

嵌入弹性半空间的弹性迴转轴的扭转*

云天铨

(华南理工大学力学系, 1989年11月10日收到)

摘 要

本文用线载荷积分方程法(LLIEM)研究嵌入弹性半空间的弹性迴转轴的扭转问题。将“点环力偶(PRC)”和“半空间点环力偶(PRCHS)”分别分布于迴转轴内和外的轴线上, 就能将本问题归结为一维的Fredholm第一种积分方程组。直接用离散法求解时, 会发现有时解是不稳定的, 也就是病态情形。本文采用以带小参数的Fredholm第二种积分方程代替病态的Fredholm第一种积分方程的方法可以得到稳定的解, 此法比Tikhonov正规化法简单, 易于在计算机上运行。文中给出圆锥、圆柱、圆锥-圆柱、抛物线轴等数值例子。

一、概 述

作者在文[1]中曾研究过嵌入弹性半空间的刚性变直径圆轴的扭转问题。对于弹性轴, Karasudi等人在文[2]中研究过嵌入分层的弹性半空间的长圆柱弹性杆的扭转。对于嵌入弹性半空间的弹性迴转轴的扭转, 则还未见讨论过。本文就是研究这一问题, 用的是与[1]相同的线载荷积分方程法(LLIEM)。对于弹性轴的位移和应力, 采用虚的基本载荷“点环力偶(PRC)”沿弹性轴所占的区域之外的轴线上分布来计算; 对于半空间的位移和应力, 采用虚的基本载荷“半空间点环力偶(PRCHS)”沿半空间之外的, 也就是迴转轴所占区域之内的轴线上的分布来计算。根据迴转轴和半空间粘连在一起的边界条件, 就可将问题归结为积分方程。但是, 只是上述虚载荷的分布, 得到的是齐次的积分方程, 其数值解时往往只有零解。为得到便于求数值解的非齐次积分方程, 参照流体力学中的源汇分布法迭加“均流”一项的方法, 除上述虚的基本载荷外, 还加上一个强度为 Cs^3 (C 为常数)的作用于 $z=s$ ($s \rightarrow -\infty$)的单个的点环力偶。在上述虚载荷作用下, 由轴和半空间接触面的边界条件, 便可得到两个一维的Fredholm第一种积分方程。解此积分方程组求出未知的虚载荷的分布函数便能求得迴转轴和半空间的任一点的位移和应力。

在用数值法求解这组Fredholm第一种积分方程, 记为 $Ax=y$, 时, 会出现解不稳定的情形。也就是微小扰动 δy 作用于方程右端时, 其解与原解 x 差别很大。也就是说 $Ax=y$ 是病态的。

* 国家自然科学基金资助项目。

处理病态的第一类方程有许多方法^[3]，其中备受关注的的是由美国 Phillips 和苏联 Tikhonov 分别在 1963 年独立提出的称之为正规化法 (Method of Regularization)。此法将求解病态的 $Ax=y$ 的解问题改为解下述优化问题

$$\min \|Ax - \bar{y}\|^2 + \alpha \|Lx\|^2 \quad (1.1)$$

其中 $\bar{y} = y + \delta y$ ， L 是某些线性算子，常取 $Lx = x$ ，或 $Lx = x'$ 或 x'' 等。 α 为一参数， $\|\cdot\|$ 为 L_2 范数。后一项 $\alpha \|Lx\|^2$ 起稳定的作用，这些信息是原方程 $Ax=y$ 没有的附加的某些光滑性的信息。关于正规化法已有许多的介绍和讨论^[4~6]。

