

# 任意形状孔口单边裂纹问题的 边界配位解法\*

王元汉 李春植

(华中理工大学力学系, 1988年11月10日收到)

## 摘 要

本文提出了一组复应力函数, 采用边界配位方法对不同形状孔口(包括圆、椭圆、矩形及菱形孔口)的单边裂纹平板的应力强度因子进行了计算。计算结果表明, 对长度和宽度远大于孔口和裂纹几何尺寸的试件, 配位法与用其他方法所得的无限大板含圆或椭圆孔边裂纹问题的解符合得很好。同时, 对其他孔口问题, 特别是有限大板情形, 本文给出了一系列计算结果。本文所提出的函数及计算过程可以应用于任意形状孔口单边裂纹平板的计算。

## 一、引 言

在工程结构中, 由于孔口引起的应力集中, 裂纹常常由此产生而发展。同时, 工程实际中为防止裂纹的进一步扩展, 常在裂纹端点钻孔止裂。因此, 孔边裂纹的研究对工程实际具有一定的意义。

孔边裂纹的分析可以采用解析方法和数值方法两条途径。例如, 圆孔单边裂纹问题曾用不同方法研究过, 其中包括 Bowie<sup>[1]</sup>采用的保角变换方法, Tweed 和 Rooke<sup>[2]</sup>采用的 Mellin 变换技术, Rubinstein 和 Sadegh<sup>[3]</sup>采用的位错密度分布函数的方法。对于椭圆孔单边裂纹问题, Berezhnitskii<sup>[4]</sup>采用积分方程的方法研究过。在这些解法中, 他们都是讨论的无限大板问题。而且对于不同形状的孔口裂纹问题, 变换函数及求解方法一般并不相同。

作为最普遍应用的一种数值方法——有限元法, 可以用来求解不同的孔边裂纹问题。但由于孔口及裂纹尖端附近的应力集中, 往往在这些区域要细分网格, 从而使计算准备工作和计算时间增大, 而计算精度往往并不理想。

边界配位法是计算应力强度因子的一种有效方法, 其关键在于假设恰当的应力函数。采用 Williams 应力函数, Gross 等人计算了单边裂纹拉伸试件, 三点弯曲试件等一系列问题的应力强度因子<sup>[4-9]</sup>。采用 Kobayashi 等提出的复应力函数, 中心裂纹拉伸, 斜裂纹拉

\* 薛大为推荐。

伸, 孔边两条裂纹拉伸等一系列有限大板的应力强度因子计算得到了满意的结果<sup>[7~9]</sup>. 边界配位法计算过程简便, 精度较高, 特别适合于有限大板.

本文提出了一组复应力函数, 用边界配位法计算不同的孔口单边裂纹问题, 在工程实际中有一定的意义.

## 二、计算公式

按照 Muskhelishvili 的弹性力学的复变函数理论<sup>[10]</sup>, 当不计体力时, 弹性力学平面问题的应力和位移分量可以由复变解析函数  $\phi(z)$ ,  $\omega(z)$  决定:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\operatorname{Re}[\Phi(z)] \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(z) + (z-z)\Phi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$2G(u+iv) = \kappa\phi(z) - \omega(z) - (z-z)\overline{\Phi(z)} \quad (2.2)$$

其中

$$\Phi(z) = \phi'(z)$$

$$\Omega(z) = \omega'(z)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面应变}) \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

对于多连通体, 函数还应当满足位移单值条件:

$$\kappa \oint \Phi(z) dz - \oint \Omega(\bar{z}) d\bar{z} = 0 \quad (2.3)$$

而力的边界条件可用应力或合力来表示. 其中合力边界条件的形式为

$$\Phi(z) + \omega(\bar{z}) + (z-\bar{z})\Phi(z) = -f_x + if_y + C_j \quad (\text{在 } L_j \text{ 上}) \quad (2.4)$$

这里  $C_j$  对于每一条围道  $L_j$  来说, 是某一常数. 合力分量  $f_x$  和  $f_y$  由下列积分式决定:

$$f_x - if_y = \int_{z_0}^a (X_n + iY_n) ds \quad (\text{在 } L_j \text{ 上}) \quad (2.5)$$

式中  $z_0$  是在  $L_j$  上某一选定的点,  $X_n$ ,  $Y_n$  是在任意边界点  $z$  的应力分量.

