应用数学和力学，第11卷第8期（1990年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Bessel–Neumann混合型方程特征根系的求解方法

杨文熊 顾尔祚 朱 敏

（上海交通大学）（中国科学院力学研究所）

（何友声推荐，1989年7月22日收到）

摘 要

本文讨论了Bessel-Neumann混合型方程特征根系$\{\lambda_i\}$（$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2\cdots$）的求解法问题。给出了计算特征根系的表达式和最小根的取值方法。这种计算方法的优点是不用多位的 Bessel 函数表，也不需要计算机就能快速地计算出特征根系$\{\lambda_i\}$并具有较高的计算精度。

一、问题的提出

在数学物理微分方程的求解过程中，经常遇到齐次的 Bessel-Neumann 混合型方程特征根系$\{\lambda_i\}$的求解问题。例如图1中的两同心圆柱面间充满粘性流体，当内圆柱面以角速度ω突然旋转后带动流体一起运动，这是一种 Couette 流，它的周向速度v满足下列方程

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{v}{\xi^2} \tag{1.1}$$

在给定的起始条件和边界条件下可解得流速分布[1]：

$$v=\sum_{i=1}^{\infty}A_i(a\lambda_i)[J_1(\lambda_i\xi)+\beta_iN_1(\lambda_i\xi)]\exp[-\lambda_i^2\tau]+v_s(\xi;\omega,R_1,R_2) \tag{1.2}$$

式中$a=R_2/R_1>1$，$\xi=r/R_1$，$\tau=t\nu/R_1^2$ 分别表示无量纲的半径比，距离和时间；A_i为由初始条件确定的待定系数；v_s是定常的速度分布[2]；λ_i和β_i是由下列边界条件确定的第i组根：

$$[J_1(\lambda_i\xi)+\beta_iN_1(\lambda_i\xi)]_{\xi=1}=0,\quad [J_1(\lambda_i\xi)+\beta_iN_1(\lambda_i\xi)]_{\xi=a}=0 \tag{1.3}$$

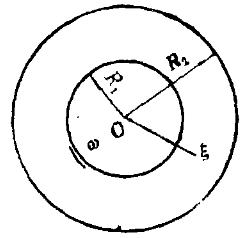

图 1

其中J_1为一阶的第一类 Bessel 函数，N_1为一阶的 Neumann 函数。方程组(1.3)有解，必须要满足下式

$$J_1(\lambda_i)N_1(a\lambda_i)-J_1(a\lambda_i)N_1(\lambda_i)=0 \tag{1.4}$$

又如空心圆柱体的径向振动问题需要求解λ_i的方程：

$$J_0(a\lambda_i)N_1(b\lambda_i)-J_1(b\lambda_i)N_0(a\lambda_i)=0 \tag{1.5}$$

其中a和b分别是内外柱的半径。此外还有：

$$J_1(\lambda_i)N_0(a\lambda_i)-J_0(a\lambda_i)N_1(\lambda_i)=0 \tag{1.6}$$

以及

$$J_0(\lambda_i)N_0(a\lambda_i)-J_0(a\lambda_i)N_0(\lambda_i)=0 \tag{1.7}$$

等等。求解λ_i是带有普遍性质的问题。然而，迄今尚未找到计算λ_i的表达式而只能用迭代法和用电子计算机计算，这样费时又费钱。我们在研究了这类方程后，提出了一套适用于求解Bessel-Neumann 混合型方程特征根系$\{\lambda_i\}$的普遍方法。用这种方法能很快地计算出λ_i值，而且具有较高的精度。另外，这个方法还可容易地确定最小的特征根是λ_0或是λ_1或是其它的λ_i，即确定特征根系序数i的最小值i_{min}，为确定级数的第一项提供了依据。

