应用数学和力学，第11卷第9期（1990年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性变厚度球壳正压力下有矩解

贾 乃 文

（华南理工大学，1989月1月5日收到）

摘 要

本文对工程上常用的非线性变厚度（厚度方程为$\delta=\delta_0(1+\beta\phi)^2$）的球壳正压力下有矩问题，给出内力的欧拉形解答．

关键词 非线性 欧拉方程 变厚度

本文符号

N_ϕ，N_θ：壳中面单位长度径向和环向轴力
M_ϕ，M_θ：壳中面单位长度径向和环向弯矩
Q_ϕ：壳中面单位长度径向横剪力
$q_{\phi,\theta,n}$：球壳表面沿径向、环向和法 向的分布荷载分量
v，w：壳中面径向和法向位移分量
r_1，r_2：壳中面沿径向和环向曲率半径

球壳在结构工程上有广泛的应用．它的设计和计算通常是按常截面进行的．既使考虑壳的边缘效应在壳边缘部分采用变厚度，也仅仅是构造设计．

如所周知，在外荷载作用下，球壳的弯矩和剪力沿着径向是呈衰减变化的．与内力变化相适应，截面作成变厚度是合理的设计．但对球壳的变厚度来说，几何方程是非线性的．这就带来球壳有矩理论求解的困难．曾有文献对此进行探讨，但采用变厚度方程为三角函数形，解答略显复杂．本文采用厚度方程$\delta=\delta_0(1+\beta\phi)^2$，其中$\phi$是从壳顶量起的随纬度变化的角度；$\beta$是关于厚度变化的系数，它的变化大小能描述厚度变化的程度．

将这一球壳厚度函数代入球壳的有矩分析和计算中，考虑边缘效应就会得内力的欧拉方程，非线性变厚度球壳的解析解由此而得．综合正压力的外载作用下球壳的特解，由相应的位移边界条件确定积分常数，即会得到关于变厚度球壳有矩问题的完整解答．

旋转壳轴对称问题的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(N_\phi r)}{\partial\phi}-N_\theta r_1\cos\phi-Q_\phi r+q_\phi rr_1=0\\&N_\phi\cdot r+N_\theta\cdot r_1\sin\phi+\frac{\partial(Q_\phi r)}{\partial\phi}-q_n rr_1=0\\&\frac{\partial(M_\phi r)}{\partial\phi}-M_\theta r_1\cos\phi-Q_\phi rr_1=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

* 樊大钧推荐．

轴对称位移和旋转壳内力之间关系为

$$
\left.\begin{aligned}
N_\theta&=K\left[\frac{1}{r_2}(w+v\operatorname{ctg}\phi)+\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\phi}+w\right)\right]\\
N_\phi&=K\left[\frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\phi}+w\right)+\frac{\mu}{r_2}(w+v\operatorname{ctg}\phi)\right]\\
M_\theta&=-D\left[\frac{\operatorname{ctg}\phi}{r_2}\left(\frac{v}{r_1}-\frac{\partial w}{\partial\phi}\cdot\frac{1}{r_1}\right)+\frac{\mu}{r_1}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{v}{r_1}-\frac{\partial w}{\partial\phi}\cdot\frac{1}{r_1}\right)\right]\\
M_\phi&=-D\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{v}{r_1}-\frac{\partial w}{\partial\phi}\cdot\frac{1}{r_1}\right)+\frac{\mu\operatorname{ctg}\phi}{r_2}\left(\frac{v}{r_1}-\frac{\partial w}{\partial\phi}\cdot\frac{1}{r_1}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(2)
$$

