

# 三涡旋模式理论中小涡旋的二元和三元 速度关联函数和网格湍流的衰变\*

林多敏 蔡树棠

(上海市应用数学和力学研究所, (中国科学技术大学, 上海市应用  
上海工业大学) 数学和力学研究所)

(1989年5月23日收到)

## 摘 要

在三种涡旋分开考虑的湍流模式<sup>[1, 2]</sup>里, 我们用到了小涡旋的二元和三元速度关联函数. 本文对小涡旋的二元和三元速度关联函数进行了讨论, 并且对它们展开式的头几项中常用到的系数给出了表达式, 最后, 用它们讨论了网格湍流的衰减问题. 计算结果与 G. K. Batchelor 和 A. A. Townsend 的实验<sup>[3]</sup>相符合得很好.

## 一、引 言

粘性流体的层流定常运动由于外来扰动的影响而导致流动的失稳, 因此逐步发展成为湍性流动. 经过这一过程, 在外来扰动的影响下, 定常流动就变成了非定常流动. 这时候流动通常可以划分为雷诺平均流动和湍流涨落量. 在涨落量中包含有外来扰动的和当地产生的大涡旋, 并且大涡旋又由于非线性作用的影响再度逐步分裂成小涡旋. 这样在湍性流动中除了雷诺平均流动以外, 涨落量又可分解成外来扰动的、当地产生的大涡旋和小涡旋等三种脉动量. 蔡树棠和麻柏坤根据这一基本事实建立了三种脉动涡旋分开考虑二阶矩封闭的新模式理论<sup>[1]</sup>, 接着, 林多敏和蔡树棠通过对局部产生的湍流大涡旋引进的新几率平均, 严格区分了两种不同的大涡旋. 得到了经过修正的封闭方程组<sup>[2]</sup>, 其中有关小涡旋的两个方程式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^2}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial q^2}{\partial x_j} - 2\nu_T \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} - 2\nu_T \frac{\partial^2 (\bar{U}_j \bar{U}_k)}{\partial x_j \partial x_k} \\ - 2\nu_T \left( \frac{\overline{u_k^p u_k^p}}{l_p^2} + \frac{\overline{u_k^N u_k^N}}{l_N^2} \right) - 2\nu_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\overline{u_j^p u_k^p} + \overline{u_j^N u_k^N}) \\ = -10\nu \frac{q^2}{\lambda^2} + \nu \nabla^2 q^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (C_s \nu_T + C_N^N q_N l_N + C_p^p q_p l_p) \frac{\partial q^2}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) + \frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \\
& + \frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \frac{\partial^2 (\bar{U}_j \bar{U}_k)}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \left( \frac{\overline{u_k^2 u_k^2}}{l_p^2} + \frac{\overline{u_k^N u_k^N}}{l_N^2} \right) \\
& + \frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\overline{u_j^2 u_k^2} + \overline{u_j^N u_k^N}) \\
& = -\nu E' \frac{q^2}{\lambda^4} + \nu \nabla^2 \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (C_e \nu_T + C_N^N q_N l_N + C_e^2 q_p l_p) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.2}$$

对于封闭的联立方程组中的其他方程式详见文献[2], 方程(1.1)和(1.2)的符号说明参阅文献[2].

在三种涡旋分开考虑的湍流模式理论<sup>(1,2)</sup>里, 我们曾经用到了小涡旋的二元速度关联函数和三元速度关联函数的展开式, 并且在最后的联立方程组中还出现有展开式的某些系数. 本文对小涡旋的二元和三元速度关联函数的展开式作了进一步的探讨, 并且给出了某些无量纲系数的具体表达式. 最后, 我们把它们代入我们以前给出的三种涡旋分开考虑的湍流模式理论的联立方程组中, 用得到的方程组经过数值计算讨论了网格湍流衰减问题, 计算值与 G. K. Batchelor 和 A. A. Townsend 的实验数据<sup>(3)</sup>相符合得很好.

