应用数学和力学，第11卷第9期（1990年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类四阶微分方程解的有界性和稳定性*

俞元洪　陈文灯

（中国科学院应用数学研究所）（北京理工大学）

摘　要

本文分两种情况研究方程(1)：(i)$P\equiv0$，(ii)$P(\neq0)$满足$|P(t,x,y,z,w)|\leqslant(A+|y|+|z|+|w|)q(t)$，这里，$q(t)$是$t$的非负函数．对于第一种情况研究了零解的全局渐近稳定性，对于第二种情况得到了方程(1)的有界性结果．这些结果改进并包含了一些已知的结果．

考虑方程

$$\dddot{\ddot{x}}+\varphi(\ddot{x})\dddot{x}+f(\ddot{x})+g(\dot{x})+h(x)=P(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{1}$$

式中　函数$\varphi(\ddot{x})$，$f(\ddot{x})$，$g'(\dot{x})$，$h'(x)$和$P(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x})$是所依赖变量的连续函数，并且保证解的存在唯一和对初值的连续依赖性．

方程(1)有等价的系统

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y,\ \dot{y}=z,\ \dot{z}=w,\\&\dot{w}=P(t,x,y,z,w)-h(x)-g(y)-f(z)-\varphi(z)w\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

定义

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{z}\int_0^z\varphi(s)ds\quad(z\neq0),\qquad \varphi_1(0)=\varphi(0);$$

$$f_1(z)=\frac{f(z)}{z}\quad(z\neq0),\qquad f_1(0)=f'(0);$$

$$g_1(y)=\frac{g(y)}{y}\quad(y\neq0),\qquad g_1(0)=g'(0).$$

首先考虑$P\equiv0$的情况，我们有

定理1　若下列条件成立：

(i)　$f(0)=g(0)=h(0)=0$；

(ii)　存在正常数a,b,c,d和δ，使对一切y和z有

$$abc-cg'(y)-ad\varphi(z)\geqslant\delta>0;$$

(iii)　$d-\dfrac{a\delta}{4c}<h'(x)\leqslant d$，对一切$x$；

且　$h(x)\operatorname{sgn}x\longrightarrow+\infty$，当$|x|\longrightarrow\infty$；

(iv)　$0\leqslant g_1(y)-c<\dfrac{\delta}{8c}\sqrt{\dfrac{d}{2ac}}$，对一切$y$；

* 樊大钧推荐，1988年3月23日收到．

(v) $0\leqslant f_1(z)-b\leqslant\frac{\varepsilon_0c^3}{d^2}$，对一切$z$，

式中 $0<\varepsilon_0<\varepsilon\leqslant\frac{\delta}{2acD}$，$D=ab+\frac{bc}{d}$；

(vi) $\varphi(z)\geqslant a$，$\varphi_1(z)-\varphi(z)<\frac{\delta}{2b^2c}$，对一切$z$。

则系统(2)的零解为全局渐近稳定。

注1 由条件(ii)、(iv)和(vi)可得

$$g'(y)<ab,\quad \varphi(z)<\frac{bc}{d}. \tag{3}$$

注2 当$\varphi(z)\equiv a$，$f(z)=bz$，$g(y)=cy$，$h(x)=dx$时，定理1的条件即为判定方程

$$\ddddot{x}+a\dddot{x}+b\ddot{x}+c\dot{x}+dx=0$$

的零解全局渐近稳定的Routh-Hurwitz准则。

注3 当$\varphi(z)\equiv a$，$f(z)=bz$时即得文[1]的定理6.6，且减弱了对于函数$h(x)$的条件。当$f(z)=bz$，$h(x)=dx$时即得文[1]的定理6.9。此外，文[3]，[4]，[5]的结果也是定理1的特例。

对于$P(t,x,y,z,w)\not\equiv0$的情况，我们得到

定理2 若下列条件成立：

(i) $f(0)=g(0)=0$；

(ii) 定理1的条件(ii)至(vi)成立；

(iii) $|P(t,x,y,z,w)|\leqslant(A+|y|+|w|)q(t)$；

其中$q(t)$非负连续，满足$\int_0^t q(s)ds\leqslant B<\infty$ ($\forall t\geqslant0$)，且A,B为正常数。

