应用数学和力学，第11卷第8期(1990年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非均匀介质中声波的远场分布的性质*

程　晋

(复旦大学数学研究所，1989年8月4日收到)

**摘　要**

本文运用泛函分析和积分方程的方法，讨论了非均匀介质中声波的远场分布的性质，并应用Тихонов正则化方法讨论了不适定的逆散射问题.

## 一、引　言

在经典的逆散射理论中，一般我们要从远场分布的信息中反构出散射物体的性质或者形状等等. 这是近年来被国内外学者广泛注意的一个研究领域. 而作为逆散射问题研究的一个方面，对远场分布的性质的研究是相当重要的. 近年来，一些学者陆续在这方面取得了一些结果，并基于这些结果提出了一些求解逆散射问题的新方法[1]~[4].

本文中，我们运用泛函分析和积分方程的方法，研究了非均匀介质中的声波，得到了一些关于远场分布的性质的结果，注意到本文中的假设比其他人所用的假设[3],[4]要弱得多，更符合实际情况. 基于这些结果，我们利用Тихонов正则化方法对不适定的逆散射问题进行了初步的研究.

## 二、问题的提出

考虑声波在具有紧支集的非均匀介质中的传播.

设 $c_0$ 为声波在非均匀介质之外的均匀介质中的传播速度，$c(x)$ 为声波在 $x$ 点处的传播速度. 由于非均匀介质具有紧支集，可设 $c(x)=c_0$，$|x|\geqslant R$，其中 $R$ 为某个正数.

在适当假设下，上述问题的数学描述为决定速度势函数 $u(x)$，其满足

$$\Delta_3 u+k^2 n(x)u=0, \qquad 在R^3中 \tag{2.1}$$

$$u(x)=\exp[ikx\cdot\alpha]+u^s(x) \tag{2.2}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r}-iku^s\right)=0, \qquad 一致地 \tag{2.3}$$

这里 $\Delta_3$ 为 $R^3$ 中的 Laplace 算子；$u^s(x)$ 为散射场；$k\geqslant 0$ 为波数；$n(x)=c_0/c(x)$；$\alpha\in\partial\Omega$

* 江福汝推荐.
上海市青年科学基金资助项目，并得到上海市科技发展基金部分资助.

为入射波方向($\partial\Omega$ 为 $R^3$ 中的单位球面)； $r=|x|$。

由我们假定，可知$B=\{x\in R^3|n(x)\neq 1\}\subset B_R$，这里$B_R=\{x|\ |x|<R\}\subset R^3$。

由[5]可知，上述问题等价于下列 Lippmann-Schwinger 积分方程

$$u(x)=\exp[ikx\cdot\alpha]-k^2\iint_{B_R}\Phi(x,y)m(y)u(y)dy \tag{2.4}$$

其中 $\Phi(x,y)=(4\pi|x-y|)^{-1}\exp[ik|x-y|]$为 $\Delta_3+k^2$ 的基本解，$m(x)=n(x)-1$。这里我们假定 $\|m\|_{L^2}\leqslant M$，$M$为正常数。

以后我们均假定 supp $m\subseteq B_R$。

远场分布 $F(\hat{x},\ k,\ \alpha)$用下列渐近式定义：

$$u^s(x)=\frac{e^{ikr}}{r}F(\hat{x},\ k,\ \alpha)+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\qquad(r\to\infty)$$

逆散射问题即是要从 $F(\hat{x},\ k,\ \alpha)$反构出位势$m(x)$。

## 三、远场分布的性质

下面我们从 Lippmann-Schwinger 方程开始讨论。

记 $m(y)=q^2(y)$，$\mathrm{Im}q\geqslant 0$（这里不要求 $m(y)$为实的）。

考虑线性算子$L$：$L^2(B_R)\to L^2(B_R)$

$$Lf=\iint_{B_R}q(x)\Phi(x,\ y)q(y)f(y)dy,\qquad f\in L^2(B_R)$$

**引理 1** $L$ 为紧算子，且 $\|L\|\leqslant 2\sqrt{\pi}/\sqrt{R}\,M$。

**证** 首先可直接验证：$\left|\iiint_{B_R}|\Phi(x,y)|^2dy\right|\leqslant\dfrac{R}{4\pi}$。

为证明引理的结论，只须估计[6]：

$$\begin{aligned}&\iint_{B_R}\iint_{B_R}|\Phi(x,y)|^2|q(x)q(y)|^2dydx\\&\leqslant\left[\iiint_{B_R}\iint_{B_R}|m(x)|^2|\Phi(x,y)|^2dydx\right]^{1/2}\\&\quad\cdot\left[\iiint_{B_R}\iint_{B}|m(y)|^2|\Phi(x,y)|^2dxdy\right]^{1/2}\leqslant\frac{R}{4\pi}M^2\end{aligned}$$