考察如图 1 所示的含孔边裂纹平板, 外边界承受任意载荷. 为简单起见, 假设孔和裂纹表面无载荷作用. 根据裂纹尖端点附近应力的奇异性质和裂纹表面无载荷作用的特点, 复应力函数可假设为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= G(z)F_1(z) + F_2(z) \\ \omega(z) &= G(z)F_1(z) - F_2(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中

$$G(z) = \sqrt{z(z-a)}$$

$$F_1(z) = \sum_{k=-N}^M E_k z^{k-1} \quad (2.7)$$

$$F_2(z) = \sum_{k=-N}^M F_k z^k$$

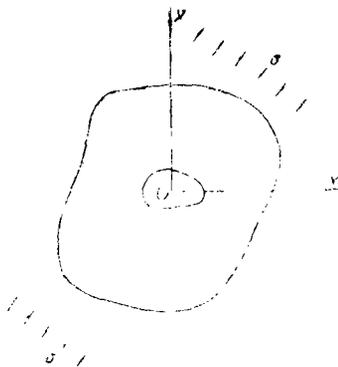


图1 任意孔口单边裂纹平板

上式中  $a$  是从坐标原点到裂纹尖端的距离, 即等效裂纹长度;  $M$  和  $N$  是正整数;  $E_k$  和  $F_k$  是待定系数, 在一般情形为复数.

由(2.6), (2.7)式, 可得

$$\Phi(z) = \sum_{k=-N}^M E_k \frac{z^{k-1}}{\sqrt{z(z-a)}} [kz - (k-0.5)a] + \sum_{k=-N}^M F_k k z^{k-1} \quad (2.8)$$

合力边界条件(2.4)式可写为

$$\begin{aligned} -f_y + if_x = & \sum_{k=-N}^M E_k [\sqrt{z(z-a)} z^{k-1} \\ & + \sqrt{\bar{z}(\bar{z}-a)} \bar{z}^{k-1}] + \sum_{k=-N}^M F_k (z^k - \bar{z}^k) \\ & + (z - \bar{z}) \operatorname{conj} g \left\{ \frac{1}{\sqrt{z(z-a)}} \sum_{k=-N}^M E_k [kz - (k-0.5)a] z^{k-1} \right. \\ & \left. + \sum_{k=-N}^M F_k k z^{k-1} \right\} - C_j \quad (\text{在 } L_j \text{ 上}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

对于边界上每一个给定点,  $f_x$  和  $f_y$  可由(2.5)式确定, 由(2.9)式得到两个含未知系数  $E_k$ ,  $F_k$  和未知常数  $C_j$  的线性方程. 如果在边界上取  $L$  个点, 则可得到  $2 \times L$  个方程的线性方程组. 在内、外边界分别选一基准点, 将各个边界上其他点对应的方程两边减去基准点方程的两边, 从而可将  $C_j$  消去. 所得方程组连同位移单值条件(2.3)式可用以确定  $E_k$  和  $F_k$ . 如果方程数与未知数相等, 则待定系数可唯一确定. 通常为得到更好的效果, 可选取较多的边界点, 用最小二乘法确定这些未知系数.

当  $E_k$ ,  $F_k$  确定以后, 函数  $\Phi(z)$  可由(2.8)式计算. 据应力强度因子公式<sup>[11]</sup>

$$K_{\text{I}} - iK_{\text{II}} = \lim_{z \rightarrow a} [2\sqrt{2\pi(z-a)} \Phi(z)] \quad (2.10)$$

可以确定  $K_{\text{I}}$  和  $K_{\text{II}}$ . 将(2.8)式代入上式, 得

$$K_{\text{I}} - iK_{\text{II}} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-N}^M E_k a^{k-0.5} \quad (2.11)$$

### 三、圆孔边裂纹 I 型问题

为了和有关结果进行比较, 首先考虑如图 2 所示矩形平板中含圆孔单边裂纹的单向拉伸问题. 由于对称性, 可取其一半进行计算, 且位移单值条件(2.3)式自动满足. 配点取于圆孔边界和平板的外边界, 点的分布可循某一规律. 在以下计算中, 配点在每条边界等距离配置, 如图 3 所示.