则对任给的有限数x_0,y_0,z_0,w_0，存在常数K

$$K\equiv K(x_0,y_0,z_0,w_0),$$

使系统(2)由初始条件

$$x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0,\quad z(0)=z_0,\quad w(0)=w_0$$

决定的解满足

$$|x(t)|\leqslant K,\quad |y(t)|\leqslant K,\quad |z(t)|\leqslant K,\quad |w(t)|\leqslant K.$$

对一切$t\geqslant0$成立。

为证明上述两定理，作函数$V=V(x,y,z,w)$如下：

$$\begin{aligned}2V(x,y,z,w)&=2\beta\int_0^x h(s)ds+(b\beta-d\alpha)y^2+2\int_0^y g(s)ds+2\alpha\int_0^z f(s)ds\\&\quad+2\int_0^z\varphi(s)sds-\beta z^2+\alpha w^2+2h(x)y+2\alpha h(x)z+2\alpha g(y)z\\&\quad+2\beta y\int_0^z\varphi(s)ds+2\beta yw+2zw.\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\varepsilon+1/a$，$\beta=\varepsilon+d/c$。

下面通过两个引理来证明$V(x,y,z,w)$是系统(2)的Lyapunov(Ляпунов)函数，

引理1

若定理 1 的条件成立，则存在正常数 D_i，$D_i \equiv D_i(a,b,c,d,\varepsilon,\delta)$ $(i=1,2,3,4)$，使对一切x,y,z,w，有不等式

$$V(x,y,z,w) \geqslant D_1\int_0^x h(s)ds + D_2y^2 + D_3z^2 + D_4w^2.$$

证明 函数$2V(x,y,z,w)$可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}2V =& \frac{1}{c}[h(x)+cy+acz]^2 + \frac{1}{\varphi_1(z)}[w+\varphi_1(z)z+\beta\varphi_1(z)y]^2 \\ &+\left[a-\frac{1}{\varphi_1(z)}\right]w^2 + \left[2a\int_0^z f(s)ds - (\beta+a^2c)z^2\right] \\ &+\left[2\int_0^z \varphi(s)sds - \varphi_1(z)z^2\right] + [b\beta - da - \beta^2\varphi_1(z)]y^2 \\ &+\left[2\int_0^y g(s)ds - cy^2\right] + 2ayz[g_1(y)-c] \\ &+\left[2\beta\int_0^x h(s)ds - \frac{1}{c}h^2(x)\right].\end{aligned}$$

现由条件(i)和(iii)得

$$\begin{aligned}V_1 &\equiv 2\beta\int_0^x h(s)ds - \frac{1}{c}h^2(x) \\ &= \frac{2}{c}\int_0^x [d-h'(s)]h(s)ds - \frac{1}{c}h^2(0) + 2\varepsilon\int_0^x h(s)ds \\ &\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(s)ds.\end{aligned}$$

考虑，

$$V_2 \equiv [b\beta - da - \beta^2\varphi_1(z)]y^2 + \left[2\int_0^y g(s)ds - cy^2\right]$$

由条件(iv)知上式后一括号为非负，对于前一括号，利用条件(ii)，(iii)，(v)和(3) 式可得

$$\begin{aligned}&b\beta - da - \beta^2\varphi_1(z) \\ &= \beta[b - ag_1(y) - \beta\varphi_1(z)] + a[\beta g_1(y) - d] \\ &= \beta[b - ag'(\theta_1 y) - \beta\varphi(\theta_2 z)] + a[\beta g_1(y) - d] \\ &\geqslant \beta\left[b - \frac{1}{a}g'(\theta_1 y) - \frac{d}{c}\varphi(\theta_2 z)\right] - \varepsilon\beta\left(ab + \frac{bc}{d}\right) + a[\beta g_1(y) - d] \\ &= \frac{\beta}{ac}[abc - cg'(\theta_1 y) - ad\varphi(\theta_2 z)] - \varepsilon\beta D + a[\beta g_1(y) - d] \\ &\geqslant \frac{\beta\delta}{ac} - \beta D\varepsilon \geqslant \frac{\beta\delta}{2ac} \geqslant \frac{d\delta}{2ac^2}.\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\theta_1\leqslant1$，$0\leqslant\theta_2\leqslant1$。因此