二、确定Bessel-Neumann 混合方程的特征根系

为了使问题具有普遍性，故以下列 Bessel-Neumann 混合型方程作为研究对象：

$$J_m(\lambda_i)N_n(a\lambda_i)-J_n(a\lambda_i)N_m(\lambda_i)=0 \tag{2.1}$$

式中$J_{m(n)}$为$m(n)$阶的第一类 Bessel 函数；$N_{m(n)}$为$m(n)$阶的 Neumann 函数（或称第二类 Bessel 函数）；其中$m(n)$取值0，1，…；$a>1$是某实数。为了求解式(2.1)，我们采用J及N的渐近表达式：

$$J_m(\lambda_i)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(m-2k+1/2)(2\lambda_i)^{2k}}+O(\lambda_i^{-2s-2})\right]$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\sin\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(m-2k-1/2)(2\lambda_i)^{2k+1}}+O(\lambda_i^{-2s-3})\right]$$

$$N_m(\lambda_i)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\sin\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(m-2k+1/2)(2\lambda_i)^{2k}}+O(\lambda_i^{-2s-2})\right]$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(m-2k-1/2)(2\lambda_i)^{2k+1}}+O(\lambda_i^{-2s-3})\right]$$

上二式中Γ为 Gamma 函数，或简写$J_m(\lambda_i)$和$N_m(\lambda_i)$为

$$J_m(\lambda_i)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\left[A_m(\lambda_i)\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.-B_m(\lambda_i)\sin\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$N_m(\lambda_i)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_i}}\left[A_m(\lambda_i)\sin\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+B_m(\lambda_i)\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right] \tag{2.3}$$

其中

$$A_m(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(m-2k+1/2)(2\lambda_i)^{2k}}+O(\lambda_i^{-2s-2})$$

$$=1-\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)}{2!(8\lambda_i)^2}$$

$$+\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)}{4!(8\lambda_i)^4}+O(\lambda_i^{-6}) \tag{2.4}$$

$$B_m(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k\Gamma(m+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(m-2k-1/2)(2\lambda_i)^{2k+1}}+O(\lambda_i^{-2s-3})$$

$$=\frac{4m^2-1}{8\lambda_i}-\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)}{3!(8\lambda_i)^3}$$

$$+\frac{(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)(4m^2-81)}{5!(8\lambda_i)^5}+O(\lambda_i^{-7}) \tag{2.5}$$

以式(2.2)和(2.3)代入式(2.1)得

$$\left[A_m(\lambda_i)\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)-B_m(\lambda_i)\sin\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right]$$

$$\cdot\left[A_n(a\lambda_i)\sin\left(a\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+B_m(\lambda_i)\cos\left(\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\right]$$

$$\cdot\left[A_n(a\lambda_i)\cos\left(a\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)-B_n(a\lambda_i)\sin\left(a\lambda_i-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)\right]=0$$

上式可进一步化简为：

$$\mathrm{tg}\left[(a-1)\lambda_i+\frac{\pi}{2}(m-n)\right]=\frac{A_n(a\lambda_i)B_m(\lambda_i)-A_m(\lambda_i)B_n(a\lambda_i)}{A_m(\lambda_i)A_n(a\lambda_i)+B_m(\lambda_i)B_n(a\lambda_i)} \tag{2.6}$$

