

# Stokes流动的罚-杂交有限元分析\*

陈大鹏 赵忠

(西南交通大学, 1986年6月19日收到)

## 摘 要

本文建议了一种用于分析Stokes流动的罚-杂交变分原理。其中, 偏应力张量和静水压力事先满足线动量平衡, 建立了相应的有限元模型。由此, 压力可在列式过程中消去, 使得有限元矩阵方程仅以节点速度作为唯一的求解未知量, 推导了几种4-节点和8-节点四边形单元。通过数值算例, 显示了单元性能。

## 一、引 言

Stokes方程是Navier-Stokes方程的定常和线性化特例, 并在形式上与控制橡皮材料、固体火箭推进剂等的线性响应的经典各向同性不可压缩弹性力学方程相同。对于它的研究具有典型性和普遍性的意义。由是之故, 近20年来, Stokes流动的有限元分析领域, 一直是具有多种背景的研究工作者的兴趣大量集中的焦点。由于引用了不同的方法来处理不可压缩约束, 出现了多种列式方法。

流函数和流函数-涡度列式<sup>[1][2]</sup>通过引入流函数而恒等满足不可压条件, 不存在与连续方程相关的问题。然而, 此类方法所固有的缺陷, 却对边界条件的实施工作造成了障碍, 并且使高三维问题的延拓工作遇到极大困难。

速度-压力列式<sup>[3][4]</sup>采用拉氏乘法, 以静水压力作为拉氏乘子, 将不可压约束引入列式工作。人们较早地认识到, 速度和压力近似试解必须满足一定的一致性条件, 即BB条件<sup>[5][6]</sup>, 才能使解答收敛、稳定。不幸的是, 许多简单、自然的单元, 如采用等阶插值的单元, 并不能满足BB条件, 从而导致伪压力模式<sup>[7]</sup>。虽然也还有一些收敛的单元, 但它们在实施时, 并不方便。

减缩积分-罚函数法<sup>[8][9]</sup>, 采用外罚函数法来处理不可压缩约束, 并引用减缩积分来计算罚项, 以求避免“自锁”。该方法的突出优点是能在单元一级消去压力, 从而使动量平衡与连续方程脱离耦合, 使有限元方程系统得以缩减。为了保证解答收敛和稳定, 速度与相关的压力空间仍需满足BB条件。根据文[10][11][12], 许多单元是不稳定的。为了保证稳定性, 人们不得不进一步降低减缩积分的阶次。由此招致的过份数值积分误差, 又破坏了解答的精

\* 国家自然科学基金资助项目。

度和收敛速率。

杂交有限元法<sup>[13][14]</sup>，同样地以压力作为拉氏乘子，藉以引入不可压缩约束。与此同时，又令偏应力张量和静水压力“事先”满足线动量平衡约束。研究表明，该方法能够提供良好的速度解和压力解。然而，由于不可压约束的非耦合特性，仍然无法避免节点速度和（在单元内任意变化的）压力场之常数项，同时作为方程系统的求解未知量的局面。

本文采用摄动连续方程代替非耦合的不可压约束，建议了一种用于分析Stokes流动的罚-杂交变分原理。其中，偏应力张量和压力满足线动量平衡。在由此建立的有限元模型中，完全可以在单元一级消去压力，仅以节点速度作为方程系统的求解未知量。推导了几种4-节点和8-节点单元。最后通过数值算例，显示了单元特性。

## 二、Stokes流动与分析

令 $\Omega$ 表示 $R^d$ 中的一个有界开区域， $d$ 是空间维数。 $\Omega$ 的边界由 $\partial\Omega$ 表示，并假设是分片光滑的。进一步假设将 $\partial\Omega$ 分成两个不相交的子区域 $S_u$ 和 $S_\sigma$ 。则Stokes流动方程与边界条件是

$$\sigma' \cdot \nabla - \nabla p + \rho \bar{F} = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u})/2 \quad \Omega \text{ 内} \quad (2.3)$$

$$\sigma = -p\mathbf{1} + \sigma', \quad \sigma' = 2\mu\mathbf{D} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad S_u \text{ 上} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad S_\sigma \text{ 上} \quad (2.6)$$