#### (1) 模拟无限大板

为和无限大板计算结果进行比较, 取图 2 中板长  $2h$  和板宽  $2b$  远大于圆孔半径  $r$  及裂纹长度  $l$ . 有关数据如下:

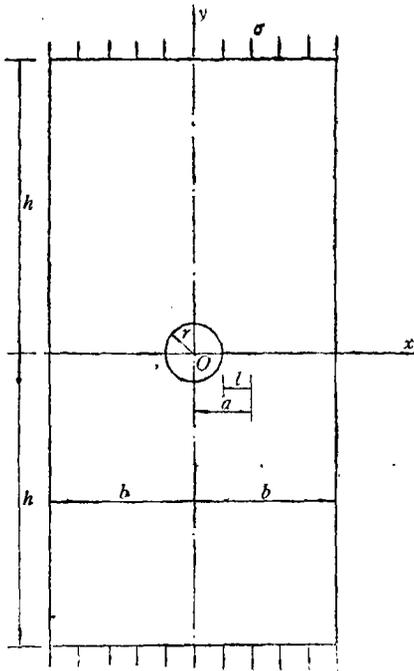


图2 圆孔单边裂纹的矩形平板

板的半长和半宽  $h=b=1$   
 孔的半径  $r=0.01$   
 各段边界配点数目  $N_1=36$   
 $N_2=N_3=N_4=30$   
 应力函数级数项数  $M=N=20$

对于图2所示I型断裂问题，应力函数的系数  $E_k, F_k$  为实数。如将应力强度因子  $K_I$  表

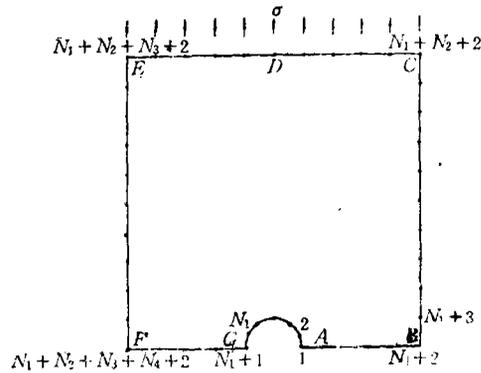


图3 边界配点分布

示为

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \tag{3.1}$$

则其系数Y为

$$Y = \sum_{k=-N}^M \sqrt{2} E_k a^{k-1} / \sigma \tag{3.2}$$

对于不同的裂纹长度与圆孔半径之比， $l/r$  和不同的板宽与有效裂纹长度之比， $b/a$ ，由(3.2)式所得Y值与 Rubinstein 等人用位错密度分布函数的方法所得无限大板计算结果进行对比并列于表1和表2。由表1可见，对于不同长度的裂纹，用两种方法所得的结果都符合得很好。由表2可见，当  $b/a$  增加时，配位法的计算值逐渐趋近于 Rubinstein 等的无限大板计算结果。

表1  $b/a$  比值很大时的应力强度因子系数Y

$l$	$a$	$l/r$	$b/a$	Y by Eq.(3.2)	Y in Ref.[3]	diff. (%)
0.001	0.001	0.1	90.909	0.8339	0.8355	-0.19
0.002	0.012	0.2	83.333	0.9704	0.9688	0.17
0.005	0.015	0.5	66.667	0.9979	0.9971	0.08
0.01	0.02	1.0	50.000	0.9240	0.9228	0.13
0.02	0.03	2.0	33.333	0.8421	0.8410	0.13
0.06	0.07	6.0	16.667	0.7646	0.7619	0.35
0.1	0.11	10.0	9.091	0.7469	0.7427	0.56

(2) 有限尺寸影响

边界配位法适用于解各种有限尺寸平板问题。为了考察有限尺寸的影响，对不同有效裂纹长度与宽度之比， $a/b$ ，和不同裂纹长度与圆孔半径之比， $l/r$ ，的应力强度因子进行了计