正规化法虽然备受关注，但它至少有一缺点，就是不方便实际应用，或不便在计算机上运算。以最简单的取 $Lx=x$ 而言，据 [3, p.183]，求解 (1.1) 等于求解下式的 x_0 。

$$(A^T A + \alpha I)x_0 = A^T \bar{y} \quad (1.2)$$

而 $A^T A$ 的计算是非常之繁的。为此，本文采用带小参数 ε 的 Fredholm 第二种积分方程来代替病态的 $Ax=y$ ，即用

$$\varepsilon x(z) + \int_0^L A(z, c)x(c)dc = y(z) \quad (1.3)$$

来代替。(1.3) 式的离散数值解为求解

$$(A + \varepsilon I)x_0 = y \quad (1.4)$$

免去求叠核重积分的繁长计算。用此法可以获得稳定的解。这是因为第二种积分方程的 $(A + \varepsilon I)^{-1}$ 有界且处处可定^[7]。

本文的第二节，讨论积分方程的建立；第三节讨论数值解法；第四节讨论病态问题的处理；最后讨论数值例子的一些结果，其中包括圆柱、圆锥、圆锥-圆柱、抛物线轴等。

二、积分方程的建立

图 1 表示剪切模量为 G_S ，母线为 $p=p(z)$ 的受扭的弹性迴转轴嵌入弹性模量为 G_H 的弹性半空间中。这个问题的边界条件由迴转轴和半空间在接触面处粘连在一起的假定可得：

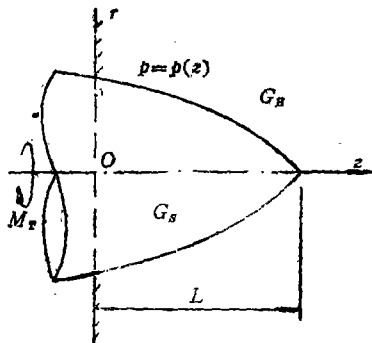


图 1

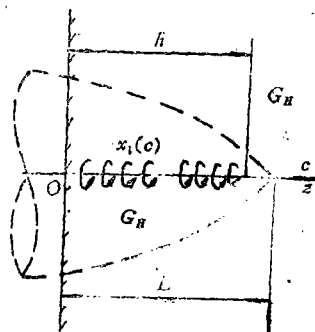


图 2

$$1. \quad \tau_{\theta z}(r, 0) = 0, \quad r > p(0) \quad (2.1)$$

$$2. \quad v_H(p, z) = v_S(p, z), \quad 0 \leq z \leq L \quad (2.2)$$

$$3. \quad \tau_{\theta nH}(p, z) = \tau_{\theta nS}(p, z), \quad 0 \leq z \leq L \quad (2.3)$$

式中下标 H 和 S 分别表示量属于半空间和迴转轴，条件 (2.2) 和 (2.3) 分别代表半空间和迴转

轴的接触面上任一点 (p, z) 的位移和应力的连续条件, n 为迴转轴的边界的外法向, L 为轴的嵌入长度。

为了计算半空间 H 任一点的 $N(r, z)$ 的位移 $v_H(r, z)$ 和应力 $\tau_{r\theta}(r, z)$, $\tau_{\theta z}(r, z)$, 将集度为未知函数 $x_1(c)$ 的“半空间点环力偶(point ring couple of half space)PRCHS”沿 $c(=z)$ 轴分布在 $[0, h]$ ($h < L$, 否则在半空间的轴线上出现奇异性与实际的应力场不符) 如图2示。在这些PRCHS的作用下, 位于轴占领区外的半空间 H 的任一点 $N(r, z)$ 的位移和应力, 由[1], 为:

$$\left. \begin{aligned} v_H(r, z) &= r(8\pi G_H)^{-1} \int_0^h (R_{1r}^{-3} + R_{2r}^{-3}) x_1(c) dc \\ \tau_{r\theta H}(r, z) &= -3r^2(8\pi)^{-1} \int_0^h (R_{1r}^{-5} + R_{2r}^{-5}) x_1(c) dc \\ \tau_{\theta z H}(r, z) &= -3r(8\pi)^{-1} \int_0^h [(z-c)R_{1r}^{-5} + (z+c)R_{2r}^{-5}] x_1(c) dc \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中 $R_{1r} = [r^2 + (z-c)^2]^{1/2}$, $R_{2r} = [r^2 + (z+c)^2]^{1/2}$ (2.5)

