看到本文结果与由Kirchhoff理论得到的结果之间的差在h/a(或h/b)$\leqslant$0.05时不超过5%. 在这种情况下，经典结果是足够精确的. 然而，随着比值h/a(或h/b)的增加，曲线逐渐偏离由Kirchhoff理论得到的结果. 这意味着，Kirchhoff不适用于比值h/a(或h/b)$\gg$0.05的情况，因此，必须计及横向剪切变形对弯曲的影响.

在表2～4中，我们还列出了$a/b=0.5$，1，2三种情况下，$W(x, b/2)$，$M_x(0, y)$，$M_y(x, 0)$随x/a和y/b的变化.在表3和4中，我们只给出了弯矩在[0，$a/2$]上的值，这是因为板的弯曲关于$y=b/2$是对称的.

致谢 我们感谢兰州大学计算中心在数值计算中对我们提供的帮助.

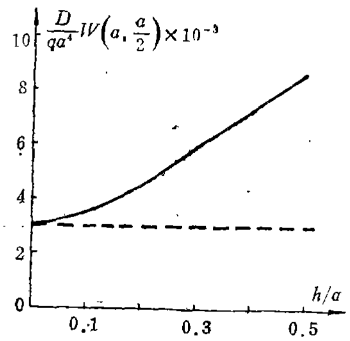

图2 W随h/a的变化(对$a=b$)

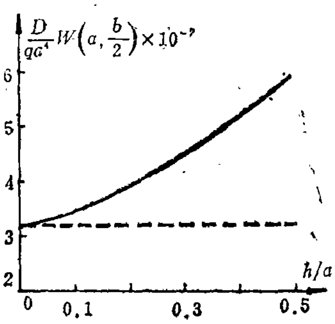

图3 W随h/a的变化(对$a/b=1/2$)

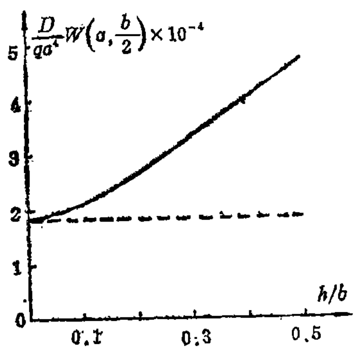

图4 W随h/b的变化(对$a/b=2$)

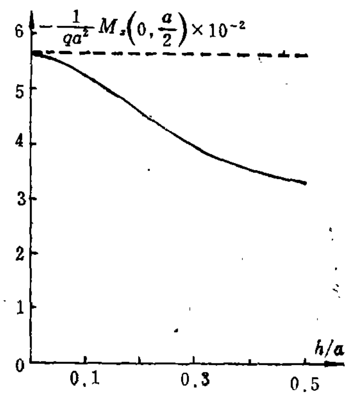

图5 M_x随h/a的变化(对$a=b$)

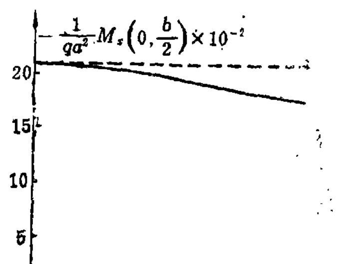

图6 M_x随h/a的变化(对$a/b=1/2$)

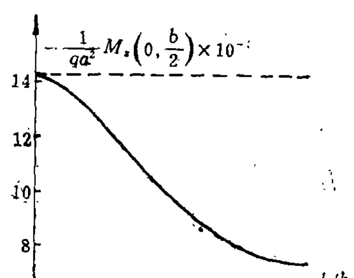

图7 M_x随h/a的变化(对$a/b=2$)

表1 **级数的收敛性**（当$a/b=1$和$\nu=1/3$）

$\frac{h}{a}$		项数 10	项数 20	项数 30	项数 40
0.02	$\frac{D}{qa^4}W(a,\frac{a}{2})$	0.30643×10^{-2}	0.30510×10^{-2}	0.30473×10^{-2}	0.30463×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^4}W(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.19008×10^{-2}	0.19012×10^{-2}	0.19013×10^{-2}	0.19013×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(0,\frac{a}{2})$	-0.55946×10^{-1}	-0.56069×10^{-1}	-0.56055×10^{-1}	-0.56060×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.17453×10^{-1}	0.17501×10^{-1}	0.17515×10^{-1}	0.17518×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_y(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.31635×10^{-1}	0.31593×10^{-1}	0.31601×10^{-1}	0.31603×10^{-1}
0.05	$\frac{D}{qa^4}W(a,\frac{a}{2})$	0.31969×10^{-2}	0.31729×10^{-2}	0.31636×10^{-2}	0.31600×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^4}W(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.19621×10^{-2}	0.19610×10^{-2}	0.19606×10^{-2}	0.19603×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(0,\frac{a}{2})$	-0.55095×10^{-1}	-0.55174×10^{-1}	-0.55196×10^{-1}	-0.55180×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.17334×10^{-1}	0.17425×10^{-1}	0.17449×10^{-1}	0.17465×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_y(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.31371×10^{-1}	0.31709×10^{-1}	0.31685×10^{-1}	0.31704×10^{-1}
0.20	$\frac{D}{qa^4}W(a,\frac{a}{2})$	0.45961×10^{-2}	0.45519×10^{-2}	0.45390×10^{-2}	0.45345×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^4}W(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.28673×10^{-2}	0.28573×10^{-2}	0.28546×10^{-2}	0.28535×10^{-2}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(0,\frac{a}{2})$	0.46161×10^{-1}	-0.45360×10^{-1}	-0.45765×10^{-1}	-0.45462×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.16947×10^{-1}	0.17211×10^{-1}	0.17127×10^{-1}	0.17207×10^{-1}
	$\frac{D}{qa^2}M_y(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$	0.31477×10^{-1}	0.32287×10^{-1}	0.31748×10^{-1}	0.32108×10^{-1}