表 2

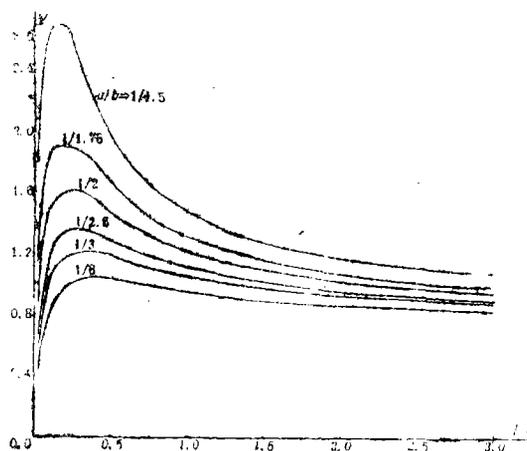
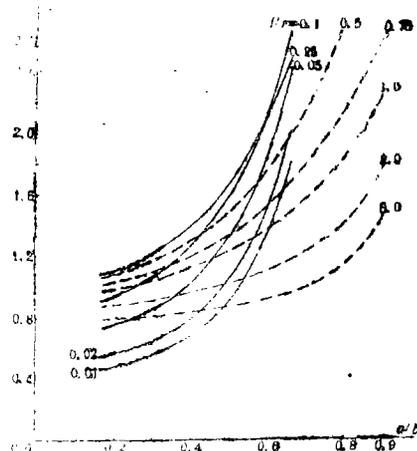
 $b/a$ 比值变化对应力强度因子系数 $Y$ 的影响

$l/r$	$r$	$l$	$a$	$b/a$	$Y$ by Eq.(3.2)	$Y$ in Ref.[3]	diff.(%)
6	0.01	0.06	0.07	14.286	0.7646	0.7619	0.35
	0.0075	0.045	0.0525	19.476	0.7638		0.24
	0.005	0.03	0.035	28.571	0.7632		0.17
	0.0025	0.015	0.0175	57.143	0.7628		0.12
	0.001	0.006	0.007	142.857	0.7627		0.11
10	0.01	0.1	0.11	9.091	0.7469	0.7427	0.56
	0.005	0.05	0.055	18.182	0.7440		0.18
	0.0025	0.025	0.0275	36.364	0.7433		0.09
	0.001	0.01	0.011	90.909	0.7431		0.05
	0.0005	0.005	0.0055	181.818	0.7430		0.04

算。在第一种情形， $l/r$ 保持不变， $a/b$ 从1/1.5变到1/6；在第二种情形， $a/b$ 保持不变， $l/r$ 从0.01变到6。计算结果示于图4和图5。

由图4可见，对于每一个给定 $a/b$ 比值，当 $l/r$ 开始增加时，应力强度因子值在开始时上升得很快；当到达某一最大值后逐渐下降；随着 $l/r$ 的增大，趋于某一稳定值。该稳定值对应仅含中心裂纹的拉伸平板情形。当试件长度和宽度远大于有效裂纹长度，即 $a/b$ 值较小时，例如 $a/b=1/6$ ，图4中对应的曲线与文献[12]中图107的无限大板的结果接近。

图5表明，当 $l/r$ 一定时，随着 $a/b$ 比值的减少，应力强度因子值也不断减少。在无限大板情形， $a/b \rightarrow 0$ ，所对应的应力强度因子值应比有限大板情形小。

图4  $l/r$ 比值对有限大板应力强度因子系数 $Y$ 的影响图5  $a/b$ 比值对有限大板应力强度因子系数 $Y$ 的影响

### (3) 收敛性讨论

为了分析用配位法计算孔边裂纹问题的收敛性，采用不同的边界配点数和不同的级数项数进行计算。在所有讨论收敛性的计算中，取 $b=h=1$ ， $r=l=0.1$ 。分别改变正幂次级数的项数，负幂次级数的项数，孔边配点数和外边界配点数，计算结果示于图6~图9。由图可见，当项数或配点数大于某一数值时，计算结果是稳定的，并且具有较好的精度。