在上式右端的$A_{m(n)}$，$B_{m(n)}$以式(2.4)和(2.5)代入可化为：

$$\frac{A_n(a\lambda_i)B_m(\lambda_i)-A_m(\lambda_i)B_n(a\lambda_i)}{A_m(\lambda_i)A_n(a\lambda_i)+B_n(a\lambda_i)B_m(\lambda_i)}=\frac{u_1}{2^3\lambda_i}+\frac{u_3}{2^{10}\lambda_i^3}+\frac{u_5}{2^{16}\lambda_i^5}+O(\lambda_i^{-7}) \tag{2.7}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
u_1 &= (4m^2-1)-(4n^2-1)/\alpha \\
u_3 &= -\frac{1}{3}(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)+(4m^2-1)^2(4m^2-9)-\frac{2}{\alpha}(4m^2-1)^2(4n^2-1) \\
&\quad +\frac{2}{\alpha^2}(4m^2-1)(4n^2-1)^2+\frac{1}{3\alpha^3}\left[(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)-3(4n^2-1)^2(4n^2-9)\right] \\
u_5 &= \frac{1}{60}(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)(4m^2-81)-\frac{1}{6}(4m^2-1)^2(4m^2-9)^2 \\
&\quad \cdot(4m^2-25)-\frac{1}{12}(4m^2-1)^2(4m^2-9)(4m^2-25)(4m^2-49)+\frac{1}{2}(4m^2-1)^3 \\
&\quad \cdot(4m^2-9)^2+\frac{1}{\alpha}\left[\frac{2}{3}(4m^2-1)^2(4m^2-9)(4m^2-25)(4n^2-1)-2(4m^2-1)^3\right. \\
&\quad \left.\cdot(4m^2-9)(4n^2-1)\right]+\frac{1}{\alpha^2}\left[(4m^2-1)^2(4m^2-9)(4n^2-1)^2+2(4m^2-1)^3(4n^2-1)^2\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{3}(4m^2-1)(4m^2-9)(4m^2-25)(4n^2-1)^2\right]+\frac{1}{\alpha^3}\left[-(4m^2-1)^2\right. \\
&\quad \cdot(4n^2-1)^2(4n^2-9)+\frac{1}{3}(4m^2-1)^2(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)-2(4m^2-1)^2 \\
&\quad \left.\cdot(4n^2-1)^3\right]+\frac{1}{\alpha^4}\left[-\frac{2}{3}(4m^2-1)(4n^2-1)^2(4n^2-9)(4n^2-25)+2(4m^2-1)\right. \\
&\quad \left.\cdot(4n^2-1)^3(4n^2-9)\right]+\frac{1}{\alpha^5}\left[\frac{1}{60}(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)(4n^2-81)\right. \\
&\quad +\frac{1}{6}(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2(4n^2-25)+\frac{1}{12}(4n^2-1)^2(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49) \\
&\quad \left.-(4n^2-1)^3(4n^2-9)^2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}
$$

在式(2.7)的右端全是λ_i^{-j} ($j=1, 3, \cdots$)的项，可是在式(2.6)左端的展开式只含有λ_i^k ($k=1, 3, \cdots$)的项，二者不一致．为了取得一致，可将λ_i展开成λ_{0i}的 Laurent 级数：

$$\lambda_i=\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\lambda_{0i}^j \tag{2.9$'$}$$

上式中的a_j是需要待定的，而λ_{0i}也是要确定的．为此，我们把级数(2.9)′分为三个部分：

$$\lambda_i=\sum_{j=-1}^{-\infty} a_j\lambda_{0i}^j+a_0+\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda_{0i}^j$$

其中第三部分是λ_{0i}的正幂次项（即λ_{0i}^1，λ_{0i}^2，…），只要使

$$a_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots)$$

就可以一致了．第二部分自然就是λ_{0i}（即$a_0=\lambda_{0i}$），这样(2.9)′可写为：

$$\lambda_i=\lambda_{0i}+\sum_{j=-1}^{-\infty} a_j\lambda_{0i}^j \tag{2.9}$$

把式(2.9)代入式(2.6)的左端得

$$\operatorname{tg}\left[(a-1)\lambda_i+\frac{\pi}{2}(m-n)\right]=\operatorname{tg}\left[(a-1)\lambda_{0i}+(a-1)\sum_{j=-1}^{-\infty}a_j\lambda_{0i}^j+\frac{\pi}{2}(m-n)\right] \tag{2.10}$$

根据正切函数展开式的性质，欲使其与式(2.7)右端保持一致，必须有

$$\operatorname{tg}\left[(a-1)\lambda_{0i}+(a-1)\sum_{j=-1}^{-\infty}a_j\lambda_{0i}^j+\frac{\pi}{2}(m-n)\right]=\operatorname{tg}\left[(a-1)\sum_{j=-1}^{-\infty}a_j\lambda_{0i}^j\right] \tag{2.11}$$

