

非协调有限元的全塑性分析*

华伯浩 吴长春 刘小玲 毛昭林

(上海计算技术研究所, 1989年1月10日收到)

摘 要

本文采用满足相容条件的非协调有限元模型以解决全塑性分析中有限元解的数值精度问题。文中讨论了该模型适用于全塑性分析的机理和判据, 还设计了一个确定塑性极限载荷的算法。

关键词 非协调 有限元 全塑性分析

一、引 言

有限元法已经广泛地应用于结构的弹塑性分析, 但是对于结构的全塑性计算尚研究得不够。应用表明, 常规的有限元并不总是能胜任这类复杂计算。在平面应变问题、轴对称问题和一般三维体问题的塑性计算中, 如果计算对象是刚塑性、理想塑性材料, 或是硬化指数很低的塑性材料, 使用常规的有限元增量迭代法常常得不到理想的结果。例如, 使用位移协调元求解, 将得到明显超过理论、实验值的极限载荷, 更严重的是, 在计多情况下, 数值解根本就不存在有与结构极限状态对应的极限值。这种现象是由于塑性理论中关于材料不可压的假定, 即体积应变

$$e_{ii} = u_{i,i} = 0 \quad (1.1)$$

导致了有限元离散系统自由度的过分约束, 放大了结构的刚度。文献[6]指出了式(1.1)是塑性增量有限元解的加载收敛到极限载荷的条件。如此, 可以看出, 塑性增量解加载的收敛即极限载荷存在与不可压缩性质在机理上的联系。

文献[1]~[5]提出过多种极限分析的有限元格式和算法, 但是, 这类算法并不直接解决有限元弹塑性分析于塑性范围的精度问题, 与塑性分析增量迭代法的求解框架相差甚远, 因此很难为当前的一些大型有限元程序所纳入。对全塑性计算, 约束(1.1)导致的数值困难, 有些技巧能够解决, 但都必须有专门的数值处理过程, 复杂了算法。

通过合理设计有限元离散模型, 以自然反映约束(1.1)则是一条简单、方便、直接的途径, 这样, 新单元既便于直接进入已有的有限元程序, 同时又避免了上列方法所存在的一些不足。

本文试图通过合理设计满足相容性条件的完备二次平面非协调元来解决平面应变全塑性分析中有限元解的数值精度问题, 文中讨论了该元素在塑性计算中加载收敛的不可压缩条件与网格拓扑判据, 设计了一个确定塑性极限载荷的算法。

* 徐次达推荐。

二、非协调有限元公式

离散体系的势能泛函可表示为各单元势能之和:

$$\Pi = \sum_{\circ} \Pi^{\circ} = \sum_{\circ} \int_{V^{\circ}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{C} 为弹性矩阵, 应变由位移 \mathbf{u} 微分给出,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$$

若单元为非协调元, 则系统泛函为:

$$\Pi = \sum_{\circ} \Pi^{\circ} + \Delta$$

对满足弱间断条件的单元, Δ 值很小^[9], 势能泛函可仍用式 (2.1)。为保证解的收敛, 位移试解还必须满足下述条件。设弱间断非协调元的位移试解为协调部份与非协调部份之和:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^d \quad (2.2)$$

对式 (2.1) 利用分部积分, 则由非协调元离散系统势能泛函的驻值条件可导出非协调元的能量相容条件^[8]:

$$\sum_{\circ} \oint_{\partial V^{\circ}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}^d ds = 0 \quad (2.3)$$

若式 (2.3) 中, $\boldsymbol{\sigma}$ 简化为常应力 $\boldsymbol{\sigma}_c$, 则上述相容条件就简化为 Irons 的常应力分片试验准则, 为了易于实现, 式 (2.3) 代之以单片试验准则:

$$\oint_{\partial V^{\circ}} \mathbf{n}^T \mathbf{u}^d ds = 0 \quad (2.4)$$

式中 \mathbf{n} 为单元边界的方向余弦矩阵。

根据式 (2.1), (2.2) 与 (2.4), 便可建立下述四边形非协调有限元的刚度矩阵公式。设取单元位移的协调部份为双线性插值函数:

$$\mathbf{u}^0 = \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

相应的坐标变换:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

为满足式 (2.4), 按照生成非协调函数的虚参数法^[7]取:

$$\mathbf{u}^d = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{N}^* \boldsymbol{\lambda}^* \quad (2.7)$$