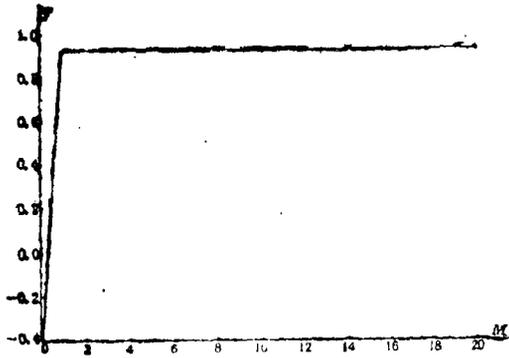


图6 正幂次级数项数M与应力强度因子系数Y的关系

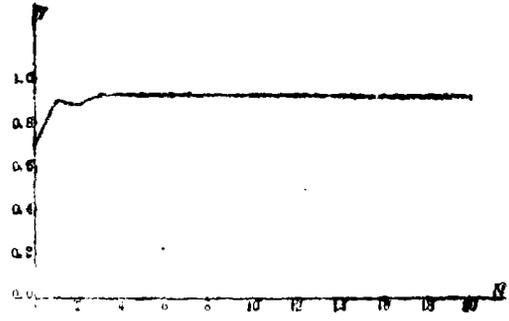


图7 负幂次级数项数N与应力强度因子系数Y的关系

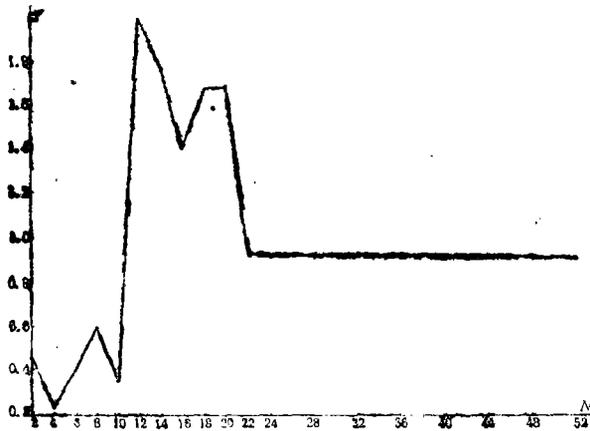


图8 孔边配点数N<sub>1</sub>与应力强度因子系数Y的关系

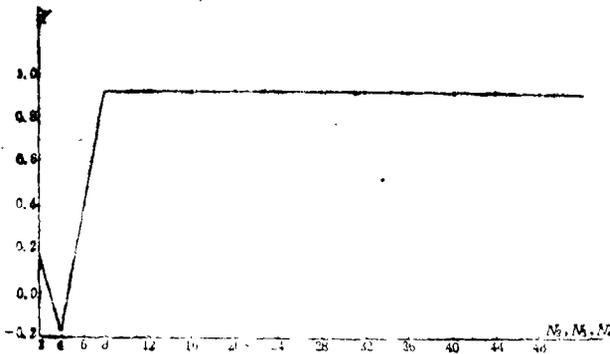


图9 外边界配点数N<sub>2</sub>, N<sub>3</sub>, N<sub>4</sub>与应力强度因子系数Y的关系

#### 四、不同形状孔口边裂纹问题

上述计算过程容易用来计算任意形状的孔口边裂纹问题，如在工程实际中常见的椭圆、矩形、菱形孔的边裂纹情形。下面分别介绍其计算结果。

##### (1) 椭圆孔口边裂纹问题

如图10所示，一承受拉伸的有限大板含有椭圆孔口边裂纹。对无限大板情形，Berezhni-

tskii 用积分方法得到了应力强度因子的计算结果<sup>[13,14]</sup>。为了与其结果进行对比,选取参数

$$s = \frac{a}{a+d} \quad (4.1)$$

式中有关尺寸 $a, d$ 如图10所示。应力强度因子 $K_I$ 可表示为 $s$ 和 $c/d$ 的函数:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F_I(s, c/d) \quad (4.2)$$

当 $c/d \rightarrow 0$ 时,该问题简化为中心裂纹问题,裂纹长度为 $a+2d$ 。按无限大板应力强度因子计算公式,可得

$$K_I = \sigma \sqrt{a/2+d} \quad (4.3)$$

如采用(4.2)式的表示形式,则应力强度因子系数为:

$$F_I = \sqrt{1/2+d/a} \quad (4.4)$$

对于三种不同形状的椭圆孔情形,采用边界配置法所得到的 $F_I$ 与 $s$ 之间关系的曲线如图11所示。计算中取试件尺寸为: $h=b=1$ ,椭圆水平半轴长度 $d=0.01$ ,两半轴之比为 $c/d$