以上式中 $K=\frac{E\delta}{1-\mu^2}$，$D=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$，$r=r_2\sin\phi$。引入 $\psi=\frac{v}{r_1}-\frac{dw}{r_1d\phi}$，考虑壳体厚度 δ 是 ϕ 之函数，从以上方程能归纳为以下求解方程组

$$
\frac{r_2}{r_1}\frac{d^2\psi}{d\phi^2}+\left[\frac{r_2}{r_1}\operatorname{ctg}\phi+\frac{3r_2}{r_1\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\phi}+\frac{d}{d\phi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\frac{d\psi}{d\phi}
$$

$$
-\left[\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\phi+\mu-\frac{3\mu}{\delta}\frac{d\delta}{d\phi}\operatorname{ctg}\phi\right]\psi-\frac{r_1r_2Q_\phi}{D}=0 \qquad (3)
$$

$$
\frac{r_2}{r_1}\frac{d^2(Q_\phi r_2)}{d\phi^2}+\left[\frac{r_2}{r_1}\operatorname{ctg}\phi-\frac{r_2}{r_1\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\phi}+\frac{d}{d\phi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\frac{d(Q_\phi r_2)}{d\phi}
$$

$$
-\left[\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\phi-\mu-\frac{\mu}{\delta}\frac{d\delta}{d\phi}\operatorname{ctg}\phi\right](Q_\phi\cdot r_2)
$$

$$
+K(1-\mu^2)r\psi-P(F_{\phi P},\ F_{QP})=0 \qquad (4)
$$

式中 $P(F_{\phi P},,F_{QP})$ 是外载荷项。(3)与(4)即是球壳有矩理论的全解方程。它的解答可以分成两部分，一是边缘效应导致的壳体内力，相当于求(3)与(4)的齐次方程而获得的解。二是计算外载荷作用壳体所得的薄膜内力。

对于变厚度球壳，有几何特征量 $r_1=r_2=a$，$r=a\sin\phi$，δ 是变量；并且考虑边缘效应，即内力是从边缘开始急剧衰减的，必有

$$
\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}\gg\frac{dQ_\phi}{d\phi}\gg Q_\phi
$$

$$
\frac{d^2\psi}{d\phi^2}\gg\frac{d\psi}{d\phi}\gg\psi
$$

从而略去(3)与(4)中 Q_ϕ，$dQ/d\phi$，ψ，$d\psi/d\phi$ 项，得到球壳有矩理论齐次解的求解方程

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d_2Q_\phi}{d\phi^2}+K(1-\mu^2)\psi=0\\
&\frac{d^2(\delta^2\psi)}{d\phi^2}-\frac{a^2\delta^2}{D}Q_\phi=0
\end{aligned}\right\}\qquad(5)
$$

显然如果壳厚度 δ 是常量，(5)式即转化常厚度球壳有矩方程。

从方程(5)第一式得

$$\psi=-\frac{1}{E\delta}\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}$$

代入(5)式中第二方程，而且计入$\delta=\delta_0(1+\beta\phi)^2$，这样会得出关于$Q_\phi$的方程为

$$(1+\beta\phi)^4\frac{d^4Q_\phi}{d\phi^4}+4\beta(1+\beta\phi)^3\frac{d^3Q_\phi}{d\phi^3}$$
$$+2\beta^2(1+\beta\phi)^2\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}+\frac{12(1-\mu^2)a^2}{\delta_0{}^2}Q_\phi=0 \tag{6}$$

这是关于Q_ϕ的欧拉方程，利用特征值方法可以求其精确解. 设$1+\beta\phi=\exp[t]$，则$t=\ln(1+\beta\phi)$，进行微分运算之后，得

$$\frac{d^4Q_\phi}{dt^4}-2\frac{d^3Q_\phi}{dt^3}+\frac{d^2Q_\phi}{dt^2}+\frac{12(1-\mu^2)a^2}{\delta_0{}^2\beta^4}Q_\phi=0 \tag{7}$$

(7)式的特征方程是

$$r_0{}^4-2r_0{}^3+r_0{}^2+\frac{12(1-\mu^2)a^2}{\delta_0{}^2\beta^4}=0 \tag{8}$$

引入$r_0=z+\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{12(1-\mu^2)a^2}{\delta_0{}^2\beta^4}>0$，则有特征方程

$$z^4-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{16}+\lambda=0 \tag{9}$$

得出

$$z_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pm i\sqrt{\lambda}}$$
$$r_{01,02,03,04}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pm i\sqrt{\lambda}} \tag{10}$$