即得结论。 证毕

因此对 L-S 方程的另一形式

$$q(x)u(x)=q(x)\exp[ikx\cdot\alpha]-k^2L(qu) \tag{3.1}$$

当$k^2\leqslant\sqrt{\pi}/M\sqrt{R}$ 时有唯一解，利用 L-S 方程，我们可从(3.1)的解得到散射问题的解.注意到此时 $k^2L$ 为压缩算子。

利用 L-S 方程以及 $\Phi(x,y)$ 的渐近展开式，我们可计算远场分布$F(\hat{x},k,\alpha)$：

$$F(\hat{x},k,\alpha)=-\frac{k^2}{4\pi}\iint_{B_R}\exp[-ik\hat{x}\cdot y]m(y)u(y)dy \tag{3.2}$$

其中 $\hat{x}\in\partial\Omega$。

显然，当 $m(y)=0$ 时，$F(\hat{x},k,\alpha)=0$。

**关于远场分布，我们有下列结果。**

**定理 1** 设 $k^2\leqslant\sqrt{\pi}/M\sqrt{R}$，给定 $m(x)\geqslant 0$（或者 $m(x)\leqslant 0$），使得 $\|m\|_{L^2}\leqslant M$，$\iint_{B_R}|m(y)|dy>0$. 则对应的远场分布满足：

$$(\{F(\hat{x},k,a_n)\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}, \qquad (\text{在 } L^2(\partial\Omega)\text{ 中})$$

这里$\{a_n\}$为$\partial\Omega$上的一列互不相同的点. $\perp$表示$L^2(\partial\Omega)$中的正交补.

**注** 文[4]中有类似结果，但我们的假设要弱得多，因而证明方法也有所不同.

**证** 不妨设 $m(x)\geqslant 0$，取 $q(x)=m^{1/2}(x)\geqslant 0$.

定义向量空间 $H$:

$H=\text{span}\{q(x)j_l(k|x|)Y_l^m(\hat{x}),\ l=0,1,2,\cdots,\ -l\leqslant m\leqslant l\}$ 这里$j_l(k|x|)$为球Bessel 函数，$Y_l^m(\hat{x})$为球调和函数[7]，$\hat{x}=x/|x|\in\partial\Omega$.

$\bar{H}$为$H$在$L^2(B_R)$中的闭包，$H^{\perp}$为$\bar{H}$在$L^2(B_R)$中的正交补空间.

设 $g(\hat{x})\in L^2(\partial\Omega)$，满足：

$$\int_{\partial\Omega}F(\hat{x},k,a_n)\overline{g(\hat{x})}ds(\hat{x})=0, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

令
$$w(y)=\int_{\partial\Omega}g(\hat{x})\exp[ik\hat{x}\cdot y]ds(\hat{x})$$

利用(3.2)，我们有：

$$\iint_{B_R}q(y)u(y)q(y)w(y)dy=0$$

利用方程(3.1)，有

$$0=\iint_{B_R}(I+k^2L)^{-1}\{q(x)\exp[ikx\cdot a_n]\}q(y)w(y)dy$$

$$=\iint_{B_R}q(y)\exp[iky\cdot a_n](I+k^2L^*)^{-1}(qw)\,dy$$

这里
$$L^*h=\iint_{B_R}q(x)\Phi(x,y)q(y)h(y)dy$$

因为$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\partial\Omega$上一列互不相同的点，且$\partial\Omega$为紧的，又利用

$$\exp[iky\cdot a]=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}i^l j_l(k|y|)Y_l^m(\hat{y})Y_l^m(a)$$

我们有：

$$\tilde{w}=(I+k^2L^*)^{-1}(qw)\in H^{\perp}$$

写成形式

$$\tilde{w}+k^2L^*\tilde{w}=qw \tag{3.3}$$

利用 $w(y)$ 的表达式，有$qw\in\bar{H}$.

设 $P$ 为$L^2(B_R)$到$H^{\perp}$的投影算子，我们有：

$$Pqw=0,\ P\tilde{w}=\tilde{w}$$

因此方程(3.3)变成：$\tilde{w}+k^2PL^*\tilde{w}=0$.

又由于 $k^2\|PL^*\|<1$，则有$\tilde{w}(x)=0$，即得 $q(x)w(x)=0$.