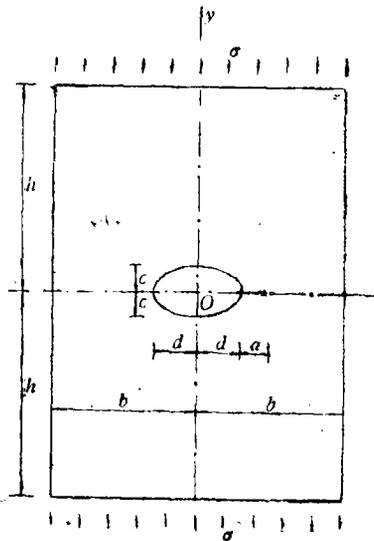


图10 椭圆孔单边裂纹的矩形平板

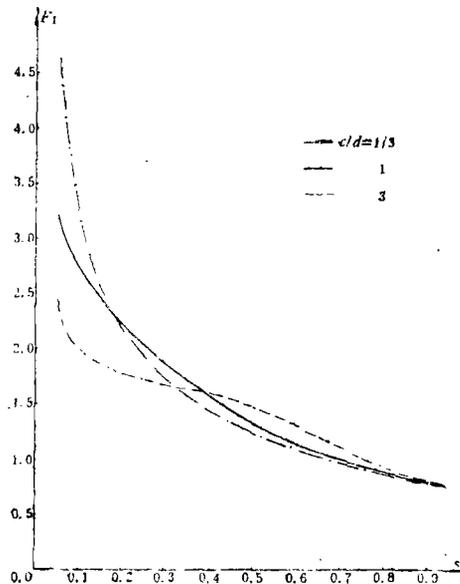


图11 椭圆孔边裂纹板的 $F_I$ 与 $s$ 和 $c/d$ 之间的关系

$=1/3, 1, 3$ 。

考虑到试件的几何尺寸比椭圆孔口及其边裂纹尺寸大得多,故可近似看作无限大板情形。将图11与文献[14]中根据 Berezhnitskii 的结果所绘的图形相比,它们之间符合得较好。仅当 $s$ 很小时,即边裂纹很短的情形,它们之间才有一定的差别。

由(4.4)式可见,当 $d/a \rightarrow 0$ 时, $F_I \rightarrow 1/\sqrt{2} = 0.7071$ 。这对应 $s \rightarrow 1$ 即中心裂纹的情形。对椭圆孔口边裂纹平板来说,当 $s \rightarrow 1$ 时,裂纹长度远比椭圆孔的几何尺寸大,所以孔口的形状对裂纹尖端处的应力强度因子影响甚微,这时 $F_I$ 应趋于极限值——0.7071。图11反映了这种趋势。

## (2) 矩形孔口边裂纹问题

如图12所示,一受拉伸平板含有一条矩形孔边裂纹。板的半长和半宽为: $h=b=1$ ;矩形孔口的半宽为 $d=0.01$ ;孔口长宽之比为, $c/d=1/4, 1, 2$ 。

取不同的裂纹长度，对应由(4.1)式算得的不同  $s$  值，应力强度因子系数  $F_I$  的值可用边界配位法算出。其关系曲线示于图13。由图可见，当  $s > 0.3$  时，不同尺寸孔口所算得的  $F_I$  值相差不多，特别是当  $s \rightarrow 1$  时， $F_I$  都趋于  $1/\sqrt{2}$  这一数值。这是由于应力强度因子是反映裂纹尖端应力场的一个特征量。当裂纹长度比孔口几何尺寸大得多时，根据圣维南原理，孔口的影响可以忽略不计。

### (3) 菱形孔口边裂纹问题

如图14所示，一受拉伸平板含有一条菱形孔边裂纹。平板的半长和半宽为： $h=b=1$ ；菱形一条对角线半长  $d=0.01$ ；菱形一内角  $2\beta=90^\circ, 45^\circ, 0^\circ$ 。对应  $2\beta=90^\circ$  的情形，菱形为正方形；当  $2\beta=0^\circ$  时，这是一条裂纹的情形。对应不同的裂纹长度，由计算结果所画出的  $F_I \sim s$  关系曲线示于图15。