式中， $\mathbf{u}$ 是速度矢量， $\sigma'$ 是偏应力张量， $\sigma$ 是Cauchy应力张量， $p$ 是静水压力， $\mathbf{D}$ 是应变率张量， $\rho$ 是质量密度， $\bar{\mathbf{u}}$ 是 $S_u$ 上的指定速度， $\bar{\mathbf{T}}$ 是 $S_\sigma$ 上的指定面力， $\bar{F}$ 是单位质量体积力， $\mu$ 是流体粘度， $\nabla$ 是Hamilton算子。

将区域 $\Omega$ 离散成有限数目的有限单元，即

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k$$

并定义如下的容许空间

$$V_0 = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^d, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ 在 } S_u \text{ 上}\}$$

$$V = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^d, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ 在 } S_u \text{ 上}\}$$

$$X = \{p \in L^2(\Omega)\}$$

则Stokes问题在广义函数意义下等价于泛函 $J$ 在线性子空间 $V_0$ 上的极值问题：

$$J: V \rightarrow R; \quad J(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{\Omega_k} \mu \mathbf{D} : \mathbf{D} d\Omega - \int_{\Omega_k} \rho \bar{F} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{S_{\sigma k}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS \right\rangle \quad (2.7)$$

$$V_0 = \{\mathbf{u} \in V, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内}\}$$

如果采用拉氏乘子法来放松不可压约束，则Stokes问题可表示为拉氏泛函 $L$ 的鞍点问题，

$$L: V \times X \rightarrow R; L(\mathbf{u}, p) = J(\mathbf{u}) - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} p(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.8)$$

此即速度-压力列式的变分基础。

另一种放松不可压约束的方法, 是在 $J$ 中附加一个凸的、可微的罚项

$$PT(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{1}{2\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 d\Omega$$

以建立无约束极小化问题。这样, 便产生加罚泛函:

$$J_\varepsilon: V \rightarrow R; J_\varepsilon(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{1}{2\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 d\Omega \quad (2.9)$$

其极值点由下式表征:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \in V; & \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{\Omega_k} \frac{\mu}{2} (\mathbf{u}^* \nabla + \nabla \mathbf{u}^*) : (\mathbf{v} \nabla + \nabla \mathbf{v}) d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_k} \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega \right\rangle \\ & = \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{\Omega_k} \rho \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{S_{\sigma k}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} dS \right\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.10)$$

在有限元计算时, 若对罚项采用减缩积分, 则导致非常流行的选择性减缩积分-罚函数法 (SRIP法)。

采用所谓的摄动Lagrange列式, 也能达到同样结果。摄动泛函定义为

$$L_\varepsilon(\mathbf{u}, p) = L(\mathbf{u}, p) - \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \frac{\varepsilon}{2} p^2 d\Omega \quad (2.11)$$

其鞍点  $(\mathbf{u}^*, p^*)$  由如下系统刻画

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{\Omega_k} \frac{\mu}{2} (\mathbf{u}^* \nabla + \nabla \mathbf{u}^*) : (\mathbf{v} \nabla + \nabla \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega_k} p^* (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega \right\rangle \\ & = \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{\Omega_k} \rho \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{S_{\sigma k}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} dS \right\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} (\varepsilon p^* + \nabla \cdot \mathbf{u}^*) q d\Omega = 0 \quad \forall q \in X \quad (2.13)$$

由(2.13)式有

$$p^* = -\frac{1}{\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \quad (2.14)$$

代入(2.12)式,可得到(2.10)式.

在SRIP法中,当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $(\mathbf{u}', p')$  收敛于拉氏泛函(2.8)的鞍点<sup>[10]</sup>. 此时,为得到稳定的收敛解,需满足离散的BB条件.事实上,文[10],[11],[12]证明了许多单元是不稳定的,导致压力近似解发生严重振荡.