其中 $\mathbf{N}_\lambda = [\xi^2 \ \eta^2]$, $\mathbf{N}^* = [\xi \ \eta]$, \mathbf{u}^d 为 \mathbf{u}^d 的一个分量。可得到:

$$\mathbf{u}^d = (\mathbf{N}_\lambda - \mathbf{N}^* \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{P}_\lambda) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda^* \boldsymbol{\lambda}$$

容易求得 \mathbf{P}_* , \mathbf{P}_λ 的显式表示。

由式 (2.5), (2.6) 定义的单元称为 Q4 元, 而由式 (2.2), (2.5), (2.7), (2.6) 定义的

单元称为NQ6元。以下的数值试验将会表明，与Q4元相比，NQ6元有优良的数值性能，而与此类似的 wilson 元相比，易检验后者不通过分片试验，有时的数值结果是不精确的。

三、NQ6元可确定塑性极限载荷的一个判据

根据式(2.2), (2.5), (2.10), NQ6元的位移可表示为:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_x + b_x \xi + c_x \eta + d_x \xi \eta + e_x \xi^2 + f_x \eta^2 \\ v &= a_y + b_y \xi + c_y \eta + d_y \xi \eta + e_y \xi^2 + f_y \eta^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

而式(2.6)可改写为

$$\begin{aligned} x &= a_x + \beta_x \xi + \gamma_x \eta + \delta_x \xi \eta \\ y &= a_y + \beta_y \xi + \gamma_y \eta + \delta_y \xi \eta \end{aligned}$$

又根据不可压性质(1.1), 即可导得如下五个不可压约束:

$$\left. \begin{aligned} c_x \beta_y - b_x \gamma_y - c_y \beta_x + b_y \gamma_x &= 0 \\ c_x \delta_y - d_x \gamma_y - c_y \delta_x + d_y \gamma_x - 2f_x \beta_y + 2f_y \beta_x &= 0 \\ d_x \beta_y - b_x \delta_y - d_y \beta_x + b_y \delta_x + 2e_x \gamma_y - 2e_y \gamma_x &= 0 \\ e_x \delta_y - e_y \delta_x = 0, \quad f_x \delta_y - f_y \delta_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

对Q4元, 式(3.1)中 $e_x = e_y = f_x = f_y = 0$, 于是式(3.2)减缩为三个不可压约束。

网格细分时, 离散系统的总自由度及约束总数都将增加。设网格单元数为 n_e , 网格节点总数为 n_p , 容易证明, 当网格均匀精化时有:

$$\lim_{n_e \rightarrow \infty} (n_p/n_e) = 1 \quad (3.3)$$

我们定义离散系统的自由度总数与约束总数之比为 R 。考虑网格精化的极限情形。利用式(3.3), 对Q4元有:

$$R = \lim_{n_e \rightarrow \infty} (2n_p/3n_e) = 2/3 < 1 \quad (3.4)$$

式中分母上的3表示单元的约束数, 分子上的2表示节点的自由度。对NQ6元:

$$R = \lim_{n_e \rightarrow \infty} ((2n_p + 4n_e)/5n_e) = 6/5 > 1 \quad (3.5)$$

式中分母上的5表示单元的约束数, 分子上的2表示节点自由度, 4表示单元的内自由度。判据(3.4)表示存在过多的约束, 以致离散系统用Q4元不能反映式(1.1)。判据(3.5)却表示有足够的自由度供调节, 离散系统用NQ6元能反映式(1.1)。因此, NQ6元可以直接用于不可压缩计算, 进而推广到全塑性分析。我们以平面应变悬臂梁及平面应变厚壁圆筒为例, 对不同泊桑比 ν 作了计算。当 $\nu = 0.49$ 时, Q4元的数值结果完全是错的, 而NQ6元却给出了与解析解非常接近的结果。第五节中将给出该类单元全塑性分析的几个数值结果。

