

文章编号: 1000-0887(2004) 03-0221-07

应用四边形十六自由度平板壳单元 DKQ16 分析板壳结构的稳定性*

郑长良¹, 李丽华², 钟万勰¹

(1. 大连理工大学 力学系, 大连 116023;

2. 河北科技师范学院 数理系, 秦皇岛 066004)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 应用新近开发的四边形十六自由度离散 Kirchhoff 平板壳单元 DKQ16, 分析了板壳结构的线性屈曲问题, 建立了相应的几何刚度矩阵。通过对几个典型算例的计算与比较, 说明了 DKQ16 单元在板壳结构的稳定性中也有良好的精度。

关键词: 板壳结构; 稳定性; 平板壳单元

中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

性能好、列式简单的低阶壳单元依然是力学工作者关注的课题。近来应用理性元和离散 Kirchhoff 技巧发展出了一族新的平板壳单元^[1,2], 在板壳线弹性分析中有较高的精度。该类单元的特点是: 单元自由度少, 每个角节点三个位移 U, V, W , 每个边中点一个绕该边的转角; 不需引入虚假刚度, 以防单元共面时产生奇异, 可归为 Semiloof 类板壳单元。其中三角形单元称为 DKT12, 是通过平面弹性 CST 单元和 Morley (或 DKT6) 板单元叠合而成, 为最简单的三角形平板壳元。其中四边形单元 DKQ16, 可视为 DKT12 的一个推广, 也可看作是最简单的四边形平板壳单元。DKT12 已为许多研究者应用于线性以及非线性分析中^[3]。DKQ16 在板壳线弹性分析中的表现, 在文[1]中有详细的评述。本文将 DKQ16 应用于板壳结构稳定性分析中, 几个典型算例的计算结果表明 DKQ16 单元在板壳结构的稳定性分析中也具有很高的精度。

1 稳定问题的线性理论

临界状态的能量准则为:

$$\delta^2 \Pi(U, \delta U) = 0, \quad \forall \delta U \text{ 且 } \delta U = \mathbf{0} \text{ 和 } U = U \text{ 沿 } S_u \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002_08_20; 修订日期: 2003_10_18

基金项目: 教育部博士点专项基金资助项目(20010141024); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2001]498); 辽宁省博士启动基金资助项目(2001102093); 2001 年国家高技术研究发展计划资助课题(2001AA412220)

作者简介: 郑长良(1963—), 男, 辽宁人, 副教授, 博士(联系人, Tel: 86_411_4709559, 13050583844; E-mail: Zhengcha@dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—), 男, 上海人, 教授, 中科院院士。

有限元离散后总势能为:

$$\Pi = \sum_e (\Pi_{int}^e - \Pi_{ext}^e) \quad (2)$$

其弹性势能:

$$\Pi_{int}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 Green-Lagrange 应变, 可写为线性和非线性两部分:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

对于外载与结构变形无关的情况, 有:

$$\delta^2 \Pi_{ext} = 0 \quad (6)$$

$$\delta^2 \Pi_{int} = \int_{V^e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_l + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_l + \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} + \delta^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \boldsymbol{\sigma}_l) dV \quad (7)$$

写成矩阵形式

$$\delta^2 \Pi_{int} = \delta \mathbf{U}_n (\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}_u + \boldsymbol{\kappa}_\sigma) \delta \mathbf{U}_n \quad (8)$$

\mathbf{k} 为线性刚度阵, \mathbf{k}_u 为初始位移刚度阵, \mathbf{k}_σ 为几何刚度阵.

考虑 Euler 型屈曲, 即略去初始位移, 可得:

$$\delta^2 \Pi_{int} = \delta \mathbf{U}_n (\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}_\sigma) \delta \mathbf{U}_n \quad (9)$$

组装成总刚后, 最终化为求解如下的特征值问题

$$(\mathbf{K} + \boldsymbol{\kappa}_\sigma) \delta \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (10)$$

2 DKQ16 单元的几何刚度阵

DKQ16 单元的一般描述由图 1 给出. 其节点自由度为:

$$\mathbf{U}_n^g = (u_1^g, v_1^g, w_1^g, u_2^g, v_2^g, w_2^g, u_3^g, v_3^g, w_3^g, u_4^g, v_4^g, w_4^g, \theta_{12}^g, \theta_{23}^g, \theta_{34}^g, \theta_{41}^g)^T \quad (11)$$

Green-Lagrange 膜应变的线性和非线性两部分可

写为:

$$\left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_l &= \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