为了计算迴转轴 S 上任一点 $N(r, z)$ 的位移 $v_S(r, z)$ 和应力 $\tau_{r\theta}(r, z)$, $\tau_{\theta z}(r, z)$, 将集度为未知函数 $x_2(c)$ 的“点环力偶(point ring couple)PRC”分布在 $c(=+z)$ 轴 $(0, -\infty)$ 上, 并在 $c=s(s \rightarrow -\infty)$ 处作用强度为 Cs^3 (C 为常数) 的集中的单个的点环力偶如图3所示。

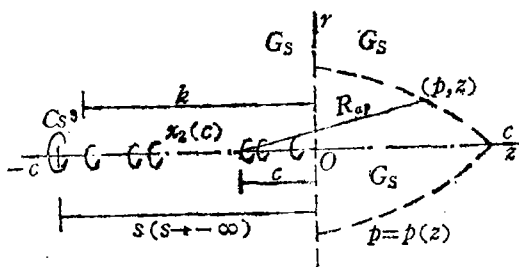


图 3

所谓“点环力偶” (即[8]的“点圆力偶”, [9]的“圆扭矩”) 和半空间点环力偶是类似地定义的。它们的区别是前者PRC是作用于全空间中并由 Kelvin 集中力公式经积分运算求得, 后者PRCHS作用于半空间中并由 Mindlin 水平集中力公式经积分运算求得。PRC 作用于全空间中 $z=c$ 的基本解已在[8]中求得, 并在[9]中应用于解迴转轴的扭转问题。于是在图3所示的虚载荷PRC的作用下全空间 G_s 中任一点 $N(r, z)$ 的位移和应力, 由[9], 为:

$$\left. \begin{aligned} v_S(r, z) &= r(8\pi G_S)^{-1} \int_0^k R_{ar}^{-3} x_2(c) dc + r(8\pi G_S)^{-1} C \\ \tau_{r\theta S}(r, z) &= -3r^2(8\pi)^{-1} \int_0^k R_{ar}^{-5} x_2(c) dc \\ \tau_{\theta z S}(r, z) &= -3r(8\pi)^{-1} \int_0^k (z+c) R_{ar}^{-5} x_2(c) dc \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中, $R_{ar} = [r^2 + (z+c)^2]^{1/2}$; k 为一有限常数以代替 ∞ 。(2.6)式用来计算迴转轴占领的区城内的点包括边界点的位移和应力, 它的适用范围是: $0 \leq z \leq L$, $r \leq p(z)$ 。

将(2.4)式和(2.6)式代入边界条件(2.2)式和(2.3)式, 得:

$$\frac{1}{G_H} \int_0^h (R_{1p}^{-3} + R_{2p}^{-3}) x_1(c) dc - \frac{1}{G_S} \int_0^k R_{ap}^{-3} x_2(c) dc = C \quad (2.7)$$

$$\int_0^h \{ [p - p'(z-c)] R_{1p}^{-5} + [p - p'(z+c)] R_{2p}^{-5} \} x_1(c) dc - \int_0^k \{ [p - p'(z+c)] R_{ap}^{-5} \} x_2(c) dc = 0 \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1p} &= [p^2 + (z-c)^2]^{1/2} \\ R_{2p} &= [p^2 + (z+c)^2]^{1/2} = R_{ap} \\ p' &= dp(z)/dz \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中应用了关系式

$$\begin{aligned} \tau_{\theta n}(p, z) &= \tau_{r\theta}(p, z) \cos\phi - \tau_{\theta z}(p, z) \sin\phi \\ p' &= dp(z)/dz = \operatorname{tg}\phi \end{aligned}$$

$\phi + \pi/2$ 是 z 轴和外法向 n 的夹角。

因为无论 PRCHS 怎样沿 z 轴分布, 边界条件(2.1)式总是满足的, 所以只需考虑满足边界条件(2.2)式和(2.3)式, 也就是(2.7)式和(2.8)式。