四、全塑性分析的求解算法

以下将NQ6元推广到全塑性数值计算。易知, 塑性状态的应力增量与应变增量关系为:

$$d\sigma = C_p d\epsilon$$

由米赛斯屈服准则易导出平面应变弹塑性矩阵 C_p , 各个元素的显式表示, 它们是应力的函数,

于是, 总体平衡方程组是一个与位移解 u 有关的非线性方程组:

$$K(u)u=R \quad (4.1)$$

式(4.1)的求解可采用一般的增量牛顿法:

$$K_{m+1}^{(n)} \Delta u_{m+1}^{(n)} = R_{m+1} - \int_V B^T \sigma^{(n)} dV \quad (4.2a)$$

$$\Delta u_{m+1}^{(n)} = u_{m+1}^{(n+1)} - u_{m+1}^{(n)} \quad (4.2b)$$

式中的 $K_{m+1}^{(n)}$ 取为 $K_{m+1}^{(1)}$, 即修正的牛顿法.

选择载荷序列 R_k ($k=1, 2, 3, \dots$), 直至结构失去工作能力, 此时的 R_k 记为 R_s , 即为所求的该结构的塑性极限载荷, 同时, 计算过程给出了结构各加载步的变形与应力. 这个一般算法我们称之为算法 A .

用算法 A 寻找准确的 R_s 工作量很大, 邻近极限载荷时需要通过微调载荷增量才能求得较准确的结果. 因而, 宜适当修改算法 A , 令加载至整个结构邻近屈服时, 取消平衡迭代, 改用增量法, 即式(4.2a)中令 $n=1$, 可改写为下式:

$$K_{m+1} \Delta u_{m+1} = \Delta R_{m+1} \quad (4.3)$$

按以下步骤搜索, 乃至求得极限载荷.

1. 设算法 A 执行至第 k 个加载完成, 而后:

- (1) 取 $\Delta R \Rightarrow \Delta R_{k+1}$ 作为载荷增量;
 - (2) 计算相应的刚度矩阵 K_{k+1} ;
 - (3) 解出 Δu_{k+1} ;
 - (4) 计算各单元等效应力, 判别有无单元进入屈服. 若无, 则转(5), 否则转(6);
 - (5) 以 ΔR_{k+1} 作为加载增量, 继续加载, 转(2);
 - (6) 计算屈服单元中等效力 $\bar{\sigma}$ 最大者与材料的屈服应力 σ_s 之差. 若 $|\bar{\sigma} - \sigma_s| / \sigma_s \leq 0.005$, 转(7). 否则, 修改加载增量, $\Delta R_{k+1} * 0.618 \Rightarrow \Delta R_{k+1}$, 转(2);
 - (7) 判断是否全部单元均已屈服, 或位移出现大数. 如是, 运算结束, 否则转(1).
- (1)~(7) 构成算法 B , 称之为增量搜索法.

显然, 算法 A 与算法 B 相结合确定极限载荷比较恰当. 算法 A 允许取较大的载荷增量, 几次加载就能使大批单元进入屈服. 剩余的单元用算法 B , 使逐个单元或几个单元屈服, 从而能较快地达到精确的极限载荷值. 若组成结构的单元数量少, 则可只取算法 B , 同样达到精确的结果.

五、计算实例

用 $NQ6$ 元及上节的求解算法对下列实例进行全塑性计算, 并分别与解析解、其它有限元解比较.

例1 分析厚壁圆筒, 取其 $1/4$ 的网格划分如图1, $E=1000\text{kgf/cm}^2$, $\nu=0.25$, 材料屈服应力 $\sigma_s=6000\text{kgf/cm}^2$, 在均布内压作用下, 分别用 $Q4$ 、 $NQ6$ 元进行计算, 其塑性区扩展过程与极限载荷见表1. 图1中各单元内的数字表示了塑性区扩展的次序. 用 $Q4$ 元计算时, 在所有单元进入屈服后, 还可以继续加载, 这表明结构的离散模型尚能承载, 因而求不出结