如果设1/4 和$\sqrt{\lambda}$是直角三角形两个直角边，则有三角函数式:

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16}+\lambda}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1/4}{\sqrt{\lambda+1/16}}\right)}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1/4}{\sqrt{\lambda+1/16}}\right)}$$

可以表达r为

$$r_{01,02,03,04}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pm i\sqrt{\lambda}}$$
$$=\pm(p\pm iq) \tag{11}$$

式中

$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{16}+\lambda}+\frac{1}{4}\right)}$$

$$q=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{16}+\lambda}-\frac{1}{4}\right)}$$

由此得各内力解在壳边缘的值为

$$Q_\phi=\exp[pt](c_1\cos qt+c_2\sin qt)$$
$$N_\phi=-\exp[pt]\operatorname{ctg}\phi(c_1\cos qt+c_2\sin qt)$$
$$N_\theta=-\beta\exp[(p-1)t][(pc_1+qc_2)\cos qt+(pc_2-qc_1)\sin qt]$$

$$\psi=-\frac{\beta^2\exp[(p-4)t]}{E\delta_0}\{[(p^2-p-q^2)c_1+q(2p-1)c_2]\cos qt+[(p^2-p-q^2)c_2-q(2p-1)c_1]\sin qt\}$$

$$M_\phi=\frac{\delta_0{}^2\beta^3}{12(1-\mu^2)a}\exp[(p+1)t]\{[(5q^2-3pq^2+p^3-5p^2+4p)c_1+(3p^2q-10pq+3q-10q^3)c_2]\cos qt+[(-3p^2q+10pq-3q+q^3)c_1+(5q^2-3pq^2+p^3-5p^2+4p)c_2]\sin qt\}$$

$$M_\theta=\mu M_\phi$$

式中的积分常数c_1与c_2是由位移边界条件加以确定的，这里限于壳顶不开孔。如壳顶开孔，尚有待定系数c_3与c_4项。

外荷载引起的内力是按薄膜理论求得的，即是(3)与(4)方程的特解。按轴对称球壳受正压力q_n作用，则有方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi N_\phi)-N_\theta\cos\phi=0\\&N_\phi+N_\theta=q_n\cdot a\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

在壳顶无孔时，得出

$$N_\phi=N_\theta=\frac{1}{2}q_n\cdot a\qquad(13)$$

将(13)中的解加入有矩理论的内力解，即为变厚度球壳正压力作用下的全解。在正压力q_n作用下，积分常数c_1与c_2是按位移边界条件按下面分析给出的。

由内力与位移关系式得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial\phi}+w=\frac{a}{E\delta_0(1+\beta\phi)^2}(N_\phi-\mu N_\theta)\\&w+v\operatorname{ctg}\phi=\frac{a}{E\delta_0(1+\beta\phi)^2}(N_\theta-\mu N_\phi)\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

将(14)式中第二式对ϕ取导数得

$$\frac{\partial w}{\partial\phi}+\frac{\partial v}{\partial\phi}\operatorname{ctg}\phi-v\operatorname{cosec}^2\phi=\frac{-2\beta\cdot a}{E\delta_0(1+\beta\phi)^3}(N_\theta-\mu N_\phi)\qquad(15)$$

另由(14)式中两式相减，得

$$\frac{\partial v}{\partial\phi}-v\operatorname{ctg}\phi=\frac{a}{E\delta_0(1+\beta\phi)^2}(1+\mu)(N_\phi-N_\theta)\qquad(16)$$

将(16)式乘ctgϕ之后，再由(15)式与它相减得转角公式

$$\psi' = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \phi} - v\right)$$

$$= -\left[\frac{2\beta(N_\theta - \mu N_\phi)}{E\delta_0(1+\beta\phi)^3} + \frac{(1+\mu)\text{ctg}\phi}{E\delta_0(1+\beta\phi)^2}(N_\phi - N_\theta)\right] \tag{17}$$