(2.7)式和(2.8)式是非齐次的一维的 Fredholm 第一种积分方程组。在图3中作用一强度为 $Cs^3 (s \rightarrow -\infty)$ 的单个的 PRC 的目的是使这个方程组的右边不全为零。否则, 其离散的解将是零解。当然, 欲使这个方程组的右边不全为零, 除上述安排外, 也可以在 $z=0$ 处加上单个的强度为 C 的 PRCHS。用这两种安排的离散解所得的结果也类似。至于单个的 PRC 的强度为何设为 $Cs^3 (s \rightarrow -\infty)$ 而不是别的 (例如 Cs^4 或 Cs^2), 这是由 PRC 作用的基本解得出的, 目的是要得出由它产生的反映在(2.7)式或(2.8)式中的位移或应力的项。

一旦联解(2.7)式和(2.8)式求得 $x_1(c)$ 和 $x_2(c)$ 之后, 由平衡方程可以确定作用于迴转轴的扭矩 M_T 和这些虚载荷之间的关系, 即

$$M_T = \int_0^h x_1(c) dc = 2\pi \int_0^{r^{(0)}} r^2 \tau_{\theta z s}(r, 0) dr \quad (2.10)$$

而半空间和迴转轴的位移和应力可分别由(2.4)式和(2.6)式求得。

三、数值解法

用直接离散法解(2.7)式和(2.8)式是最简单的。也就是将(2.7)式和(2.8)式用代数方程

$$Ax = B \quad (3.1)$$

来代替, 然后求解 x 。其中矩阵 A 是一 $2n \times 2n$ 的矩阵, x 和 B 是一 $2n$ 阶列阵。 $A = [a_{ij}]$, 其元素 a_{ij} 分别为:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{ij} &= \frac{1}{G_B} \int_{(j-1)t}^{jt} (R_{1,pt}^{-3} + R_{2,pt}^{-3}) dc & (1 \leq i, j \leq n) \\
 a_{ij} &= -\frac{1}{G_S} \int_{(j-n-1)t_1}^{(j-n)t_1} R_{a,pt}^{-3} dc & (1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n) \\
 a_{ij} &= \int_{(j-1)t}^{jt} \{ [p_t - p'_t(z_t - c)] R_{1,pt}^{-5} + [p_t - p'_t(z_t + c)] R_{2,pt}^{-5} \} dc & (n+1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n) \\
 a_{ij} &= -\int_{(j-n-1)t_1}^{(j-n)t_1} \{ [p_t - p'_t(z_t + c)] R_{a,pt}^{-5} \} dc & (n+1 \leq i, j \leq 2n)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

式中, $t = (h-0)/n$, $t_1 = (k-0)/n$, $R_{1,pt}$, $R_{2,pt}$, $R_{a,pt}$ 为相应的 $R_{1,p}$, $R_{2,p}$, $R_{a,p}$ 中的 z 代之以 z_t 得到的值, $z_t = z_{t+n} = iL/n$ ($i \leq n$).

列阵 $x = \{x_j\}$ 的元素 x_j 为:

$$x_j = \begin{cases} x_1(c_j), & (1 \leq j \leq n) \\ x_2(c_j), & (n+1 \leq j \leq 2n) \end{cases} \tag{3.3}$$

列阵 $b = \{b_i\}$ 的元素 b_i 为:

$$b_i = C/G_S \quad (1 \leq i \leq n); \quad b_i = 0 \quad (n+1 \leq i \leq 2n) \tag{3.4}$$

其中 C 是常数, 它代表强度为 Cs^3 的单个的 PRC 作用引起的那一部份的位移. 由于 (3.1) 式是一线性代数方程, 其解 x 与右端 b 也就是 C 成比例, 可取 $C=1$. n 为分段数目, 将长度 L , h , k 均取 n 个等分来计算. 为避免在轴线 $z \geq L$ 的点出现奇异性, PRCHS 分布不能超出 L , 即 $h < L$. 取 $h=0.8L$. 而长度 k 代表 PRC 的分布区间, 取 $k=nL$ 已足. 因为距离太远的 PRC 的作用影响很微, 因此取 k 小一些, 对计算结果也无大的影响.