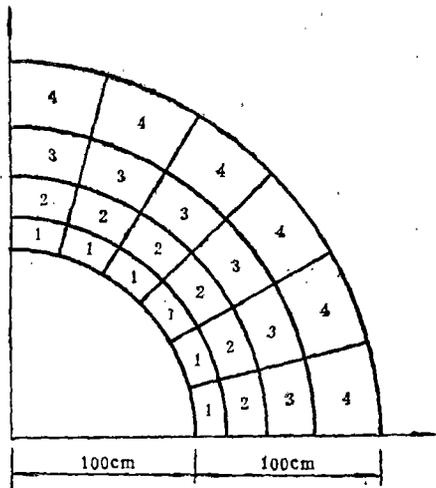


图 1

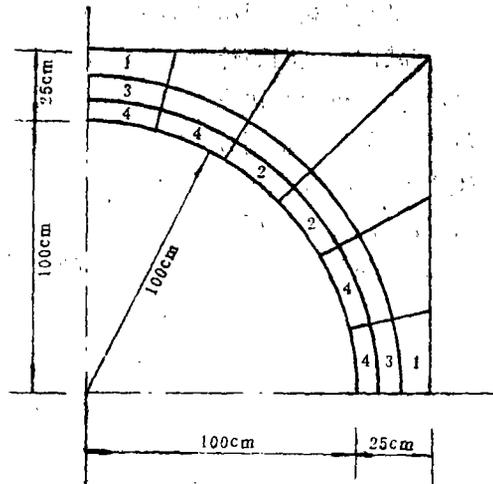


图 2

构的塑性极限载荷 p_s 的值。NQ6 元当加载至 $p_s=4778$ 时，位移出现大数，表明结构已经破坏，因而NQ6元的 p_s 正表示了结构的塑性极限载荷，与解析解4802的误差表明计算结果精度优良 ($1\text{kgf}=9.8\text{N}$)。

例2 分析开圆孔的方管，取其1/4，结构的网格划分如图2， $L=250\text{cm}$ ， $r=100\text{cm}$ ， $E=1500\text{kgf/cm}^2$ ， $\nu=0.25$ ，作用有均布内压，屈服应力 $\sigma_s=6000\text{kgf/cm}^2$ ，塑性区扩展过

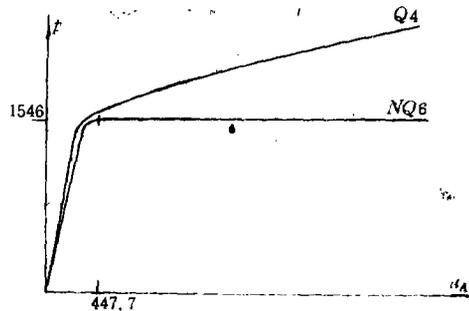


图 3

程与极限载荷见图3及表2。图2中的数字表示了用NQ6元计算时，塑性区的扩展次序，在第4批单元屈服后，由图3可以看出，位移出现大数，表征了方管破损，这时的内压值 p_s 即为要求的极限载荷。图3表示了Q4元根本不存在压力 p 的极限值，即使系统的全部单元都屈服

表 1

有限元解 单元类型	弹性极限载荷 p_e	塑性极限载荷 p_s	24个单元全屈服 时加载值
Q4元	2979		4894
NQ6元	2976	4778	4778
解析解 ^[11]	2984	4802	

表 2

有限元解 单元类型	弹性极限载荷 p_e	塑性极限载荷 p_s	18个单元全屈服 时 p 值
Q4	1503	(不存在)	3910(28N)
NQ6	1382	1572(28N)	有8个单元不屈服
文[4]		1612	
文[5]		1572(36N)	
解析解 ^[10]	1338	1546	

后,仍能继续加载。图中明显地反映了结构的刚度为Q4元放大的情况。另一方面表2中同时列入了文献[4]、[5]的计算结果以资比较。其中,括号内的数字表示离散体的节点数。

例3 分析带有边缘半圆开孔的长板,如图4, $R=3\text{cm}$, $E=1500\text{kgf/cm}^2$, $\nu=0.25$, 两端均匀拉伸,网格划分如图5,塑性区扩展与极限载荷见图6及表3。图5中的数字表示了用NQ6元计算时,塑性区的扩展次序,在第11批单元屈服后,由图6可以看出,位移出现大数,结构破坏。由NQ6元再次得到了合理的极限载荷 $p_s=4792$,而Q4元的极限载荷根本不存在,即系统全部进入屈服后仍可继续承载,表中'N.'表示结构的节点数。