利用条件 $\iint_{B_R}m(y)dy>0$

可知$w$在一个测度不为零的子集上为零．从 $w(y)$ 的表达式，可知 $w(y)$为解析函数．利用非零解析函数的零点测度为零的结论，可知 $w(y)=0$．

因此 $g(\hat{x})=0$，即得结论．　　证毕

用类似方法可证

**推论 1**　设$m(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)，满足：$\|m\|_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/k^2\sqrt{R}$，若 $F(\hat{x},k,\alpha)=0$，则必有 $m(x)=0$．

证明省略．

**注**　这个结论不能从[8]中的唯一性定理得到，也不可以用类似[8]中方法证得．

当 $k$，$\alpha$ 固定时，可以把 $F(\hat{x},\ k,\ \alpha)$ 看成映 $m(x)$ 到 $F(\hat{x},\ k,\ \alpha)\in L^2(\partial\Omega)$ 的一个算子 $F_\alpha^k$：

$$F_\alpha^k(m(x))=F(\hat{x},\ k,\ \alpha)\in L^2(\partial\Omega)$$

注意到这个算子是一个强非线性算子，相应的算子方程为不适定的方程．处理不适定的算子方程的一种有效方法为 Тихонов 正则化方法．这种方法已经被广泛地应用在实际问题中，为了有效地应用 Тихонов 正则化方法处理不适定的逆散射问题，我们需要对这个非线性算子的值域和零空间进行研究．因为算子的值域和零空间的性质直接关系到正则化方法的有效性[9]~[11]．

为了给出远场分布的值域的刻划，我们先证下列引理．

**引理 2**　设 $k$，$\alpha$固定，任意给定

$$\tilde{F}(\hat{x})=-\frac{k^2}{4\pi}\iint_{B_R}\exp[-ik\hat{x}\cdot y]h(y)dy$$

其中 $h\in L^2(B_R)$，且$\|h\|_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/R/k^2$，则存在位势 $m(x)\in L^2(R^3)$，$\operatorname{supp} m\subseteq B_R$，$\|m\|_{L^2}\leqslant 2\|h\|_{L^2}$，使得

$$F_\alpha^k(m)=\tilde{F}(\hat{x}),\qquad \hat{x}\in\partial\Omega$$

**注**　此时$m(x)$未必为实函数．

**证**　首先构造 $u(x)$：

$$u(x)=\exp[ikx\cdot\alpha]-k^2\iint_{B_R}\Phi(x,y)h(y)dy$$

利用　$$\left|\chi_{B_R}(x)k^2\iint_{B_R}\Phi(x,y)h(y)dy\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

(这里$\chi_{B_R}(x)$为$B_R$的特征函数)，我们有 $|u(x)|\geqslant 1/2$，$x\in B_R$．

直接验证　$m(x)=h(x)/u(x)$，$x\in B_R$ 即为所求．　　证毕

以 $R(F_\alpha^k)$ 和 $N(F_\alpha^k)$ 分别记算子 $F_\alpha^k$ 的值域和零空间：

$$R(F_\alpha^k)=\left\{F_\alpha^k(m)\mid\ m\in L^2(B_R),\ \|m\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}\right\}$$

$$N(F_\alpha^k)=\left\{m(x)\mid\ F_\alpha^k(m)=0,\ \|m\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}\right\}$$

我们有下列结论：

**定理 2**　$R(F_\alpha^k)^\perp=\{0\}$．

**证**　取 $m(x)\in L^2(B_R)$，$m(x)\geqslant 0$，

$$\iint_{B_R}m(x)dx>0,\ \text{且}\ k^2\|m\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{R}}$$

根据定理 1 知：$(\{F(\hat{x},k,\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}$. 又利用 L-S 方程以及类似引理 1 的估计，我们有

$$\|mu\|_{L^2}\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}$$

又由引理 2 知存在位势 $m_n(x)$，使得：

$$F_\alpha^k(m_n)=F(\hat{x},k,\alpha_n),\qquad (n=1,2,\cdots)$$

且 $$\|m_n\|_{L^2}\leqslant 2\|mu\|_{L^2}\leqslant \frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}$$

因而我们有 $R(F_\alpha^k)^{\perp}=\{0\}$. 证毕

从引理 2 推导过程，易知下述结论成立.

**定理 3** $N(F_\alpha^k)\neq\{0\}$.

证明省略.

**定理 4** 若 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\partial\Omega$ 上一列互不相同的点，则有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}N(F_{\alpha_n}^k)=\{0\}$.