作为数值例子, 计算了圆柱、圆锥、圆锥-圆柱及抛物线轴. 按照上述安排, 进行离散解会出现病态情形. 也就是当我们用上述方法算出位移和应力, 我们想知道它们是否可靠, 是否稳定. 于是在 (3.1) 式右边加上扰动 δ . 取 $\delta = |b_i|_{max} \times 10^{-5}$ (或更小), 重算所得的位移和应力, 若与前者或差别较大, 即为病态情形, 此时, 采用下面的处理方法.

四、病态方程的处理及其数值解

在第一节中已述, 病态的第一种积分方程 $Ax=y$ 的正规化法的处理是将问题改为求解 (1.1) 式的优化问题. 其中后一项 $\alpha \|Lx\|^2$ 起稳定化作用. 前面已述, 这种正规化法的一个缺点是不易在计算机上运算. 其实类似的做法可以有多种选择, 不必局限在 (1.1) 式的模式之下来探讨. 本文在此将病态方程 $Ax=y$ 的稳定化问题改为下式的优化问题

$$\min \|Ax - \bar{y}\| + \epsilon \|x\| \quad (\epsilon > 0) \tag{4.1}$$

由于 $\|Ax - \bar{y}\| + \epsilon \|x\| \geq \|Ax - \bar{y} + \epsilon x\|$

因此, 我们用 (4.2) 式代替 (4.1) 式

$$\min \|Ax - \bar{y} + \varepsilon x\| \quad (4.2)$$

显然, (4.2)式的最小值为零. 而

$$\|w\| = 0 \longrightarrow w = 0$$

因此, 求解(4.2)式等于解下列积分方程

$$\varepsilon x + Ax - \bar{y} = 0$$

即

$$\varepsilon x(z) + \int_{\Omega} A(z, c)x(c)dc = \bar{y}(z) \quad (4.3)$$

其中 $\varepsilon (> 0)$ 是一参数, Ω 是积分域. 对于本扭转问题, 积分是黎曼意义下的积分, 范数用 sup 范数, 因此, 在(4.3)式中的 L_2 意义下的等号“=”可用“=”代替, 即

$$\varepsilon x(z) + \int_{\Omega} A(z, c)x(c)dc = \bar{y}(z) \quad (4.4)$$

(4.4)式当 $\varepsilon \neq 0$ 时是一个 Fredholm 第二种积分方程, 通常都有稳定的解.

(4.4)式的离散的数值解法可归结为解下面的代数方程

$$(A + \varepsilon I)x = B \quad (4.5)$$

式中 I 是 $2n \times 2n$ 的单位矩阵, A, x, B 与 (3.1) 式全同, ε 是一给定的小参数. (4.5) 式比 (1.2) 式简单多了, 很方便在计算机上运算. 计算的实践表明, (4.4) 式的 $\varepsilon x(z)$ 项确能使解起稳定作用.

本文用带小参数的 Fredholm 第二种积分方程(4.4)式来代替病态的第一类积分方程的处理虽比正规化法简单, 但下列问题仍有待进一步探讨:

1. 怎样确定合适的参数 ε ? 根据什么准则来确定? 如 ε 很小, (4.4) 式回到病态情形, 式 ε 过大, 虽然解很稳定, 但与原方程 $Ax = y$ 差别太大. 类似的问题在正规化法中也存在, 如何选择 (1.1) 式的参数 α , 也有许多人研究过^[3, p. 134], 但并没给出确定 α 的简单的规则. 本文用的是试的方法, 即给出尽量小的 ε , 看看得出的解是否稳定. 否则增大 ε 再试.

2. (4.4) 式的解与原问题 $Ax = y$ 的解的误差的估计问题.

3. 无论是正规化法或是本文的方法均需加上一项原方程 $Ax = y$ 所没有的稳定化的信息. 此项信息的物理或力学的意义是什么? 从哪儿可获得? 这些问题, 对从数学角度的研究者是不大讨论的, 但从力学角度来看是应予以重视的. 结合本问题而言, 这些稳定化的信息来自何处? 代表什么? (2.1) 式至 (2.3) 式的边界条件是不是完全的? 等等问题均有待进一步探讨.