在极富吸引力的杂交有限元法<sup>[13],[14]</sup>, Stokes方程的弱解定义为余能泛函  $C^*$  的稳定点

$$C^*(\sigma', p, \tilde{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^N \left\langle - \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\mu} \sigma' : \sigma' d\Omega + \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{S_{\sigma k}} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS \right\rangle \quad (2.15)$$

其中,  $(\sigma', p)$  事先满足线动量平衡(2.1). 研究表明,杂交有限元法能得到具有良好精度的速度和压力解.但由于不可压约束的非耦合特性,作为拉氏乘子的压力不能从列式中消去,使得最后的有限元方程系统以节点速度和在单元内任意变化压力场中的常数项作为求解未知量.

为改变这种状况,参照摄动Lagrange列式,用一个小参数  $\epsilon$  乘以压力来对连续方程(2.2)进行摄动

$$\epsilon p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

其中,  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \ll 1$ . 可以把这种摄动看作为轻度人工可压缩性的引入.由此,我们建议一种罚-杂交变分泛函:

$$\Pi_{\epsilon}^*(\sigma', p, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N \left\langle - \int_{\Omega_k} \frac{1}{4\mu} \sigma' : \sigma' d\Omega + \int_{\Omega_k} \frac{1}{2} \sigma' : (\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega_k} p(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega_k} \frac{\epsilon}{2} p^2 d\Omega - \int_{S_{\sigma k}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dS \right\rangle \quad (2.17)$$

对于容许速度场  $\mathbf{u} \in V$  和容许偏应力场  $\sigma'$  及压力场  $p$ ——即事先满足线动量平衡,由  $\Pi_{\epsilon}^*$  的驻值条件,可得到Euler-Lagrange方程(2.3), (2.6), 单元间面力相抵条件

$$\mathbf{T}^{(+)} + \mathbf{T}^{(-)} = 0 \quad (2.18)$$

以及摄动连续方程(2.16). 由于摄动连续方程的耦合特性,压力可以被消去,从而有限元方程将仅以速度作为求解未知量.

在罚-杂交有限元法中,单元内的压力场可表示为

$$p = p_k + p' \quad (2.19)$$

其中,  $p_k$  是任意常数,  $p'$  由偏应力场  $\sigma'$  通过线动量平衡方程确定. 值得注意的是,与其它列式不同,尽管在每个单元内压力的近似函数可以是一个适当阶的多项式,但在BB条件中只需考虑单元内压力的常数项,不存在对压力的自由度的限制<sup>[15]</sup>,这是本方法成功的一个关键.

### 三、有限元列式

定义有限元近似函数,便可求解相应的离散问题.由此,用  $(6 \times 1)$  矢量  $\sigma^*$  表示对称偏

应力张量 $\sigma'$ ，并在单元内假设

$$\sigma^* = A(x)\beta \quad x \in \Omega_k \quad (3.1)$$

式中， $A(x)$ 为插值函数矩阵， $\beta$ 为待定参数。进一步可将压力表示为

$$p = p_k + \bar{A}(x)\beta \quad (3.2)$$

而在单元内假设速度场

$$u = Nq \quad (3.3)$$

式中， $N$ 是形函数矩阵， $q$ 是节点速度。将(3.1)，(3.2)，(3.3)式代入泛函 $\Pi_H^e(\sigma', p, u)$ ，有

$$\begin{aligned} \Pi_H^e(\beta, p_k, q) = \sum_{k=1}^N \left\langle -\frac{1}{2} \beta^T (H + \varepsilon H^*) \beta + \beta^T Gq - p_k S q \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{2} p_k^2 A_k - \varepsilon p_k G^* \beta - q^T Q_1 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中，矩阵 $H$ ， $H^*$ ， $G$ ， $G^*$ ， $S$ ， $Q_1$ 分别定义如下

$$\left. \begin{aligned} \beta^T H \beta &= \int_{\Omega_k} \frac{1}{2\mu} \sigma' : \sigma' d\Omega, \quad \beta^T H^* \beta = \int_{\Omega_k} (p')^2 d\Omega \\ \beta^T Gq &= \int_{\Omega_k} \frac{1}{2} \sigma' : (u\nabla + \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega_k} p' (\nabla \cdot u) d\Omega \\ p_k S q &= \int_{\Omega_k} p_k (\nabla \cdot u) d\Omega, \quad p_k G^* \beta = \int_{\Omega} p_k p' d\Omega \\ q^T Q_1 &= \int_{S_{\varepsilon,h}} \bar{T} \cdot u dS, \quad A_k = \int_{\Omega_k} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