参 考 文 献

[1] Cheng Chang-jun (程昌钧) and Duan Da-ming (段大鸣), Concept of generalized simply-supported boundary in theory of thick plates, *KEXUE TONGBAO*, **33**, 6 (1988), 472—477.

[2] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **12** (1945), 69—86.

[3] Reissner, E., On bending of elastic plates, *Quart. Appl. Math.*, **5** (1947), 55—68.

[4] Salerno, V. and M. A. Goldberg, Effect of shear deformation on the bending of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, **27** (1960), 54.

[5] 程昌钧、尚新春，计及横向剪切变形效应的矩形板的弯曲，兰州大学学报（自然科学报），**18**，4 (1982)，16—29.

表2 **沿直线$y=b/2$的挠度$W=qa^4\theta/D$**

a/b	h/a \ θ_1 \ x/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	0.01	0.0	0.6562×10^{-3}	0.1553×10^{-2}	0.2154×10^{-2}	0.2543×10^{-2}	0.3023×10^{-2}
	0.05	0.0	0.6971×10^{-3}	0.1614×10^{-2}	0.2230×10^{-2}	0.2641×10^{-2}	0.3164×10^{-2}
	0.10	0.0	0.8176×10^{-3}	0.1792×10^{-2}	0.2448×10^{-2}	0.2899×10^{-2}	0.3487×10^{-2}
	0.30	0.0	0.1820×10^{-2}	0.3273×10^{-2}	0.4235×10^{-2}	0.4959×10^{-2}	0.5921×10^{-2}
	0.50	0.0	0.3184×10^{-2}	0.5193×10^{-2}	0.6486×10^{-2}	0.7453×10^{-2}	0.8585×10^{-2}
	0.01	0.0	0.3210×10^{-2}	0.9877×10^{-2}	0.1735×10^{-1}	0.2472×10^{-1}	0.3232×10^{-1}
	0.05	0.0	0.3320×10^{-2}	0.1009×10^{-1}	0.1769×10^{-1}	0.2522×10^{-1}	0.3304×10^{-1}
0.5	0.10	0.0	0.3637×10^{-2}	0.1066×10^{-1}	0.1850×10^{-1}	0.2630×10^{-1}	0.3448×10^{-1}
	0.30	0.0	0.6560×10^{-2}	0.1573×10^{-1}	0.2535×10^{-1}	0.3483×10^{-1}	0.4479×10^{-1}
	0.50	0.0	0.1138×10^{-1}	0.2389×10^{-1}	0.3598×10^{-1}	0.4744×10^{-1}	0.5919×10^{-1}
	0.005	0.0	0.9835×10^{-4}	0.1532×10^{-3}	0.1619×10^{-3}	0.1625×10^{-3}	0.1875×10^{-3}
	0.025	0.0	0.1012×10^{-3}	0.1559×10^{-3}	0.1650×10^{-3}	0.1665×10^{-3}	0.1956×10^{-3}
2	0.05	0.0	0.1094×10^{-3}	0.1641×10^{-3}	0.1731×10^{-3}	0.1778×10^{-3}	0.2133×10^{-3}
	0.15	0.0	0.1798×10^{-3}	0.2409×10^{-3}	0.2550×10^{-3}	0.2753×10^{-3}	0.3369×10^{-3}
	0.25	0.0	0.2781×10^{-3}	0.3538×10^{-3}	0.3769×10^{-3}	0.4104×10^{-3}	0.4752×10^{-3}