即

$$(a-1)\lambda_{0i}+\pi(m-n)/2=0$$

于是有

$$\lambda_{0i}=\frac{\pi}{a-1}\left[i+\frac{1}{2}(n-m)\right] \tag{2.12}$$

满足式(2.11)的一般形式，此式确定了λ_{0i}。

为了求得λ_i的全部展开式(2.9)，还得确定a_{-1}，a_{-2}，…。为此，先把式(2.7)右端和式(2.11)右端展开成λ_{0i}的级数：

$$\begin{aligned}&\frac{u_1}{2^3\lambda_i}+\frac{u_3}{2^{10}\lambda_i^3}+\frac{u_5}{2^{16}\lambda_i^5}+O(\lambda_i^{-7})=\frac{u_1}{2^3\lambda_{0i}}+\left(\frac{u_3}{2^{10}}-\frac{u_1a_{-1}}{2^3}\right)\frac{1}{\lambda_{0i}^3}\\&\quad-\frac{u_1a_{-2}}{2^3\lambda_{0i}^4}+\left[\frac{u_5}{2^{16}}-\frac{3u_3a_{-1}}{2^{10}}+\frac{u_1}{2^3}(a_{-1}^2-a_{-3})\right]\frac{1}{\lambda_{0i}^5}\\&\quad+\left[\frac{u_1(2a_{-1}a_{-2}-a_{-4})}{2^3}-\frac{3u_3a_{-2}}{2^{10}}\right]\frac{1}{\lambda_{0i}^6}+O(\lambda_{0i}^{-7})\end{aligned} \tag{2.13}$$

和

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\left[(a-1)\sum_{j=-1}^{-\infty}a_j\lambda_{0i}^j\right]=\frac{(a-1)a_{-1}}{\lambda_{0i}}+\frac{(a-1)a_{-2}}{\lambda_{0i}^2}\\&\quad+\left[(a-1)a_{-3}+\frac{1}{3}(a-1)^3a_{-1}^3\right]\frac{1}{\lambda_{0i}^3}+[(a-1)a_{-4}+(a-1)^3a_{-1}^2a_{-2}]\frac{1}{\lambda_{0i}^4}\\&\quad+\left[(a-1)a_{-5}+(a-1)^3a_{-1}a_{-2}^2+(a-1)^3a_{-1}^2a_{-3}\right.\\&\quad\left.+\frac{2}{15}(a-1)^5a_{-1}^5\right]\frac{1}{\lambda_{0i}^5}+\left[(a-1)a_{-6}+(a-1)^3(a_{-1}^2a_{-4}+a_{-1}a_{-2}a_{-3})\right.\\&\quad\left.+\frac{2}{3}(a-1)^5a_{-1}^4a_{-2}\right]\frac{1}{\lambda_{0i}^6}+O(\lambda_{0i}^{-7})\end{aligned} \tag{2.14}$$

由式(2.13)和(2.14)的λ_{0i}^{-j}同次幂系数相等，即可确定a_j ($j=-1, -2, \cdots$)：

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{-1}=\frac{u_1}{2^3(a-1)},\quad a_{-2}=0\\
&a_{-3}=\frac{u_3}{2^{10}(a-1)}-\frac{u_1a_{-1}}{2^3(a-1)}-\frac{(a-1)^2a_{-1}^2}{3},\quad a_{-4}=0\\
&a_{-5}=\frac{u_5}{2^{16}(a-1)}-\frac{3u_3a_{-1}}{2^{10}(a-1)}+\frac{u_1(a_{-1}^2-a_{-3})}{2^3(a-1)}-\frac{2}{15}(a-1)^4a_{-1}^5\\
&\qquad-(a-1)^2a_{-1}^2a_{-3}\\
&a_{-6}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.15}
$$