由图15可见，对应不同形状菱形孔口的曲线都很接近，特别是对于  $2\beta=0^\circ$  和  $45^\circ$  两种情形，两条裂线几乎重合。这与前面研究过的矩形孔口边裂纹情形有所不同。在矩形孔口平板中，矩形角点也将产生应力集中。对于右半边平板而言，除裂纹尖端点外，还有两个矩形角点的应力奇异点。特别是当裂纹长度较短时，这些应力奇异点附近的应力场将会互相产生较大的影响，从而使总的应力分布变得更为复杂了。在菱形孔口边裂纹情形中，对于右半边平

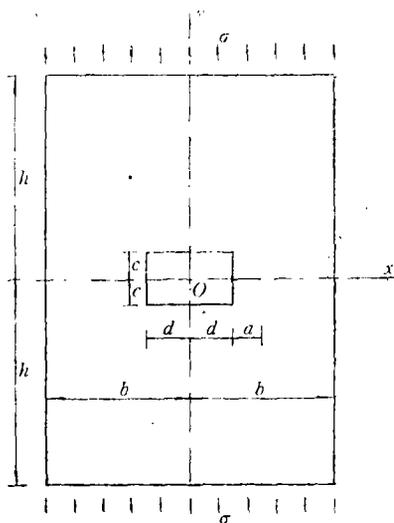


图12 矩形孔单边裂纹的矩形平板

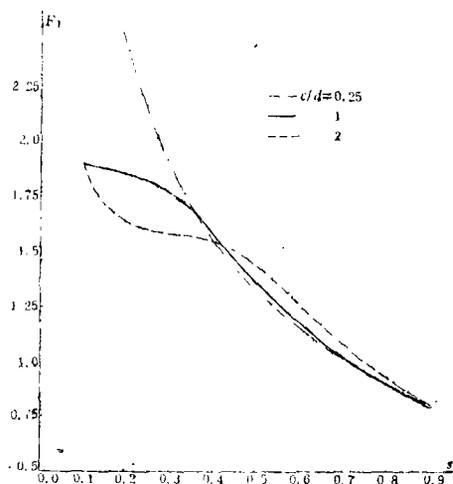


图13 矩形孔边裂纹板的  $F_I$  与  $s$  和  $c/d$  之间的关系

板而言，应力集中仅在裂纹尖端形成，因而孔口的形状对裂纹尖端处的应力分布影响不大，并与中心裂纹情形比较接近。

由此可见，对于菱形孔口边裂纹问题，当  $2\beta$  不大时，可以用中心裂纹板的结果进行近似计算。

## 五、结 论

1. 本文提出了一组复应力函数，它适合于用边界配位法解不同形状的孔口边裂纹问题。本文所算的例子虽然都是 I 型断裂情形，如果进一步考虑位移单值条件，不难将该复应力函数及计算过程推广到复合型问题。

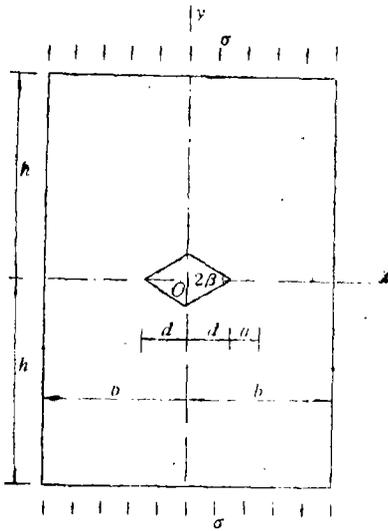
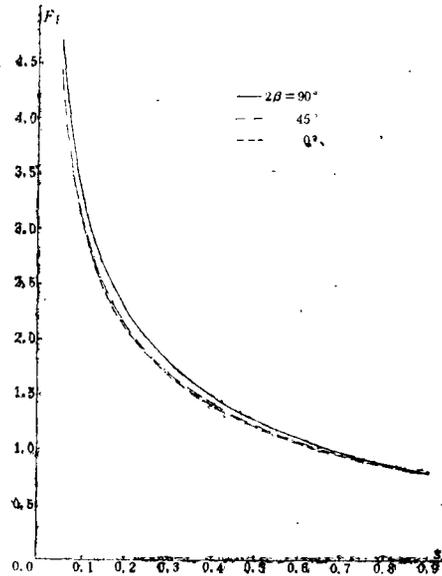