表3 **沿着边界$y=0$的弯矩$M_y=-qa^2\theta_2$**

$\frac{a}{b}$	h/a \ θ_2 \ x/a	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	0.01	0.0	0.2518×10^{-1}	0.5515×10^{-1}	0.7125×10^{-1}	0.8032×10^{-1}	0.0
	0.05	0.0	0.2512×10^{-1}	0.5441×10^{-1}	0.7065×10^{-1}	0.8048×10^{-1}	0.0
1	0.10	0.0	0.2532×10^{-1}	0.5255×10^{-1}	0.6875×10^{-1}	0.7789×10^{-1}	0.0
	0.30	0.0	0.2602×10^{-1}	0.4185×10^{-1}	0.5484×10^{-1}	0.6485×10^{-1}	0.0
	0.50	0.0	0.3010×10^{-1}	0.3575×10^{-1}	0.4609×10^{-1}	0.5965×10^{-1}	0.0
	0.01	0.0	0.2864×10^{-1}	0.9407×10^{-1}	0.1605	0.2262	0.0
	0.05	0.0	0.2964×10^{-1}	0.9435×10^{-1}	0.1619	0.2314	0.0
0.5	0.10	0.0	0.3210×10^{-1}	0.9399×10^{-1}	0.1613	0.2268	0.0
	0.30	0.0	0.4968×10^{-1}	0.9560×10^{-1}	0.1507	0.2002	0.0
	0.50	0.0	0.6791×10^{-1}	0.9979×10^{-1}	0.1423	0.1820	0.0
	0.005	0.0	0.1408×10^{-1}	0.1993×10^{-1}	0.2037×10^{-1}	0.1972×10^{-1}	0.0
	0.025	0.0	0.1399×10^{-1}	0.1991×10^{-1}	0.2039×10^{-1}	0.1984×10^{-1}	0.0
2	0.05	0.0	0.1369×10^{-1}	0.1970×10^{-1}	0.2023×10^{-1}	0.1960×10^{-1}	0.0
	0.15	0.0	0.1183×10^{-1}	0.1762×10^{-1}	0.1856×10^{-1}	0.1723×10^{-1}	0.0
	0.25	0.0	0.1013×10^{-1}	0.1439×10^{-1}	0.1564×10^{-1}	0.1549×10^{-1}	0.0

表4 沿着边界$x=0$的弯矩$M_x=-qa^2\theta_3$

$\frac{a}{b}$	h/a \ θ_3 \ y/b	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	0.01	0.0	0.7917×10^{-2}	0.2551×10^{-1}	0.4173×10^{-1}	0.5247×10^{-1}	0.5620×10^{-1}
	0.05	0.0	0.9098×10^{-2}	0.2546×10^{-1}	0.4108×10^{-1}	0.5153×10^{-1}	0.5520×10^{-1}
	0.10	0.0	0.1167×10^{-1}	0.2556×10^{-1}	0.3962×10^{-1}	0.4910×10^{-1}	0.5258×10^{-1}
	0.30	0.0	0.2180×10^{-1}	0.2592×10^{-1}	0.3327×10^{-1}	0.3717×10^{-1}	0.3958×10^{-1}
	0.50	0.0	0.3647×10^{-1}	0.2966×10^{-1}	0.3243×10^{-1}	0.3119×10^{-1}	0.3339×10^{-1}
0.5	0.01	0.0	0.3010×10^{-1}	0.9653×10^{-1}	0.1569	0.1963	0.2098
	0.05	0.0	0.3150×10^{-1}	0.9680×10^{-1}	0.1568	0.1961	0.2096
	0.10	0.0	0.3548×10^{-1}	0.9755×10^{-1}	0.1562	0.1948	0.2083
	0.30	0.0	0.5802×10^{-1}	0.1032	0.1509	0.1819	0.1941
	0.50	0.0	0.7864×10^{-1}	0.1066	0.1431	0.1645	0.1752
2	0.005	0.0	0.1987×10^{-2}	0.6429×10^{-2}	0.1054×10^{-1}	0.1326×10^{-1}	0.1420×10^{-1}
	0.025	0.0	0.2236×10^{-2}	0.6354×10^{-2}	0.1030×10^{-1}	0.1295×10^{-1}	0.1388×10^{-1}
	0.05	0.0	0.2797×10^{-2}	0.6227×10^{-2}	0.9734×10^{-2}	0.1212×10^{-1}	0.1299×10^{-1}
	0.15	0.0	0.5165×10^{-2}	0.5895×10^{-2}	0.7429×10^{-2}	0.8275×10^{-2}	0.8801×10^{-2}
	0.25	0.0	0.8967×10^{-2}	0.7087×10^{-2}	0.7409×10^{-2}	0.6990×10^{-2}	0.7414×10^{-2}

The Bending of a Thick Rectangular Plate with Three Clamped Edges and One Free Edge

Cheng Chang-jun Yang Xiao

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

The exact solution of the bending of a thick rectangular plate with three clamped edges and one free edge under a uniform transverse load is obtained by means of the concept of generalized simply-supported boundary[1] in Reissner's theory of thick plates. The effect of the thickness h of a plate on the bending is studied and the applicable range of Kirchhoff's theory for bending of thin plates is considered.