五、数值解的例

应用离散法解 (3.1) 式和 (4.5) 式, 在 DPS8 机上对圆锥、圆柱、圆锥-圆柱以及抛物线等扭转嵌入轴进行运算. (3.1) 式和 (4.5) 式可编成统一的程序, 前者用 $\varepsilon = 0$ 代入, 后者用 $\varepsilon \neq 0$ 代入.

图 4a 和图 4b 分别表示圆锥 ($2\alpha = 60^\circ$) 在 $G_S/G_H = 10$ 和 10^6 情形下接触面的单位扭矩的扭转角 $v/(p \cdot M_T)$ 的分布图. 其中曲线 1 代表 $\varepsilon = 0, \delta = 0$ 的情形, 即未受扰动, 也没加上稳定化的项时的情形. 曲线 2 代表 $\varepsilon = 0, \delta = |b_t|_{\max} \times 10^{-5}$, 即 (3.1) 式右端有一扰动 δ , 其大小为

$|b_i|_{\max}$ 的 10^{-5} 倍时未加稳定化项的情形。曲线3代表 $\epsilon=0.1 \times 10^{-3}$, $\delta=0$ 的情形, 即加上参数为 ϵ 的稳定化项而未有扰动的情形。曲线4代表 $\epsilon=0.1 \times 10^{-3}$, $\delta=|b_i|_{\max} \times 10^{-5}$ 的情形, 即有了稳定化项又受到扰动 δ 的情形。计算表明曲线3和4相差极微, 也就是说加上参数为 0.1×10^{-3} 的项确能起稳定化的作用。由图4b更可见本扭转问题在 $G_S/G_H=10^6$ 情形是病态的, 它的直接解曲线1不可靠, 而加上稳定化项之后, 曲线3就比较符合直观的理想, 此时 G_S 较大可近似为刚性的扭转。图4c表示几个不同 G_S/G_H 比值时, 曲线3的情形。当圆锥角 α 为其它数值时也有上述类似情形。

图5a和图5b分别表示圆柱($L/D=2$)在 $G_S/G_H=10$ 和 10^6 情形下沿侧表面的单位扭矩的扭转角 $v/(p \cdot M_T)$ 的分布图。其中曲线1至4的定义同上。图5a曲线1和2已很接近, 即问题不是病态型, 也就不必用稳定化的曲线3去代替。

图6a和图6b分别表示抛物线轴($p=1-0.01z^2$)在 $G_S/G_H=10$ 和 10^{12} 情形下沿接触面的单位扭矩的扭转角 $v/(p \cdot M_T)$ 的分布图。其中图6b的曲线1和2的差别较大, 宜用曲线3去代替。

图7a和图7b分别表示圆锥-圆柱在 $G_S/G_H=10$ 和 10^6 情形下沿接触面的单位扭矩的扭转角 $v/(p \cdot M_T)$ 的分布图。其中图7b的曲线1和曲线2的差别较大, 宜用稳定化的曲线3来代替。

以上结果由 $n=20$ 得出。有两点需要加以说明的:

1° LLIEM法应用于迴转轴的扭转问题时适于母线为光滑曲线的无奇异性情形。因此, 对于圆柱, 或圆锥-圆柱的“角”点在此视为用圆弧来连接, 即半空间在该处没有奇异性。

2° 本程序适用于弹性轴情形。取 G_S 较大也不等于是刚性情形。因为(2.6)式只适于弹性空间, 而且边界条件(2.3)式也不适于刚性轴。因为刚体的平衡是以体整来考虑的。