**证** 设 $m(x)\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}N(F_{\alpha_n}^k)$. 由于 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\partial\Omega$ 上一列互不相同的点，$\partial\Omega$ 为紧集，所以 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必有聚点. 又因为 $F(\hat{x},k,\alpha)$ 为关于 $\alpha\in\partial\Omega$ 的解析函数[12]，所以必有

$$F(\hat{x},k,\alpha)=0,\ \hat{x}\in\partial\Omega,\ \alpha\in\partial\Omega$$

由[8]中唯一性定理，立即可得：$m(x)=0$.

即得结论. 证毕

下面我们讨论当非均匀介质的分布为球形层状时，远场分布的性质. 此时 $m(x)$ 仅依赖于 $|x|$，远场分布具有一些好的性质.

**引理 3** 设 $m(|x|)\in L^2(B_R)$，$\|m_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/R/k^2$，则对应的远场分布成立：

$$F(\hat{x},k,A\alpha)=F(A'\hat{x},k,\alpha),\qquad x,\ \alpha\in\partial\Omega$$

其中 $A$ 为 $R^3$ 中一正交变换，$A'$ 为 $A$ 的转置.

**证** 首先注意到 $m(|x|)=m(|Ax|)$, $\qquad x\in R^3$

$$u(x,k,A\alpha)=\exp[ikx\cdot A\alpha]-k^2\iint_{B_R}\Phi(x,y)m(|y|)u(y,k,A\alpha)dy$$

$$=\exp[ikA'x\cdot\alpha]-k^2\iint_{B_R}\Phi(x,y)m(|y|)u(y,k,A\alpha)dy$$

令 $\tilde{x}=A'x$，则有：

$$u(A\tilde{x},k,A\alpha)=\exp[ik\tilde{x}\cdot\alpha]-k^2\iint_{B_R}\Phi(\tilde{x},\tilde{y})m(|\tilde{y}|)u(A\tilde{y},k,A\alpha)d\tilde{y}$$

利用L-S方程的唯一可解性，可得

$$u(Ax,k,A\alpha)=u(x,k,\alpha),\qquad x\in R^3,\ \alpha\in\partial\Phi$$

利用远场分布的表达式：

$$F(\hat{x},k,A\alpha)=-\frac{k^2}{4\pi}\iint_{B_R}\exp[-ik\hat{x}\cdot y]m(|y|)u(y,k,A\alpha)dy$$

令 $y=A\tilde{y}$，我们有

$$F(\hat{x},k,A\alpha)=-\frac{k^2}{4\pi}\iint_{B_R}\exp[-ikA'\hat{x}\cdot\tilde{y}]m(|\tilde{y}|)u(A\tilde{y},k,A\alpha)d\tilde{y}$$

$$=-\frac{k^2}{4\pi}\iint_{B_R}\exp[-ikA'\hat{x}\cdot\tilde{y}]m(|\tilde{y}|)u(\tilde{y},k,\alpha)d\tilde{y}$$

$$=F(A'\hat{x},k,\alpha)$$

即得结论. 证毕

**定理 5** 若 $m_i(x)$, $i=1$, 2 仅依赖于 $|x|$, 且 $\|m_i\|_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/R/k^2$, $F^k_\alpha(m_1)=F^k_\alpha(m_2)$. 则必有 $m_1(x)=m_2(x)$.

**证** 设对应 $m_i(x)$ 的远场分布为 $F_i(\hat{x},k,\alpha)$, $i=1$, 2. 则根据假设, 我们有:

$$F_1(\hat{x},k,\alpha)=F_2(\hat{x},k,\alpha)$$

设 $A$ 为 $R^3$ 中任一正交变换, 由引理3的结论, 我们知

$$F_1(\hat{x},k,A\alpha)=F_2(\hat{x},k,A\alpha)$$

所以我们必有:

$$F_1(\hat{x},k,\theta)=F_2(\hat{x},k,\theta),\qquad \hat{x}\in\partial\Omega,\ \theta\in\partial\Omega$$

又因为 $\|m_i\|_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/R/k^2$, 所以 L-S 方程唯一可解.

由[8]中结论立即可得 $m_1(x)=m_2(x)$. 证毕

这个定理的结论, 使得对球形层状分布的非均匀介质的逆散射问题可用较简单的方法处理.

**推论 2** 若 $m(x)\in N(F^k_\alpha)$, $m(x)$ 仅依赖于 $|x|$, 则必有 $m(x)=0$, $x\in R^3$.

在结束这节之前, 我们叙述一个关于算子 $F^k_\alpha$ 的结论, 这个结论是容易得到的.