综合式(2.9)、(2.12)、(2.15)和(2.8)，可得 Bessel-Neumann 混合型方程(2.1)的特征根系的表达式：

$$
\begin{aligned}
\lambda_i=&\frac{\pi}{a-1}\left[i+\frac{1}{2}(n-m)\right]+\frac{a_{-1}}{(\pi/(a-1))[i+(n-m)/2]}\\
&+\frac{a_{-3}}{\{(\pi/(a-1))[i+(n-m)/2]\}^3}\\
&+\frac{a_{-5}}{\{(\pi/(a-1))[i+(n-m)/2]\}^5}+O(\lambda_{0i}^{-7})
\end{aligned}\tag{2.16}
$$

式中a_{-1}，a_{-3}和a_{-5}均由式(2.15)确定，式(2.15)中的u_1，u_3和u_5由式(2.8)计算．λ_i的下标取值一定要使

$$[i+(n-m)/2]>0\tag{2.17}$$

上式中的 i 取值问题将在五节中详细讨论．

三、特征根系$\{\lambda_i\}$的算例

例 1　两同心圆柱面间充满粘性为 ν 的流体，若内圆柱面突然转动引起了 Couette 流动．前已述过，这种流动需求解$m=n=1$的λ_i的 Bessel-Neumann 混合型方程．当外圆柱与内圆柱半径之比$R_2/R_1=a=2$时，方程的具体形式为

$$J_1(\lambda_i)N_1(2\lambda_i)-J_1(2\lambda_i)N_1(\lambda_i)=0\tag{3.1}$$

易家训先生曾在[1]中给出了该式的特征根$\{\lambda_i\}$．现用本文的方法计算$\{\lambda_i\}$．先用式(2.12)、(2.8)和(2.15)计算得

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{0i}=i\pi\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots)\\
&u_1=1.50,\qquad u_3=-151.50,\qquad u_5=22583.95\\
&a_{-1}=0.1875,\quad a_{-3}=-0.1853,\quad a_{-5}=0.3795
\end{aligned}
$$

然后用式(2.16)计算$\{\lambda_i\}$．计算的结果及文献[1]给出的$\{\lambda_i\}$均列在表1中，同时还列出了两者的相对误差η：

$$\eta=\frac{|\lambda_i[1]-\lambda_i[\text{本文}]|}{\lambda_i[1]}$$

从表1可看到，按本文计算的特征根λ_i与[1]中的λ_i相差甚微．

例 2　Bogert 曾在文献[3]中给出了$i=0$时的特征根λ_0，本例取$m=0$，$n=1$和$a=1.5$，则式(2.1)成为：

$$J_0(\lambda_i)N_1(1.5\lambda_i)-J_1(1.5\lambda_i)N_0(\lambda_i)=0\tag{3.2}$$

表 1 本文与[1]计算的特征根 λ_i

i	1	2	3	4	5
λ_i[1]	3.1966	6.3124	9.4445	12.5812	15.7199
λ_i[本文]	3.1965	6.3123	9.4445	12.5812	15.7199
η	0.03‰	0.016‰	0	0	0

由[3]可查得$\lambda_0=2.8899$，而按本文的方法可求得

$$\lambda_{00}=\pi$$

$$u_1=-3.00,\quad u_3=98.45,\quad u_5=-11161.029$$

$$a_{-1}=-0.750,\quad a_{-3}=-0.335,\quad a_{-5}=-0.532$$

由式(2.16)可算得

$$\lambda_0=\pi-\frac{0.75}{\pi}-\frac{0.335}{\pi^3}-\frac{0.532}{\pi^5}=2.8904$$