$$V_2 \geqslant \frac{d\delta}{2ac^2}y^2,$$

考虑

$$V_3 \equiv \left[2a\int_0^z f(s)ds-(\beta+a^2c)z^2\right]+\left[2\int_0^z \varphi(s)sds-\varphi_1(z)z^2\right]$$

$$\equiv V_{31}+V_{32}.$$

类似于V_2的估计，并注意到条件(iv),(v),(vi)推知

$$V_{31}\geqslant(ab-\beta-a^2c)z^2$$

$$\geqslant[ab-\beta-a^2g_1(y)]z^2$$

$$\geqslant a[b-ag'(\theta y)-\beta\varphi(z)]z^2+\beta\varphi(z)\left[a-\frac{1}{\varphi(z)}\right]z^2$$

$$\geqslant\left(\frac{a\delta}{ac}-aD\varepsilon\right)z^2\geqslant\frac{\delta}{2a^2c}z^2.$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$。

由条件(vi)得

$$V_{32}\equiv\int_0^z[\varphi(s)-\varphi_1(s)]sds$$

$$\geqslant\int_0^z\left(-\frac{\delta}{2a^2c}\right)sds=-\frac{\delta}{4a^2c}z^2.$$

所以

$$V_3\geqslant\frac{\delta}{4a^2c}z^2.$$

最后

$$V_4\equiv\left[a-\frac{1}{\varphi_1(z)}\right]w^2\geqslant\varepsilon w^2.$$

总结上述结果得到

$$2V\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(s)ds+\frac{d\delta}{2ac^2}y^2+\frac{\delta}{4a^2c}z^2+\varepsilon w^2+2a[g_1(y)-c]yz.$$

考虑表达式

$$V_5\equiv\frac{d\delta}{4ac^2}y^2+2a[g_1(y)-c]yz+\frac{\delta}{8a^2c}z^2.$$

因为上式三项系数均为非负，且有

$$a^2[g_1(y)-c]^2<\frac{4}{a^2}[g_1(y)-c]^2<\frac{d\delta^2}{32a^3c^3}\text{，对一切}y\text{成立。}$$

故有

$$V_5\geqslant0$$

因此

$$2V\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(s)ds+\frac{d\delta}{4ac^2}y^2+\frac{\delta}{8a^2c}z^2+\varepsilon w^2.$$

引理 1 得证。

引理2

若定理 1 的条件成立，则存在正常数D_i，$D_i\equiv D_i(a,b,c,d,\varepsilon_0,\varepsilon,\delta)$ $(i=5,6,7)$，使当(x,y,z,w)是系统(2)的任一解时，有不等式

$$\dot V\equiv\frac{d}{dt}V(x,y,z,w)\leqslant-(D_5y^2+D_6z^2+D_7w^2),$$

证明

$$\dot{V}=-[d-h'(x)]\left(y+\frac{\alpha}{2}z\right)^2-[f_1(z)-b]\left(z+\frac{\beta}{2}y\right)^2$$
$$-[\beta g_1(y)-d]y^2+\frac{\beta^2}{4}[f_1(z)-b]y^2$$
$$-[b-\alpha g'(y)-\beta\varphi_1(z)]z^2+\frac{\alpha^2}{4}[d-h'(x)]z^2$$
$$-[\alpha\varphi(z)-1]w^2.$$

首先考虑

$$V_6\equiv-[\beta g_1(y)-d]y^2+\frac{\beta^2}{4}[f_1(z)-b]y^2$$
$$\leqslant-\varepsilon cy^2+\frac{d^2}{c^2}\cdot\frac{\varepsilon_0c^3}{d^2}y^2$$
$$\leqslant-(\varepsilon-\varepsilon_0)cy^2.$$