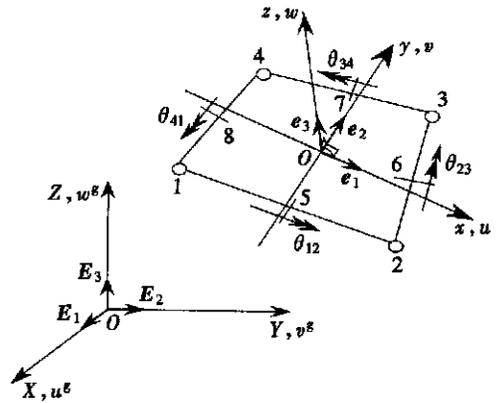


图 1 DKQ16 平板壳单元

DKQ16 单元刚度阵已在文[1]中给出, 为了计算其几何刚度阵, 需考虑膜应变的非线性部分, 几何刚度阵的计算可直接在总体坐标系中进行, 为此其在总体坐标系中的位移场采用如下近似:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^g \\ v^g \\ w^g \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{U}_n \quad (13)$$

其中:

$$U_n = (u_i^g, v_i^g, w_i^g, \dots)_{i=1, \dots, 4} \quad (14)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_{i=1, \dots, 4}, \quad (15)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (16)$$

这样由式(15)定义的 DKQ16 的几何刚度阵可写为:

$$k_{\sigma}^e = \sum_{k=1}^3 \int_{A^e} Q_k^T G^T N G Q_k dA \quad (17)$$

其中

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_0 dz = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}, \quad (18)$$

矩阵 G 为:

$$G = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Q_1 、 Q_2 和 Q_3 可表为:

$$Q_i = \begin{bmatrix} t_i & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ 0 & t_i & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ 0 & 0 & t_i & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ 0 & 0 & 0 & t_i & \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (20)$$

其中:

$$t_1 = (1 \ 0 \ 0); \quad t_2 = (0 \ 1 \ 0); \quad t_3 = (0 \ 0 \ 1). \quad (21)$$

3 数值算例

3.1 对边受压简支和固支方板的屈曲分析

为了考核 DKQ16 的精度, 我们分析了图 2 所示的对边受压的方板。其临界载荷的理论解为: $f_{cr} = 4\pi^2 D/L$ (简支); $f_{cr} = 10\pi^2 D/L$ (固支) 其中 $D = 12^{-1} E h^3 / (1 - \nu^2)$ 。考虑其对称性 (仅研究对称模态), 取板的四分之一用 $N \times N$ ($N = 2, 4, 8$) 网格加以分析。其结果列于表 1 和表 2 中。由 IDEAS 软件计算的结果和使用 DKQ20 (Q4+ DKQ12) 得到的结果也一并列入表中以资比较。

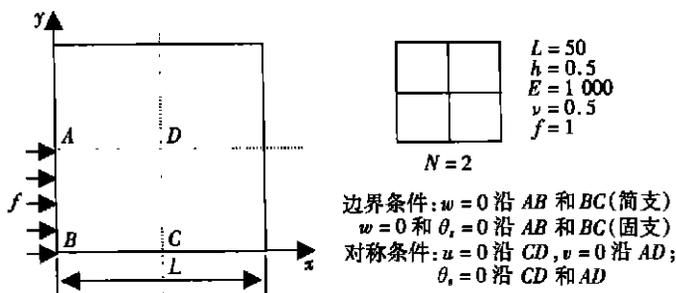


图 2 受压方板

表 1 简支方板的临界载荷

单元(网格)	IDEAS(16×16)	DKQ20(16×16)	DKQ16(2×2)	DKQ16(4×4)	DKQ16(8×8)
f_{cr} (误差%)	8.275(0.61)	8.258(0.4)	8.1632(0.75)	8.2109(0.17)	8.2214(0.04)
理论解	8.225				

表 2 固支方板的临界载荷

单元(网格)	IDEAS(16×16)	DKQ20(16×16)	DKQ16(2×2)	DKQ16(4×4)	DKQ16(8×8)
f_{cr} (误差%)	20.51(0.2)	20.92(1.75)	17.032(17.16)	19.657(4.39)	20.473(0.62)
理论解	20.56				

3.2 受拉薄板的屈曲分析

几何上的不连续诸如孔和裂缝等会导致受拉薄板的局部屈曲^[4,5,6]。边界条件对受拉薄板的局部屈曲的影响近来才开始研究^[7],其与薄板轧制过程常出现褶皱现象相联系^[8]。下面我们用 DKQ16 单元来分析图 3 所示的受拉薄板(厚度 $h = 0.05 \text{ mm}$; $\nu = 0.3$)。为了求出正值特征值,需要引入初始漂移,其大小可参考文[7]给出近似估计。

由 DKQ16、DKQ20 及由 ABAQUS^[7]得到的拉伸临界载荷在表 3 中给出。其对应的模态在图 4 给出。从表中结果可以看出 DKQ16 单元对线性屈曲问题很有效。