## 二、小涡旋的速度关联函数

在小涡旋的准均匀各向同性假设下, 小涡旋的速度关联函数的表达式可用周培源教授采用过的表达式<sup>(4)</sup>, 即

$$\begin{aligned}
v_i^* v_k^* &= v_i^* \bar{v}_k^* + A_1 (v_i^* v_k^*)_{,j} \xi_j + A_2 (v_i^* v_k^*)_{,i} \xi_j \\
& + A_3 (v_i^* v_k^*)_{,k} \xi_j + A_4 (v_i^* v_k^*)_{,j} \xi_i + A_5 (v_i^* v_k^*)_{,j} \xi_k \\
& + \frac{q^2}{3\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} (1+4G) \xi_i \xi_k - \frac{1}{2} [(2+5G)r^2 - \frac{1}{3} (k+11G) R_{mn} \xi_m \xi_n] \cdot \delta_{ik} \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} (k-4G)r^2 R_{ik} - G(R_{il} \xi_l \xi_k + R_{kl} \xi_l \xi_i) \right\} \\
& + \dots + \frac{q^3}{4! \lambda^4} E_{ijklmn} \xi_j \xi_l \xi_m \xi_n + \dots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
v_i^* v_j^* v_k^* &= v_i^* v_j^* \bar{v}_k^* + B_1 (v_i^* v_j^* v_k^*)_{,i} \xi_i + \dots \\
& + \frac{F(q^2)^{3/2}}{3! 3 \sqrt{3} \lambda^3} \left[ 2 \xi_i \xi_j \xi_k - \frac{5}{2} (\delta_{ik} \xi_j + \delta_{jk} \xi_i) r^2 + \delta_{ij} \xi_k r^2 \right] + \dots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
v_i^* v_m^* v_n^* &= v_i^* v_m^* \bar{v}_n^* + B_1' (v_i^* v_m^* v_n^*)_{,i} \xi_i + \dots \\
& - \frac{F(q^2)^{3/2}}{3! 3 \sqrt{3} \lambda^3} \left[ 2 \xi_i \xi_m \xi_n - \frac{5}{2} (\delta_{mi} \xi_n + \delta_{ni} \xi_m) r^2 + \delta_{mn} \xi_i r^2 \right] + \dots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

式中  $\xi_i = x'_i - x_i$ ,  $r^2 = \xi_i \xi_i$ ,  $q^2 = \overline{v_i^* v_i^*} = \overline{v_i^* v_i^*}$ ,  $R_{ik} = 3 \overline{v_i^* v_j^* v_k^*} / q^2$ ,  $\lambda$  为 Taylor 湍流微尺度. 利用小涡旋的二元和三元速度关联函数, 类似于文献[1]的推导, 我们就得到有关小涡旋的  $q^2$  和  $q^2/\lambda^2$  的方程式(1.1)和(1.2), 其中

$$E' = \frac{2}{15} E - \frac{14F}{3\sqrt{3}} R_\lambda, \quad E = E_{kklmm}$$

我们知道湍流是由许许多多大大小小的涡旋所构成的。在湍性流动中，大涡旋的存在使小涡旋的形状和速度分布都受到一定的改变。在小距离的范围内，这种改变的影响不是太大的。这种改变的影响主要表现为当小涡旋脉动速度关联函数对两点间距离的展开式的系数用小涡旋脉动速度二阶矩、三阶矩和它们的导数项来表达时，关联函数展开式的系数  $A_{ijk}, \dots, B_{ijkl}, \dots$ ，等中的无量纲系数包含有大涡旋的雷诺数  $R_N (= q_N l_N / \nu)$  和  $R_p (= q_p l_p / \nu)$  的函数。在以前推导小涡旋的动能和涡量方程式(1.1)和(1.2)的时候，我们已经把这些影响项的有些部分归并入  $q^2$  或  $q^2/\lambda^2$  的大涡旋扩散系数  $C_N^q q_N l_N$ ， $C_p^q q_p l_p$ ， $C_N^q q_N l_N$  和  $C_p^q q_p l_p$  中去了，而把另外一些部分和它们量级相差不大的，象  $A_{ijl}(\partial^2 \bar{U}_k / \partial x_j \partial x_l)$  等项都加以舍弃。由于大涡旋对小涡旋的总体影响不是太大，因此小涡旋的二元速度关联函数和三元速度关联函数展开式中的准各向同性部分的前面两项( $r^2$  和  $r^3$  项)中的无量纲系数  $G$  和  $F$  可以认为并不改变或改变得极小。至于无量纲系数  $E$ ，因为它在距离较大的时候起作用，所以必须考虑大涡旋的存在对  $E$  起的作用。 $E$  的数值，除了随小涡旋本身的雷诺数  $R_\lambda (= q\lambda/\nu)$  增加而增加以外，还会因外界扰动(或外来大涡旋)和局部产生大涡旋的存在而有所增大，我们认为  $E$  与外界扰动(或大涡旋)的雷诺数  $R_N (= q_N l_N / \nu)$  和局部产生大涡旋的雷诺数  $R_p (q_p l_p / \nu)$  有关，即随这两个雷诺数增大而有些增大。故，在我们得到的最后的方程组<sup>[2]</sup>中出现的  $E'$  可以假定为

$$E' = \frac{2}{15} E - \frac{14F}{3\sqrt{3}} R_\lambda \approx 20 - 6 \exp[-\alpha_N^2 R_N^2 - \alpha_p^2 R_p^2] \quad (2.4)$$