这里利用了条件(iv)和(v)。

注意到V_2的估计及条件(iii)可得

$$V_7\equiv-[b-\alpha g'(y)-\beta\varphi_1(z)]z^2+\frac{\alpha^2}{4}[d-h'(x)]z^2$$
$$\leqslant-\frac{\delta}{2\alpha c}z^2+\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha\delta}{4c}z^2\leqslant-\frac{\delta}{2\alpha c}z^2.$$

由条件(vi)推知

$$V_8\equiv-[\alpha\varphi(z)-1]w^2\leqslant-\varepsilon\alpha w^2.$$

因此有

$$\dot{V}\leqslant-(\varepsilon-\varepsilon_0)cy^2-\frac{\delta}{4\alpha c}z^2-\varepsilon\alpha w^2.$$

引理 2 证毕。

定理 1 的证明 由引理 1 和 2 以及定理 1 的条件(iii)可知 $V(x,y,z,w)$ 是系统(2)的Lyapunov函数。因此，系统(2)的零解为全局渐近稳定[1][2]。定理1证毕。

定理 2 的证明 我们利用与证明定理1时相同的V函数。由于定理2没有设 $h(0)=0$，因此，在引理 1 的证明中V_1应有如下估计

$$V_1\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(s)ds-\frac{1}{c}h^2(0).$$

若记 $D_0=c^{-1}h^2(0)$，则在定理2的条件下，引理1的结论应修改为

$$V\geqslant D_1\int_0^x h(s)ds+D_2y^2+D_3z^2+D_4w^2-D_0.$$

而引理 2 的结论应为

$$\dot{V}\leqslant-(D_5y^2+D_6z^2+D_7w^2)+(\alpha w+z+\beta y)P(t,x,y,z,w).$$

若令$D_8=\max(\alpha,1,\beta)$，则有

$$\dot{V}\leqslant D_8[|y|+|z|+|w|](A+|y|+|z|+|w|)q(t).$$

注意到

$$|w|\leqslant1+w^2\text{及}2|yz|\leqslant y^2+z^2$$

从而

$$\dot{V}\leqslant D_9[3+4(w^2+z^2+y^2)]q(t)$$

式中 $D_9=D_8(A+1)$。

由修改后的引理1知

$$V\geqslant D_{10}(y^2+z^2+w^2)-D_0$$

这里 $D_{10}=\min(D_2,D_3,D_4)$，由此得

$$\dot{V}\leqslant D_{11}q(t)+D_{12}Vq(t).$$

式中 $D_{11}=D_9(3+4D_0/D_{10})$，$D_{12}=4D_9/D_{10}$。对上面不等式积分即得

$$V(t)-V(0)\leqslant D_{11}\int_0^t q(s)ds+ D_{12}\int_0^t V(s)q(s)ds$$

利用定理2的条件(iii)，记$D_{13}=D_{11}B+V(0)$，则有

$$V(t)\leqslant D_{13}+D_{12}\int_0^t V(s)q(s)ds$$

由Gronwall-Bellman不等式得

$$V(t)\leqslant D_{13}\exp\{D_{12}\int_0^t q(s)ds\}$$

定理2证毕。

参 考 文 献

[1] Reissig, R. G., Sansone and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations of Higher Order*, Noodhoff Lenden (1974).

[2] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社（1981）。

[3] 卢亭鹤、沈家骐、金均，四阶方程Ляпунов函数的作法与应用，上海师院学报，2（1982）。

[4] 沈家骐、卢亭鹤、金均，一类四阶方程Ляпунов函数的作图法，上海师院学报，3（1983）。

[5] 梁在中，关于非线性四阶方程解的稳定性，北京工业大学学报，2（1984）。

On the Boundedness and the Stability Properties of Solution of Certain Fourth Order Differential Equations

Yu Yuan-hong

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)

Cheng Wen-deng

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

This paper investigates equation (1) in two cases: (i) $P\equiv 0$, (ii) $P\not\equiv 0$ satisfies $|P(t,x,y,z,w)|\leqslant(A+|y|+|z|+|w|)q(t)$, where $q(t)$ is a nonnegative function of t. For case (i) the asymptotic stability in the large of the trivial solution $x=0$ is investigated and for case (ii) the boundedness result is obtained for solutions of equation (1). These results improve and include several well-known results.