由于单元间的 $p_k$ ， $\beta$ 相互独立，故由 $\Pi_H^e$ 关于 $p_k$ ， $\beta$ 的驻值条件，可得到

$$p_k = -\frac{1}{\varepsilon} \bar{S} q \quad (3.6)$$

$$\beta = \bar{H}^{-1} \bar{G} q \quad (3.7)$$

这里，

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= H + \varepsilon \left( H^* - \frac{1}{A_k} G^{*T} G^* \right), \quad \bar{G} = G + \frac{1}{A_k} G^{*T} S \\ \bar{S} &= \frac{1}{A_k} (\varepsilon G^* \bar{H}^{-1} \bar{G} + S) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

将(3.6)，(3.7)代回(3.4)，最后可得到仅以节点速度作为求解未知量的有限元矩阵方程

$$K^* q^* = Q^* \quad (3.9)$$

这里，右上标\*表示组装后的矩阵或矢量。单元矩阵 $K^e$ 为

$$K^e = \bar{G}^T \bar{H}^{-1} \bar{G} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{A_k} S^T S \quad (3.10)$$

注意到 $\varepsilon$ 为一充分小的参数，故在计算单元矩阵 $K^e$ 时，可略去 $\bar{H}$ 矩阵中与 $\varepsilon$ 相乘的项，从而得到蜕化的单元矩阵

$$\begin{aligned}
 K^e &= K_p + K_s, & (3.11) \\
 K_p &= \bar{G}^T H^{-1} \bar{G} & \text{粘性项} \\
 K_s &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{A_k} S^T S & \text{罚项}
 \end{aligned}$$

令  $Q_h$  为容许速度空间  $V(\Omega_h)$  的有限维子空间, 其维数为  $n$ . 定义  $Q_h$  的子空间

$$Q_h^1 = \{u_h \in Q_h; S q = 0\}, \quad Q_h^2 = \{u_h \in Q_h; G q = 0\}$$

及它们的交

$$Q_h^* = Q_h^1 \cap Q_h^2$$

空间  $Q_h^*$  的元素称为机动模式. 显然, 有

$$\dim Q_h^1 = (n-1) \quad (3.12)$$

$$\dim Q_h^2 \geq l, \quad l \text{ 为刚体模式数目} \quad (3.13)$$

$$\dim Q_h^* \geq l \quad (3.14)$$

易见, 为使单元足秩, 不至含有多余机动模式, 即

$$\text{Rank } K^e = (n-l) \quad (3.15)$$

必须有

$$\dim Q_h^* = l \quad (3.16)$$

由(3.12), (3.13)式可知, 必要条件为

$$\dim Q_h^2 \leq l+1 \quad (3.17)$$

亦即

$$\text{Rank } G \geq n-l-1 \quad (3.18)$$

由于  $G$  为  $m \times n$  矩阵 ( $m$  是偏应力参数个数), 故单元足秩的必要条件为

$$m \geq n-l-1 \quad (3.19)$$

另一方面, 可以看出, 现在对罚项不需采用减缩积分,  $K_s$  矩阵的秩永远为 1. 由罚项引入的约束只有一个, 即

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u) d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

但单元内压力的近似函数可以是一个任意阶的多项式. 而在减缩积分-罚函数法中, 为减少由罚项引入的约束数目, 以避免“自锁”, 需对罚项采用减缩积分, 缩减相应的压力空间的维数. 若采用足够低阶的数值积分, 可使某些单元满足 BB 条件, 但过份的积分误差, 却损坏了解的精度和收敛率.