表 3 受拉薄板临界应力

单元	单元总数(自由度)	临界应力 σ_{cr} / MPa
DKQ20	1500(7905)	230.3
DKQ16	1500(7823)	239.7
S4R5(ABAQUS 壳元)	-	236

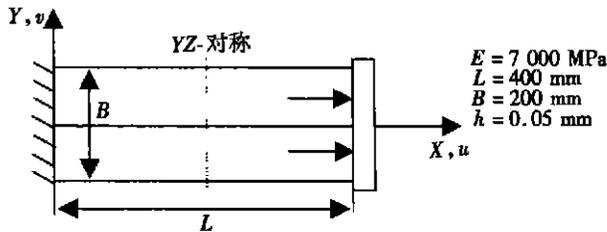


图 3 受拉薄板

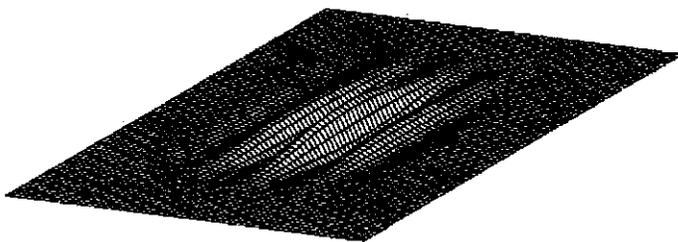


图 4 受拉薄板的屈曲模态

3.3 空间薄壁框架的侧向屈曲

I 型、U 型等截面的薄壁空间框架结构常为工程实际所采用,这类优化的结构通常有复杂的变形行为,特别是其屈曲分析尤为重要。

这里我们分析图 5 所示直角悬臂框架,其自由端受一集中力作用。其两种连接形式是为

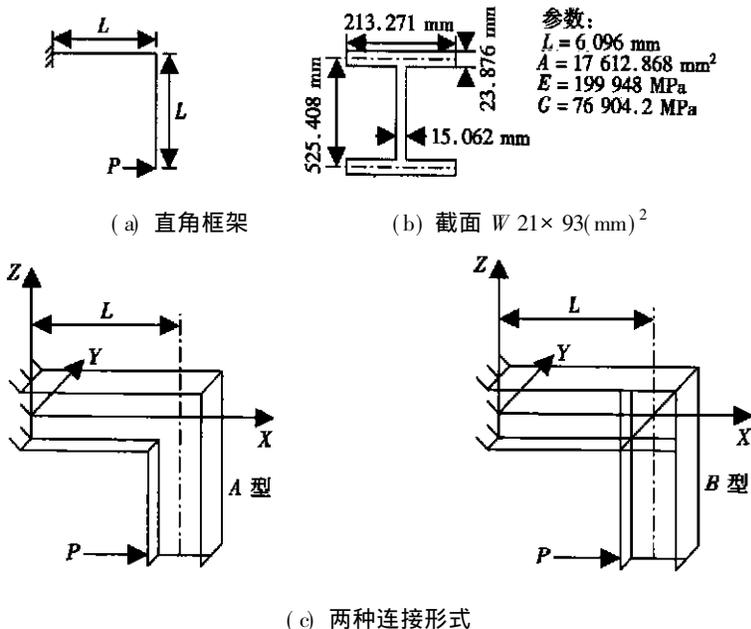


图 5 集中力作用下的直角悬臂框架

了模拟自由翘曲和受制翘曲两种形式^[9]。

表 4 框架结构的临界载荷

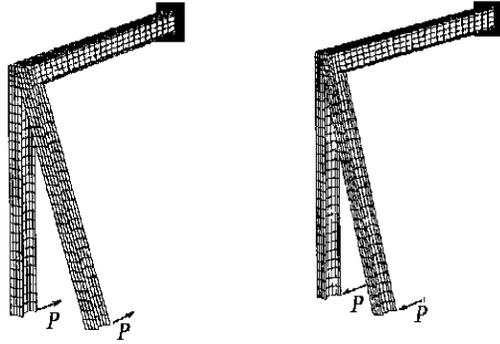
A 型连接	$- P_x / (\text{kN})$	$+ P_x / (\text{kN})$
DKQ16(648 个单元)	- 50.857 5 (0.49%)	58.596 3 (0.28%)
M. Y. Kim <i>et al.</i> ^[9]	- 52.363 1 (3.46%)	59.044 3 (1.05%)
ABAQUS(1695 个单元) ^[9]	- 50.607 4	58.431 8
B 型连接		
DKQ16(680 个单元)+DKT12(32 个单元)	- 51.862 5 (21.83%)	67.647 4(13.49%)
DKQ16(1760 个单元)+DKT12(128 个单元)	- 68.023 7(2.52%)	78.659 4(0.58%)
M. Y. Kim <i>et al.</i> ^[9]	- 69.128 5(4.19%)	80.603 5(3.07%)
ABAQUS(R8S5) ^[9]	- 66.349 6	78.199 7