式中  $R_\lambda = \frac{q\lambda}{\nu}$ ， $R_N = \frac{q_N l_N}{\nu}$  和  $R_p = \frac{q_p l_p}{\nu}$

### 三、网格湍流的衰变问题

为了把我们的假定和实验结果进行比较，作为理论计算的特例，我们讨论一个最为简单的湍流情形，即网格湍流的后期衰减问题。

在风洞里，网格后平均流动的速度为常数。由于局部产生的大涡旋和湍流的平均运动的速度梯度是分不开的，同时，在这种情形下，网格产生的外界扰动不可能引起产生局部产生的大涡旋，即在联立方程组中有关  $q_p$  的方程式(详见文献[2])的  $\partial q_N^2 / \partial x_i$  前的扩散系数  $C_N^q q_N l_N$  中的无量纲因子  $C_N^q$  为零，所以，在网格湍流中没有局部产生的大涡旋。这样，在用三种涡旋分开考虑的模式理论来讨论这个问题时，这种模式的联立方程组中与局部产生大涡旋有关的  $q_p$  方程式的两端皆为零。对于这个问题，由于并不需要知道外界扰动的各个分量，因此可以把与外界扰动有关的外来大涡旋的二阶矩的微分方程式(文献[2]中的式(8.6))，进行张量收缩，就得到外来大涡旋  $q_N$  的方程式。

在网格湍流里，取直角坐标系  $x, y, z$ ，以湍流平均流动的方向作  $x$  轴的正方向，坐标系的原点取在网格平面的中心点上，这样，我们得到了下列的微分方程组，即表示为

$$\frac{d}{dx} (U\Phi) = K_\tau + S_\phi \quad (3.1)$$

式中  $U$  为湍流平均流速  $(U, 0, 0)$ ， $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ ， $K_\tau = (K_1, K_2, K_3)^T$ ， $S_\phi = (S_1, S_2, S_3)^T$ ， $T$  为矩阵转置符号， $\phi_1 = q^2$ ， $\phi_2 = q^2/\lambda^2$ ， $\phi_3 = q_N^2$ ，

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -10\nu q^2/\lambda^2, \quad K_2 = -E'\nu q^2/\lambda^4, \quad K_3 = -2\nu q_N^2/l_N^2 \\
 S_1 &= 2\nu_T \frac{q_N^2}{l_N^2} + 2\nu_T \frac{d^2 \bar{u}_N^2}{dx^2} + \nu \frac{d^2 q^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[ (C_s \nu_T + C_N^N q_N l_N) \frac{dq^2}{dx} \right] \\
 S_2 &= -\frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \frac{q_N^2}{l_N^2} - \frac{14}{5} G \frac{\nu_T}{\lambda^2} \frac{d^2 \bar{u}_N^2}{dx^2} + \nu \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) \\
 &\quad + \frac{d}{dx} \left[ (C_s \nu_T + C_N^N q_N l_N) \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
 S_3 &= (\nu + \nu_T) \frac{d^2 q_N^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( C_N^N q_N l_N \frac{dq_N^2}{dx} \right) + \frac{d\nu_T}{dx} \left( \frac{dq_N^2}{dx} + 2 \frac{d\bar{u}_N^2}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{2}{15} E - \frac{14F}{3\sqrt{3}} R_\lambda = 20 - 6\exp[-\alpha_N^2 R_N^2], \\
 \nu_T/\nu &= \beta^2 R_\lambda^2, \quad R_\lambda = \frac{q\lambda}{\nu}, \quad \frac{14}{5} G = -4
 \end{aligned}$$

实际的网格湍流，由于网丝尾迹形成强剪切区，因此，在很靠近网格处是各向异性湍流。经过一段网格距离之后，网格湍流接近于各向同性湍流。所以，网格湍流的实际原点总不在网格平面上，而是在网格附近的虚原点  $x=0^+$  上。在虚的原点之后，由于湍流的三个脉动速度分量接近相等，所以对外来大涡旋可以假定  $\bar{u}_N^2 = \bar{v}_N^2 = \bar{w}_N^2$ ，即有  $u_N^2 = q_N^2/3$ 。于是，方程组(3.1)构成了一个封闭方程组。