图14 菱形孔单边裂纹的矩形平板

图15 菱形孔边裂纹板的 $F_I$ 与 $s$ 和 $2\beta$ 之间的关系

2. 本文计算的圆孔和椭圆孔边裂纹问题，其结果与用其他方法所得的无限大板结果是一致的，说明本文所提出的应力函数和计算过程可以有效地计算这一类孔口边裂纹的应力强度因子。同时，本文方法适用于有限大板的计算，以及矩形、菱形及其他形状孔口试件和载荷的断裂问题，这些结果在工程实际中有参考价值。

3. 对圆孔边裂纹问题的计算结果表明，采用不同的配点数和级数项数，计算结果都是稳定的。

4. 边界配位法是一种计算准确、方便实用的数值方法，其关键在于选择适当的复应力函数。而一旦选择到这样的函数，同一类型的许多问题都可能得到解决。

本文是作者在香港大学学习期间完成的，张佑啟教授、胡振威博士给予了具体指导和帮助，特此致谢！

### 参 考 文 献

- [1] Bowie, O. L., Analysis of an infinite radial cracks originating at the boundary of an infinite circular hole, *Journal Math. Phys.*, 35 (1956), 60—71.
- [2] Tweed, J. and D. P. Rooke, The distribution of stress near the tip of a radial crack at the edge of a circular hole, *International Journal of Engineering Science*, 11 (1973), 1185—1195.
- [3] Rubinstein, A. A. and A. M. Sadegh, Analysis of a crack emanating from a circular hole in a loaded plate, *International Journal of Fracture*, 32 (1986), 47—57.
- [4] Gross, B., J. E. Srawley and W. F. Brown, Stress intensity factor for a single-edge notch tension specimen by boundary collocation method, NASA TN D-2395 (1965).
- [5] Gross, B. and J. E. Srawley, Stress intensity factors for single-edge-notch specimens in bending or combined bending and tension, NASA TN D-2603 (1965).

- [ 6 ] Gross, B. and J. E. Srawley, Stress intensity factors for three point bend specimens by boundary collocation, NASA TN D-3092 (1965).
- [ 7 ] Kobayashi, A. S., R. B. Cherepy and W. C. Kinsel, A numerical procedure for estimating the stress intensity factor of a crack in a finite plate, *Journal of Basic Engineering*, **86** (1964), 681—684.
- [ 8 ] Wilson, W. K., Numerical method for determining stress intensity factors of an interior crack in a finite plate, *Journal of Basic Engineering*, **93** (1971), 685—690.
- [ 9 ] Newman, J. C., An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries, NASA, TN D-6376 (1971).
- [ 10 ] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Leyden (1953).
- [ 11 ] Kanninen, M. F., and C. H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford (1985).
- [ 12 ] Rooke, D. P. and D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Hmso (1976).
- [ 13 ] Berezhnitskii, L.T., Propagation of cracks terminating at the edge of a curvilinear hole in a plate, *Soviet Materials Science*, **2** (1966), 16—23.
- [ 14 ] Tada, H., P. C. Paris and G. R. Irwin, *Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, Pennsylvania (1973).

## The Solution of a Crack Emanating from an Arbitrary Hole by Boundary Collocation Method

Wang Yuan-han Li Chun-zhi

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

### Abstract

In this paper a group of stress functions has been proposed for the calculation of a crack emanating from a hole with different shape (including circular, elliptical, rectangular, or rhombic hole) by boundary collocation method. The calculation results show that they coincide very well with the existing solutions by other methods for a circular or elliptical hole with a crack in an infinite plate. At the same time, a series of results for different holes in a finite plate has also been obtained in this paper. The proposed functions and calculation procedure can be used for a plate of a crack emanating from an arbitrary hole.