**定理 6** 算子 $F^k_\alpha$ 在 $\{m|\,\|m\|_{L^2}\leqslant\sqrt{\pi}/R/k^2\}$ 上是连续的非线性算子.

证明省略.

## 四、逆散射问题

下面我们考虑一类不适定的逆散射问题, 即给定 $k$, $\alpha_n$, $n=1$, 2, $\cdots$, $N$. 要从 $\{F(\hat{x},k,\alpha_n)\}_{n=1}^N$ 反构出位势 $m(x)$.

从 $F(\hat{x},k,\alpha_n)$ 的表达式中可知 $F(\hat{x},k,\alpha_n)$ 为一个关于 $\hat{x}\in\partial\Omega$ 的解析函数, 因此在 $\underbrace{L^2(\partial\Omega)\times\cdots\times L^2(\partial\Omega)}_{N}$ 中 $R(F^k_{\alpha_1})\times\cdots\times R(F^k_{\alpha_N})$ 是非闭的. 所以这个问题是一个典型的不适定问题[9].

按 Тихонов 正则化方法, 上述问题可用下列泛函在某个集合 $U$ 上的极小值问题来代替.

$$T(m)=\sum_{n=1}^N\|F^k_{\alpha_n}(m)-F_n\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

其中 $F_n$ 为已知 $\partial\Omega$ 上的函数.

$$T_0=\min_{m\in U}T(m)\geqslant 0$$

显然, 若上述反问题的解 $m_0(x)\in U$, 则有 $T_0=0$. 这样上述逆散射问题可化为一个求泛函 $T$ 的极小值问题. 在应用过程中, 我们通常取 $U$ 为 $L^2(B_R)$ 中的紧集, 在适当条件下,

拟解（达到泛函极小的函数）是唯一的，并且连续依赖于$F_n(\hat{x})$[9]，即这个泛函极小问题是一个稳定的泛函极小问题，关于拟解的近似计算可见[9]。

当非均匀介质为球形层状分布时，从定理5，6可知，上述逆散射问题只须取$N=1$即可。此时泛函极小问题为：求 $T=\|F(\hat{x},k,\alpha)-F_1(\hat{x})\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$ 在 $U_1$ 上的极小值。这里

$$U_1=\{m(x)\,|\,m(x)\text{仅依赖于}|x|,\ m(x)\in U,\ U\text{为}L^2(B_R)\text{的某个紧集}\}$$

关于上述逆散射问题，还有许多问题有待于讨论。

作者感谢李明忠教授，侯宗义教授所给予的鼓励和帮助。

## 参 考 文 献

[1] Colton, D., Far field patterns for the impendence boundary value problem in acoustic scattering, *Applicable Analysis*, **16** (1983), 131—139.

[2] Colton, D. and A. Kirch, Dense sets and far field patterns in acoustic wave propagation, *SIAM J. Math. Anal.*, 15 (1984), 996—1006.

[3] Colton, D. and P. Monk, The inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves in a penetrable medium, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **40** (1987), 189—212.

[4] Colton, D., Dense sets and far field patterns for acoustic waves in an inhomogeneous medium, *Proc. Edinourgh Math. Soc.*, **31** (1988), 401—407.

[5] Yagle, Andrew E., Differential and integral methods for multidimensional inverse scattering problems, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 2584—2591.

[6] Reed, M. and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, I. Functional Analysis, Academic Press, New York (1972).

[7] Gilbert, R. P., *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, London (1969).

[8] Ramm, A. G., Multidimensional inverse problems and completeness of the products of solutions to PDE, *J. Math. Anal. Appl.*, **134** (1988), 211—253.

[9] Tikhonov, A. and V. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington (1977).

[10] 程晋，不适定问题的Тихонов正则化方法的改进，数学杂志，**9**，1 (1989)，13—22

[11] 程晋，Hilbert空间族中 Тихонов 正则化的 Arcangeli 方法的渐近精确阶的估计，高校应用数学学报，**2**,3 (1987)，400—409.

[12] Ramm, A. G., *Scattering by Obstacles*, Reidel, Dordrecht (1986).

# Some Properties of Far Field Patterns of Acoustic Waves in an Inhomogeneous Medium

Cheng Jin

(*Mathematics Institute, Fudan University, Shanghai*)

**Abstract**

In this paper, by using functional analysis and integral equation method, we obtain some results about the properties of far field of acoustic waves in an inhomogeneous medium. And we also discuss some ill-posed inverse scattering problems by Tikhonov regularization method.