DKQ16 的计算结果和 M. Y. Kim 等^[9]采用 Hermite 梁单元得到的结果以及用 ABAQUS^[9](R8S5 壳元)计算的结果在表 4 给出,括号中给出了以 ABAQUS 计算值为参考的相对误差。从表中可以看到,对于 A 型连接,648 个 DKQ16 单元的计算结果与 1695 个 ABAQUS 壳单元结果十分相近;对于 B 型连接,由于常应变 DKT12 的使用,则需要较密的网格,但单元的个数与 ABAQUS 壳单元的个数相当。说明 DKQ16 单元有较高的计算效率。

从计算结果还可以看出,载荷的方向及杆件的连接型式,对空间框架结构的临界载荷有显著的影响。

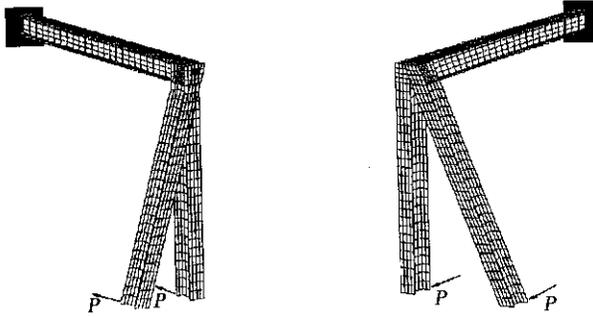
4 结 论

DKQ16 平板壳单元具有列式简单,节点自由度少,没有虚假自由度。本文成功地将其应用于板壳结构的线性稳定性分析中,几个典型问题的数值结果表明,该单元在稳定性分析中有良好的精度。



反向载荷 - P_x ($P_{cr} = 50.9 \text{ kN}$) 正向载荷 + P_x ($P_{cr} = 58.6 \text{ kN}$)

图6 A型连接下直角悬臂框架的屈曲模态(A型)



反向载荷 - P_x ($P_{cr} = 60.8 \text{ kN}$) 正向载荷 + P_x ($P_{cr} = 78.6 \text{ kN}$)

图7 B型连接下直角悬臂框架的屈曲模态(B型)

[参 考 文 献]

- [1] Batoz J L, Hammadi F, Zheng C L, et al. On the linear analysis of plates and shells using a new sixteen dof flat shell element[J]. Computers & Structures, 2000, 78: 11—20.
- [2] Batoz J L, Zheng C L, Hammadi F. Formulation and evaluation of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements[J]. Int J Numer Meth Engng, 2001, 52: 615—630.
- [3] Batoz J L, Guo Y Q, Shakourzadeh H. Analyse non lin aire de coques minces lasto_plastiques avec l' lment DKT12[J]. Revue Europ enne des El ments Finis, 1998, 7: 223—239.
- [4] Shaw D, Huang Y H. Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1990, 35(6): 1019—1027.
- [5] Gilabert A, et al. Buckling instability and pattern around holes or cracks in thin plates under tensile load[J]. European Journal of Mechanics, A/ Solids, 1992, 11(1): 65—89.
- [6] Shigeru Shinizu, Shunya Toshida. Buckling of plates with a hole under tension[J]. Thin Walled Structures, 1991, 12: 35—49.
- [7] Friedl N, Rammerstorfer F G, Fischer F D. On the buckling of plates under global tension[A]. In: B H V Topping Ed. CST 98, Advances in Finite Element Procedures and Techniques [C]. Vol 1. Edinburgh, Scotland, UK: Civil Comp Press, 1998, 73—77.
- [8] Gueydan V, Elias A, Onno F, et al. Modelisation numerique d un flambage sur des toles en traction [A]. In: Actes du 12^e Congres de Mecanique [C]. Vol 2. Strasbourg, 1995, 81—84.

- [9] Kim M Y, Chang S P, Kim S B. Spatial stability analysis of thin_walled space frames[J]. Int J Numer Meth Engng, 1996, 39: 499—525.

On the Stability Analysis of Plates and Shells Using a Quadrilateral, 16_Degrees of Freedom Flat Shell Element DKQ16

ZHENG Chang_liang¹, LI Li_hua², ZHONG Wan_xie¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian 116023, P. R. China;

2. Department of Mathematics_Physics, Hebei Normal Institute of Science
and Technology, Qinhuangdao 066004, P. R. China)

Abstract: The linear buckling problems of plates and shells were analysed using a recently developed quadrilateral, 16_degrees of freedom flat shell element (called DKQ16). The geometrical stiffness matrix was established. Comparison of the numerical results for several typical problems shows that the DKQ16 element has a very good precision for the linear buckling problems of plates and shells.

Key words: plate and shell structure; stability; flat shell element