下面, 推导几种 4-节点和 8-节点四边形单元. 考虑二阶完备的偏应力场

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma'_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \beta_6 y^2 \\
 \sigma'_y &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} xy + \beta_{11} x^2 + \beta_{12} y^2 \\
 \sigma'_{xy} &= \beta_{13} + \beta_{14} x + \beta_{15} y + \beta_{16} xy + \beta_{17} x^2 + \beta_{18} y^2
 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

4-节点单元的速度近似函数在自然坐标系下是双线性的. 假设偏应力场  $\sigma'$  仅含线性项, 同时在(3.21)中令  $\beta_2 = -\beta_{15}$ ,  $\beta_3 = -\beta_{14}$ , 便形成单元 PH4-1 的偏应力场. 若仅从避免多余机动模式出发, 则只需 5 个  $\beta$  项, 即在 PH4-1 的偏应力场中进一步令  $\beta_{15} = \beta_{14} = 0$ , 由此得到单元 PH4-2.

在 8-节点单元中, 速度近似采用 Serendipity 插值函数. 单元 PH8-1 的偏应力场假设引

用(3.21)式, 只是令 $\beta_{10}=\beta_4$ ,  $\beta_{17}=\beta_{18}$ . 这与文[13]中单元QPQSE8的偏应力假设相同. 应当指出, 该单元含有三个多余机动模式(SKM):

$$u = a_1(x^2 + y^2) + a_3 x^2 y, \quad v = a_2(x^2 + y^2) - a_3 x y^2 \quad (3.22)$$

其中, SKM(1), SKM(2)是兼容的, 而SKM(3)非兼容. 由于兼容SKM的存在, 当扩展用于求解Navier-Stokes方程时, 单元不能工作. 为消去两个兼容模式 SKM(1), SKM(2), 我们引入两个高阶 $\beta$ 项:

$$\sigma'_x \sim \beta_1^* x y^2, \quad \sigma'_y \sim \beta_2^* x^2 y, \quad \sigma'_{xy} \sim -\frac{1}{3} \beta_1^* y^3 - \frac{1}{3} \beta_2^* x^3, \quad p' \sim 0 \quad (3.23)$$

如此建立的单元PH8-2尽管仍含有非兼容模式SKM(3), 但在 $2 \times PH8-2$ 的组合一级, 却可以做到合理的足秩. 然而, 由于在偏应力假设中,  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$ 与 $\sigma'_{xy}$ 耦合, 故H矩阵的求逆工作较费时. 若仅为了抑制多余机动模式, 可放松对高阶偏应力项满足平衡条件的要求, 从而有

$$\sigma'_x \sim \beta_1^* x y^2, \quad \sigma'_y \sim \beta_2^* x^2 y, \quad \sigma'_{xy} \sim 0, \quad p' \sim 0 \quad (3.24)$$

在PH8-1的偏应力场及压力的基础上, 计及(3.24), 则可以得到单元PH8-3.

## 四、数值算例

### 空腔流动

为评估单元的稳定性, 考虑著名的空腔流动, 单元网格及边界条件示于图1. 我们发现, 4-节点单元PH4-1, PH4-2导致不稳定的压力解; 而8-节点单元PH8-1, -2, -3是稳定的. A-A截面上的压力分布示于图2. 很清楚, 计算的压力是平滑的, 并不振荡. 图2还给

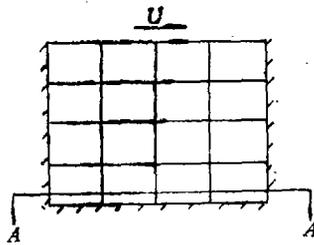


图1 单元网格和边界条件

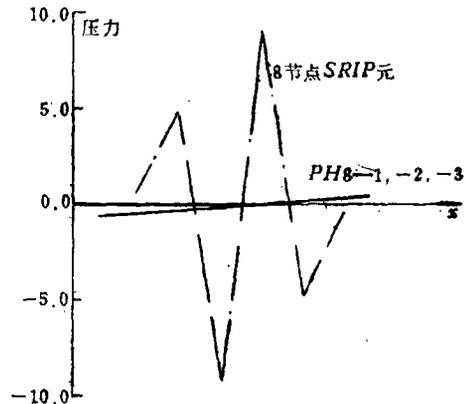
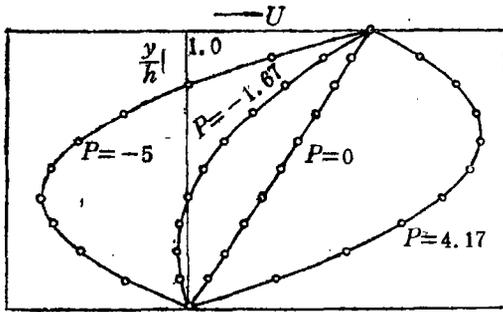


图2 A—A截面的压力分布

出了8-节点SRIP单元得到的结果, 以兹对比.