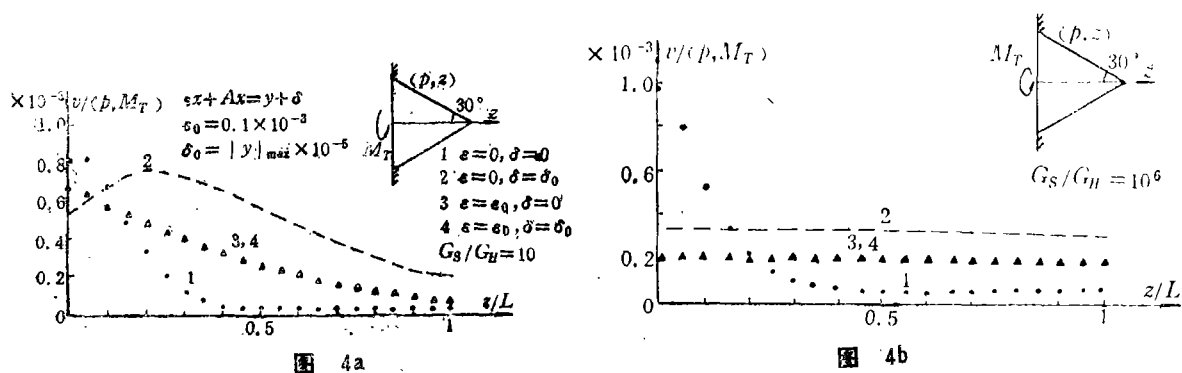


图 4a

图 4b

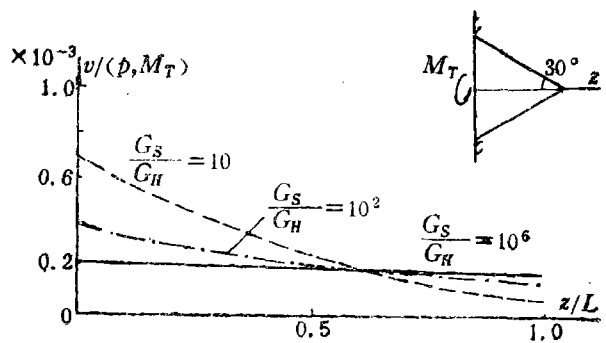


图 4c

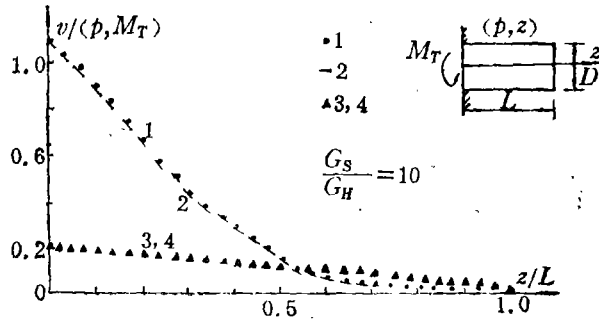


图 5a

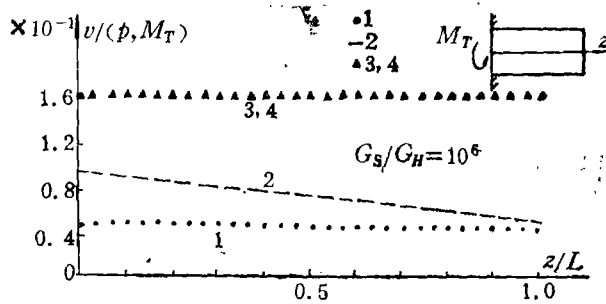


图 5b

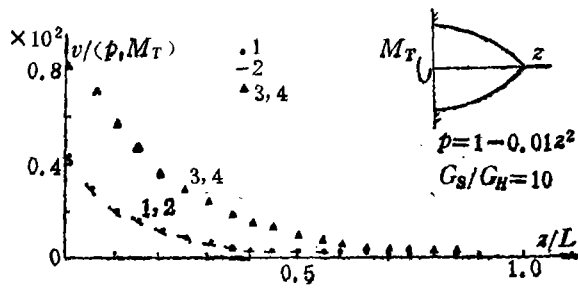


图 6a

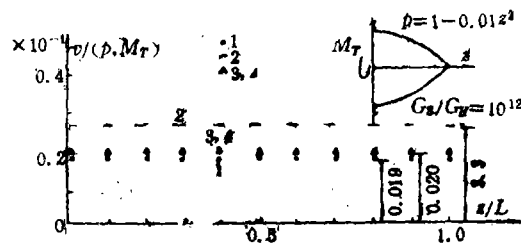


图 6b

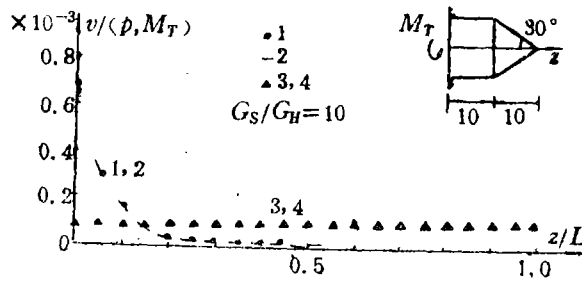


图 7a

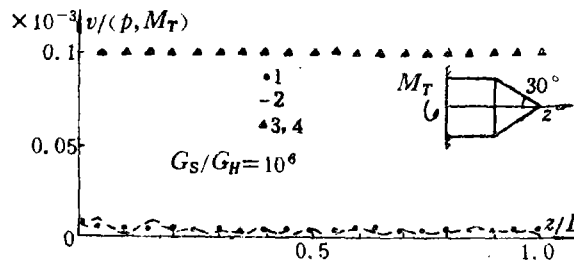


图 7b

参 考 文 献

- [1] 云天铨, 嵌在弹性半空间的刚性变直径圆轴的扭转, 应用数学和力学, 9, 5 (1988), 411—416.
- [2] Karasudhi, K., R. K. N. D. Rajapake and B. Y. Hwang, Torsion of a long cylindrical elastic bar partially embedded in a layered elastic half space, *Int. J. of Solids and Structures*, 20, 1 (1984), 1—11.
- [3] Delves, L. M. and J. Walsh, *Numerical Solution of Integral Equations*, Oxford, Clarendon (1974), 182—184.
- [4] Lukas, M. A., *Regularization*, Eds. R. S. Anderssen, F. R. de Hoog and M. A. Lukas, *The Application and Numerical Solution of Integral Equations*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands (1980), 151—181.
- [5] Schock, E., On the asymptotic order of accuracy of Tikhonov regularization, *J. of Optim. Theory and Appl.*, 44, 1 (1984), 95—104.
- [6] Morozov, V. A., *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer-Verlag, New York (1984).
- [7] Nashed, M. Z. and G. Wahba, Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of first kind, *Mathematics of Computation*, 28, 125 (1974), 69—80.