在虚的原点  $x=0^+$  上，假定  $R_\lambda = R_{\lambda_0}$ ， $\lambda^2 = 0$ 。由于外界扰动是由网格的存在而产生的，因此，可以假定  $l_N = \alpha_1 M$ ， $\alpha_1$  为正常数， $M$  为网眼线尺度。为了求解方便，将方程组(3.1)化简为

$$\frac{d}{dx} (U\Phi') = K'_i + S'_\phi \quad (3.2)$$

式中  $\Phi' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ ， $K'_i = (K_1, K_2, K_3)^T$ ， $S'_\phi = (S_1, S_2, S_3)^T$

$$\phi'_2 = \lambda^2, \quad K'_2 = (E' - 10)\nu, \quad S'_2 = \frac{\lambda^2}{q^2} S_1 - \frac{\lambda^4}{q^2} S_2$$

封闭方程组(3.2)是一个非线性的微分方程组。网格湍流的能量衰减是一个初值问题。以下运用逐级代入法来数值求解。首先令  $S'_\phi = 0$ ，通过给定的初始条件，利用Runge-Kutta方法来确定  $\Phi'^{(0)}$ ，然后将  $\Phi'^{(0)}$  作为第一次迭代值来进行迭代求解。将  $\Phi'^{(0)}$  代入  $S'_\phi$ ，得出的  $S'_\phi^{(0)}$  值作为常数参加第二次迭代的计算，再利用Runge-Kutta方法求出方程组(3.2)的第二次迭代值  $\Phi'^{(1)}$ 。如此等等，不断重复这个过程，直到两次相继迭代得出的结果差别很小为止。最后一次迭代得出的值就是方程组(3.2)的数值解。

本文在网格雷诺数  $R_m = UM/\nu$  分别为650, 950和1360下运用上述计算方法对网格湍流进行了数值求解，同时将计算结果与G. K. Batchelor和A. A. Townsend的实验值<sup>[3]</sup>进行了对比。我们取  $\alpha_1 = 20$ ， $\beta = 1.8$ ， $\alpha_N = 0.05$  和  $q_N^2/q^2 \ll 1$ 。计算值与实验值的对比如图1(a)、(b)、(c)和图2所示。图1(a)、(b)、(c)显示了小涡旋耗散尺度  $\lambda^2$  随  $x/M$  的变化的计算曲线，对比结果良好；图2显示了  $R'_\lambda (= \sqrt{3} R_\lambda/3)$  随  $x/M$  变化的计算曲线 ( $R_m = 650$ )，对比结果良好。然而，在  $R_m$  为950和1360下，文献[3]中的实测值与人们公认为正确的Taylor衰减律有较大矛盾，在我们把  $R'_\lambda$  的计算值与  $R'_\lambda$  的实测值对比时结果偏差较大，所以我们认为这是

由于实验值有问题引起的。文献[5]认为文献[3]的测量结果的准确性稍差一些。文献[3]在发表这些实测数据时也感到在 $R_m$ 为950和1360下测量出现了一些困难，他们自己也不清楚原因。出现这种矛盾究竟是何原因还有待进一步研究弄清楚。