水平位移公式为

$$\Delta H' = \frac{a\sin\phi}{E\delta}(N_\theta - \mu N_\phi) \tag{18}$$

从前面有矩理论公式知

$$\psi = -\frac{\beta^4 \exp[(p-4)t]}{E\delta_0}(W_1 c_1 + W_2 c_2) \tag{19}$$

式中 $I = p^2 - p - q^2 \qquad J = q(2p-1)$

$$W_1 = I\cos qt - J\sin qt \qquad W_2 = I\sin qt + J\cos qt$$

$$\Delta H = \frac{a\sin\phi}{E\delta}\left\{-\beta\exp[(p-1)t][V_1 c_1 + V_2 c_2] + \mu\exp[pt]\text{ctg}(c_1\cos qt + c_2\sin qt)\right\}$$

式中 $V_1 = p\cos qt - q\sin qt, \qquad V_2 = p\sin qt + q\cos qt$

考虑到计算方法是一致的，这里取 $\phi=\pi/2$ 即半球壳情况。这时ctg$\phi=0$，$t'=\ln(1+\beta)\cdot\pi/2$。取固定位移边界，即在外载和边缘效应作用下边缘转角为零，边缘位移水平为零，则有

$$\psi + \psi' = 0, \qquad \Delta H + \Delta H' = 0$$

N_ϕ与N_θ取(13式)结果，可以建立求解c_1与c_2的方程为

$$\frac{q_n a\beta(1-\mu)}{E\delta_0(1+\beta\cdot\pi/2)^3} - \frac{\beta^2\exp[(p-4)t']}{E\delta_0}(W_1 c_1 + W_2 c_2) = 0$$

$$\frac{a}{E\delta_0(1+\beta\cdot\pi/2)^2}[-\beta\exp[(p-4)t'](V_1 c_1 + V_2 c_2)] - \frac{q_n a^2(1-\mu)}{2E\delta_0(1+\beta\pi/2)^2} = 0$$

解出c_1与c_2为

$$c_1 = \frac{q_n a(1-\mu)}{W_1 V_2 - W_2 V_1}\left(\frac{V_2}{\beta\exp[(p-4)t'](1+\beta\cdot\pi/2)^3} - \frac{W_2}{2\beta\exp[(p-1)t']}\right)$$

$$c_2 = \frac{q_n a(1-\mu)}{W_2 V_1 - W_1 V_2}\left(\frac{V_1}{\beta\exp[(p-4)t'](1+\beta\cdot\pi/2)^3} - \frac{W_1}{2\beta\exp[(p-1)t']}\right)$$

显见，在$\phi\neq\pi/2$时，将得出与上式类似的结果，求解方法完全一样。只不过更复杂一些。

本文对 $a=2.5$m，$\delta_0=8$cm在 $q_n=100$gf/cm^2 荷载作用下常厚壳和$\beta=0.2$变厚壳进行比较，计算表明变厚度壳虽然在边缘附近内力比常厚度壳的大，但因为厚度分布合理，仅构造配筋就可以满足结构要求，而常厚度壳按结构设计需相当多的钢筋，反映出变厚度壳的合理性。

参 考 文 献

[1] 杨耀乾,《薄壳理论》，中国铁道出版社 (1981), 181—185.

[2] 贾乃文, 球形扁壳超临界变形的步进求和计算, 应用数学和力学, 8, 2 (1982).

[3] 贾乃文, 变厚度球形结构物设计, 特种结构, 26 (1989).

[4] 徐芝纶,《弹性力学》下册, 人民教育出版社 (1980), 299.

[5] 王慎行, 变壁厚轴对称球壳, 应用数学和力学, 9, 2 (1988).

Momental Solution of Spherical Shells with Variably Nonlinear Section under Normal Pressure

Jia Nai-wen

(South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

In this paper, spherical shell with variably nonlinear section that is widely used in engineering and its equation of the section $\delta=\delta_0(1+\beta\phi)^2$, is analysed to momental problem. The Euler solutions of internal forces are obtained under normal pressure.

Key words nonlinear, Euler equation, variable thickness