### Couette流动

采用4-节点和8-节点单元模拟Couette流动得到的速度剖面显示在图3中. 可以看出, 对于无量纲压力梯度 $P$ , 当 $P > 0$ 时, 速度在整个流域保持为正, 而当 $P < 0$ 时, 则从固壁处开始, 可产生回流.



— 解析解; o PH4-1, -2, PH8-1, -2, -3

图3 Couette流动模拟结果

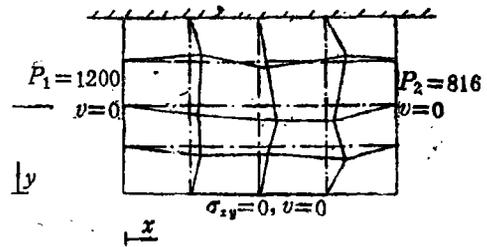
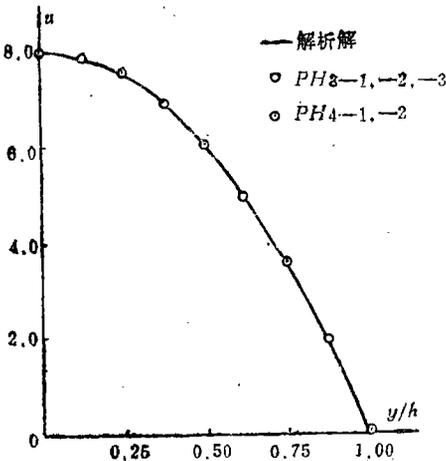


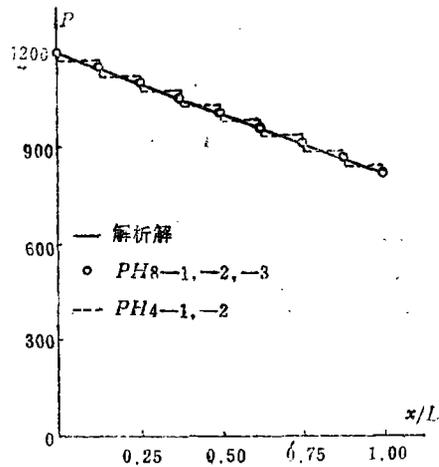
图4 Poiseuille流: 单元网格及边界条件

**Poiseuille流动**

考察了规则与非规则网格两种情形。边界条件及网格划分示于图4, 计算结果示于图5。



(a)速度解



(b)压力解

图5 Poiseuille 流动模拟的计算结果

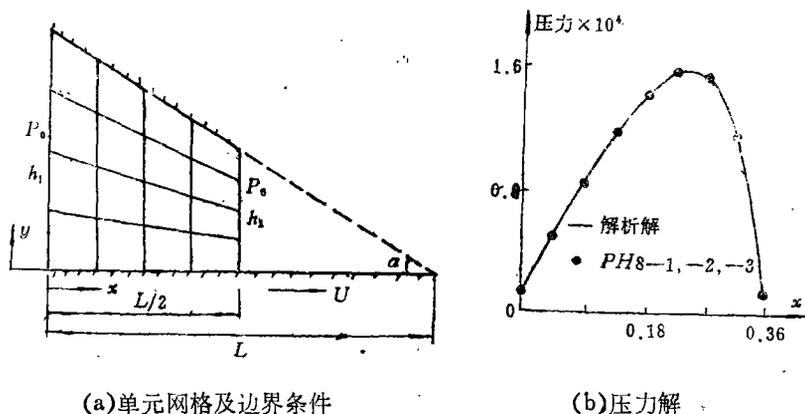
我们发现, 有限元解对单元几何歪斜, 并不敏感。

**平面滑动轴承问题**

这是一个高压力梯度问题。文[16]给出了解析解, 图6(a)给出了边界条件及单元网格。采用8-节点单元计算得到的压力解示于图6(b)。显然, 数值解与解析解一致地符合。