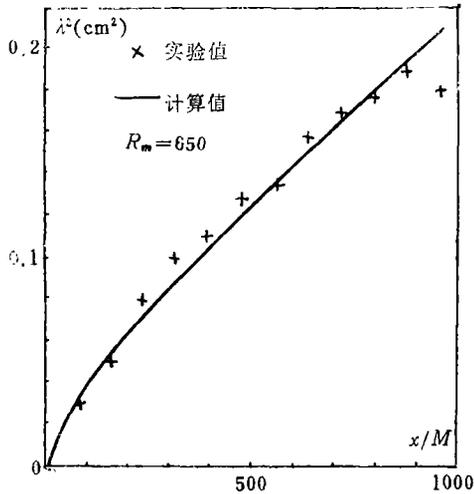


图1a  $\lambda^2$ 随 $x/M$ 的变化

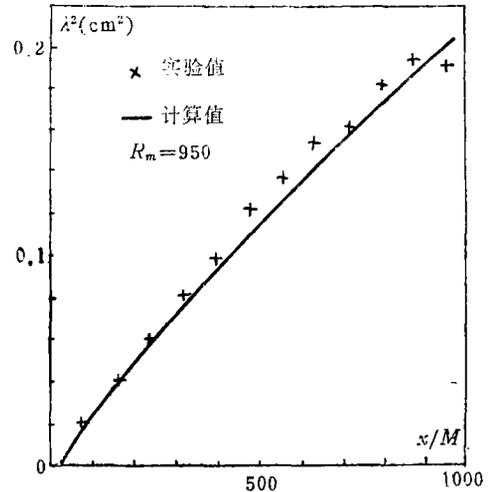


图1b  $\lambda^2$ 随 $x/M$ 的变化

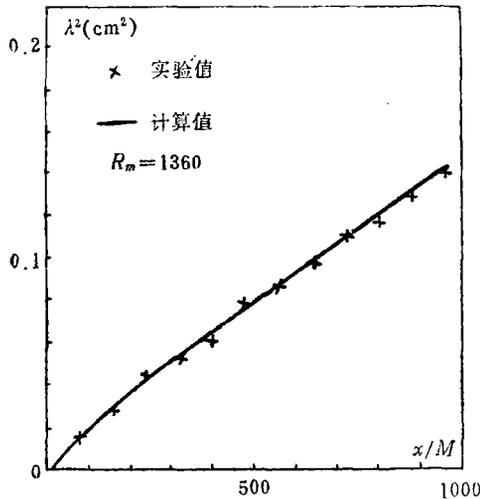


图1c  $\lambda^2$ 随 $x/M$ 的变化

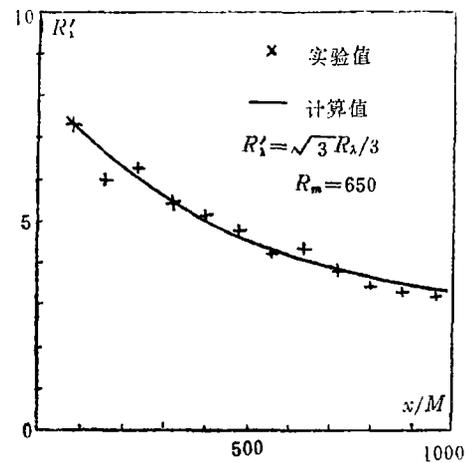


图2  $R'_1$ 随 $x/M$ 的变化

#### 四、结 束 语

本文运用三种涡旋分开考虑的新湍流模式理论计算了网格湍流问题，这是现有模式理论所未能很好处理的。通过计算，确定了新模式理论中的一些模式系数。文献[2]中的方程(8.6)在收缩后使得模式方程组数值求解趋于简单，同时，外界扰动量可作为一个输入量而得到进一步的考虑，这与周培源教授用积分常数来考虑初始条件和边界条件对湍流影响的早期想法是一致的。在今后的算例中，这个三涡旋模式理论的优点将会得到进一步的体现。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 蔡树棠、麻柏坤, 大小涡旋分开考虑的模式理论, 应用数学和力学, **8**, 10 (1987), 849—858.
- [ 2 ] 林多敏、蔡树棠, 大涡旋的分类和模式理论的封闭, 应用数学和力学, **10**, 10 (1989), 853—864.
- [ 3 ] Batchelor, G. K. and A. A. Townsend, Decay of turbulence in the final period, *Proc. Roy. Soc. London, A* **194** (1948), 527—543.
- [ 4 ] Chou, P. Y. (周培源), On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 1 (1945), 38—54.
- [ 5 ] 魏中磊、诸乾康、钮珍南、俞达诚, 网格湍流微结构的实验研究, 力学学报, **20**, 3 (1988), 200—206.

## The Double and Triple Velocity Correlations of Small Vortexes in Three-Vortex Model Theory and the Decay of Grid-Produced Turbulence

Lin Duo-min

(Shanghai Inst. of Appl. Math. Mech., Shanghai University of Technology, Shanghai)

Tsai Shu-tang

(Univ. of Sci. Tech. of China, Hefei; Shanghai Inst. of Appl. Math. Mech.; Shanghai University of Technology, Shanghai)

### Abstract

In the three-vortex model theory of turbulence<sup>(1,2)</sup>, the double and the triple velocity correlation functions of small vortexes were employed. In this paper, the double and the triple velocity correlation functions of small vortexes are further discussed, and the expressions of some coefficients in the expansions in terms of relative displacement of two points are given. Finally, by using these coefficients, the decay of grid-produced turbulence is calculated. The result of calculations gives good agreement with the experimental data of G. K. Batchelor and A. A. Townsend<sup>(3)</sup>.