其二者的相对误差$\eta=0.17$‰。

四、其他类型的Bessel-Neumann方程

实际中还可能遇到与方程(2.1)有所差别的 Bessel-Neumann 方程，但可变换成与(2.1)相同的型式：

1. $$J_m(k\gamma_i)N_n(\gamma_i)-J_n(\gamma_i)N_m(k\gamma_i)=0 \tag{4.1}$$

采用变换：

$$k\gamma_i=\lambda_i,\qquad k=a^{-1} \tag{4.2}$$

则式(4.1)又化成了式(2.1)即

$$J_m(\lambda_i)N_n(a\lambda_i)-J_n(a\lambda_i)N_m(\lambda_i)=0$$

2. $$J_m(kx_i)N_n(\beta x_i)-J_n(\beta x_i)N_m(kx_i)=0 \tag{4.3}$$

如令

$$kx_i=\lambda_i,\qquad \beta k^{-1}=a \tag{4.4}$$

则式(4.3)变换成式(2.1)即

$$J_m(\lambda_i)N_n(a\lambda_i)-J_n(a\lambda_i)N_m(\lambda_i)=0$$

五、确定 $i_{\min}$和对 $\eta_{\max}$ 的估值

1. 特征根系$\{\lambda_i\}$具有$0<\cdots<\lambda_{i-1}<\lambda_i<\lambda_{i+1}<\cdots$的特性，因此在特征根系中必有一个最小的特征根$(\lambda_i)_{\min}$，它的下标是下标序数中的最小者，记为$i_{\min}$。由不等式(2.17)，可以确定$i_{\min}$：

$$i_{\min}=\begin{cases}0, & m<n\\ 1, & m=n\\ \dfrac{m-n}{2}+\dfrac{3+(-1)^{m-n}}{4}, & m>n\end{cases} \tag{5.1}$$

此式表明，i的开始值是等于或大于零的整数($i\geqslant0$)。如算例1中$i_{\min}=1$，故$i=1, 2, 3, \cdots$；

算例2中$n=1$，$m=0$，$i_{\min}=0$，故$i=0$，1，2，…．

2．由式(2.16)知，本文的方法略去了$O(\lambda_{0i}^{-7})$，即此法引起的误差Δ与λ_{0i}^{-7}是同一量级的，其相对误差η为Δ/λ_i．很显然，$(\lambda_i)_{\min}$的相对误差$\Delta/(\lambda_i)_{\min}$为最大．若以$(\lambda_{0i})_{\min}$近似地代替$(\lambda_i)_{\min}$则有

$$\eta_{\max}\sim(\lambda_{0i})_{\min}^{-8}$$

以式(2.12)代入得

$$\eta_{\max}\sim\left\{\frac{\pi}{a-1}\left[i_{\min}+\frac{1}{2}(n-m)\right]\right\}^{-8} \tag{5.2}$$

这就是估算最大的相对误差$\eta_{\max}$．若用式(5.2)估算例2，其$\eta_{\max}\sim0.1‰$，是符合计算的．

六、结 束 语

求解方程$J_m(\lambda_i)N_n(a\lambda_i)-J_n(a\lambda_i)N_m(\lambda_i)=0$的特征根系$\{\lambda_i\}$是数学和力学领域中会经常遇到的一个实际问题．但是，直到目前还没有一种简单易行的办法求得λ_i的计算式．本文导得了用m，n和a表示求$\{\lambda_i\}$的简单公式．该法简单且有一定精度，给方程(2.1)的求解$\{\lambda_i\}$带来了方便．

参 考 文 献

[1] Yih, C. S. (易家训), *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1969).

[2] Lin, C. C. (林家翘), *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge (1955).

[3] Bogert, B. P., Some roots of an equation involving Bessel functions, *J. Math. Phys.*, **30** (1951), 102—105.

Extraction of Characteristic Roots on Bessel-Neumann's Mixed Equations

Yang Wen-xiong Gu Er-zuo

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Zhu Min

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

This paper discusses the problem of the extraction of characteristic roots $\{\lambda_i\}$ $(\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots)$ on the Bessel-Neumann's mixed equations. It gives the expressions and the evaluation of the minimum root. The advantage of the method has no use for the table of the multi-figure number Bessel function and it does not need computer but can calculate all the characteristic roots $\{\lambda_i\}$. The precision of these roots is still high.