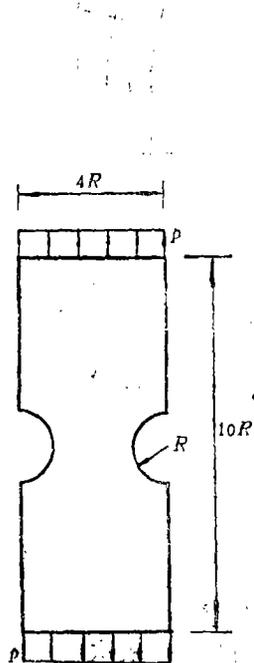


图 4

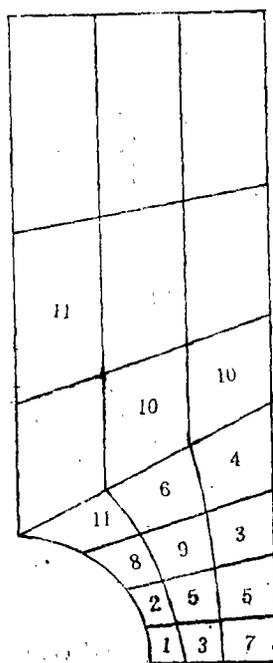


图 5

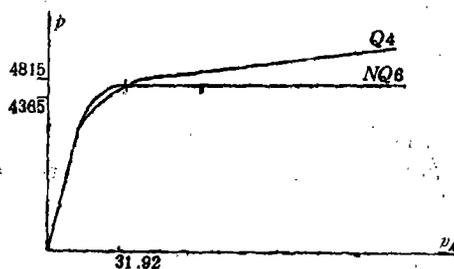


图 6

表 3

有限元解 单元类型	塑性极限载荷 p_s	21个单元全屈服 时 p 值	p_s^+	p_s^-
Q4	(不存在)	5875		
NQ6	4792(32N.)	6个单元不屈服		
文献[4]	4822(113N.)			
文献[5]	4704(56N.)			
解析解[10]			4815	4365

六、结 论

- (1) 满足相容条件的非协调元能解决近不可压缩问题。
- (2) 满足相容条件的非协调元能解决全塑性分析中有限元解的数值精度问题。几个实例的载荷挠度曲线表明这类单元于全塑性范围内的数值结果精度优良。
- (3) 极限分析算法A与算法B相结合能有效地解决大型复杂结构的全塑性计算问题。
- (4) 本文的方法不需特别数值处理即可为已有的有限元程序所纳入。

参 考 文 献

- [1] Anderheggen, E. and H. Knopfel, Finite elements limit analysis using linear programming, *Int. J. Solid Struct.* 8 (1972), 1413—1431.
- [2] Faccioli, E. and E. Vitiello, A finite element linear programming method for the limit analysis of thin plates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 5 (1973).
- [3] Belytschko, T. and P. G. Hodge, Jr., Plane stress limit analysis by finite elements, *J. Eng. Meck. Div. AscE*, 96 (1970), 931—944.
- [4] Casciaro, R. and Cascini, L., A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18 (1982), 211—243.
- [5] 高杨、黄克智, 极限分析的泛惩罚有限元素法, 全国第二届计算力学会议 (1986).
- [6] Nagtegaal, J. C., D. M. Parks and J. R. Rice, On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4 (1974), 153—177.
- [7] Pian, T. H. H. and Wu Chang-chun, General formulation of incompatible shape function and an incompatible isoparametric element, *Proc. Invitational China-American Workshop on F. E. M.*, Chengde, June 2—6 (1986), 159—165.
- [8] Wu Chang-chun, Huang Mao-kuang and T. H. H. Pian, Energy consistency condition for incompatible elements and its implementation, *Proc. of Int. Conf. on Computational Engineering Mechanics*, Beijing, June 22—25 (1987), 686—690.
- [9] 冯康, 论间断有限元的理论, 计算数学, 4 (1979).
- [10] Prager, W. and P. G. Hodge Jr., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York (1951).
- [11] 王仁、熊祝华、黄文彬, 《塑性力学基础》, 科学出版社 (1982).

Plastic Limit Analysis of Incompatible Finite Element Method

Hua Bo-hao Wu Chang-chun Liu Xiao-ling Mao Zhao-lin

(Shanghai Institute of Computer Technology, Shanghai)

Abstract

This paper describes an incompatible finite element model satisfying the consistency condition of energy to solve the numerical precision problem of finite element solution in perfectly plastic analysis. In this paper the reason and criterion of the application of the model to plastic limit analysis are discussed, and an algorithm of computing plastic limit load is given.

key words incompatible, finite element, plastic limit analysis