- [8] 云天铨, 点圆力偶作用于弹性全空间的解及其应用, 华中工学院学报, 总 40 期 (1962), 98—108.
- [9] 云天铨, 回转体扭转问题的一个积分方程解法, 华中工学院学报, 3 (1979), 97—104, MR *81M:73028. (English edition, *J. H. I. T.*, 1 (1979), 82—97.)

Torsion of Elastic Shaft of Revolution Embedded in an Elastic Half Space

Yun Tian-quan

(Department of Engineering Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou).

Abstract

The problem of torsion of elastic shaft of revolution embedded in an elastic half space is studied by the Line-Loaded Integral Equation Method (LLIEM). The problem is reduced to a pair of one-dimensional Fredholm integral equations of the first kind due to the distributions of the fictitious loads "Point Ring Couple (PRC)" and "Point Ring Couple in Half Space (PRCHS)" on the axis of symmetry in the interior and external ranges of the shaft occupied respectively. The direct discrete solution of this integral equations may be unstable, i. e. an ill-posed case occurs. In this paper, such an ill-posed Fredholm integral equation of the first kind is replaced by a Fredholm integral equation of the second kind with small parameter, which provides a stable solution. This method is simpler and easier to carry out on a computer than the Tikhonov's regularization method for ill-posed problems. Numerical examples for conical, cylindrical, conical-cylindrical, and parabolic shafts are given.