**五、结 语**

本文建议了一种用于分析 Stokes 流动的罚-杂交变分原理, 建立了相应的有限元模型。其中, 压力可在单元一级被消去, 使得有限元方程系统仅以节点速度作为求解未知量。这对于非线性问题, 例如 Navier-Stokes 方程和非牛顿流动, 更为重要。在本文推导的几种单元中, 当解光滑时, 4-节点单元 PH4-1, -2 能给出良好的速度和压力解。而当解不光滑时, 导致不精确的压力解。另一方面, 8-节点单元 PH8-2, -3 在光滑解与非光滑解等两种情形,



(a)单元网格及边界条件

(b)压力解

图6 平面滑动轴承问题

均产生良好的压力和速度解，并可用于Navier-Stokes流动分析工作。而文[13]的同类单元，当 $Re \geq 150$ 时，已出现计算不稳定性。

## 参 考 文 献

- [1] Olson, M. D., A variational finite element method for two-dimensional steady, viscous flows, *Proc. Special Conf. F. E. M. Civil Eng.*, Engineering Institute of Canada (1972), 585—616.
- [2] Cheng, R. T., Numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite element method, *Physics of Fluids*, 15 (1972), 2098—2105.
- [3] Taylor, C. and P. Hood, A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique, *Compt. Fluids*, 1 (1973), 73—100.
- [4] Oden, J. T. and L. C. Wellford, Analysis of flow of viscous fluids by the finite element method, *AIAA J.*, 10 (1972), 1590—1599.
- [5] Bubuška, I., Error bounds for finite element method, *Numer. Math.*, 16 (1971), 322—333.
- [6] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximations of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, *R. A. I. R. O., Série rouge*, R2 (1974), 129—151.
- [7] Sani, R. L., P. M. Gresho and R. L. Lee, On the spurious pressure generated by certain GFEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, *3rd. Int. Conf. on F. E. in Flow Problems*, Banff, Canada (1980).
- [8] Hughes, T. J. R., W. K. Liu and A. Brooks, Finite element analysis of incompressible viscous flow by the penalty function formulations, *J. Compt. Phys.*, 30 (1979), 1—60.
- [9] Bercovier, M. and M. Engelman, A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flow, *J. Compt. Phys.*, 30 (1979), 181—201.
- [10] Oden, J. T., N. Kikuchi and S. W. Song, Penalty-finite element methods for the analysis of Stokesian flows, *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 31 (1982), 297—327.
- [11] Oden, J. T., Penalty method and reduced integration for the analysis of fluids, *Penalty-Finite Element Methods in Mechanics*, AMD-51, ed. J. N.

- Reddy (1982), 21—32.
- [12] Carey, G. F. and R. Krishnan, Penalty approximation of Stokes flow, *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **35** (1982), 169—206.
- [13] Bratianu, C. and S. N. Atluri, A hybrid finite element method for Stokes flow: Part I—Formulations and numerical studies, *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **36** (1983), 23—37.
- [14] Ying, L. A. and S. N. Atluri, A hybrid finite element method for Stokes flow: Part II—Stability and convergence studies, *Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **36** (1983), 39—60.
- [15] 应隆安, 粘性不可压缩流体运动的有限元法, 数学进展, **12** (1983), 124—132.
- [16] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 6th edition (1968).

## A Penalty-Hybrid Finite Element Analysis of Stokes Flow

Chen Da-peng      Zhao Zhong

(Southwest Jiaotong University, Chengdu)

### Abstract

A type of penalty-hybrid variational principle is suggested for the analysis of Stokesian flow. On such a basis, a finite element model is formulated featuring, among others, a priori satisfaction of the deviatoric stress and hydrostatic pressure on linear momentum balance equations. Also in the present scheme the hydrostatic pressure is successfully eliminated at the element level, leaving only nodal velocities as solution unknowns. A series of 4-node and 8-node quadrilateral elements are derived and examined. Numerical examples demonstrating their characteristic behaviors are also included.