

文章编号: 1000-0887(2004) 06_0591_08

自由表面与粘性尾迹的相互作用^{*}

卢东强^{1,2}

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 香港大学 机械工程系, 香港薄扶林道)

(戴世强推荐)

摘要: 解析地研究了无限深不可压粘性流体中运动物体产生层流尾迹与自由表面波的相互作用。以定常的 Oseen 方程模拟受扰流动, 对于小振幅自由表面波则采用线性化的运动学和动力学边界条件。在数学描述上, 运动物体以 Oseen 极子模拟, 受扰流场分解成表述粘性尾迹的无界奇异 Oseen 流和描述自由面效应的有界正则 Oseen 流之和。通过积分变换法, 得到自由表面波的精确定解。借助 Lighthill 的两步格式, 导出了自由面波高带有附加校正项的渐近解。所得对称解显示了波动的振幅因粘性和潜深的存在而呈指数衰减。

关键词: 自由表面波; 粘性尾迹; 粘性; 潜深; Oseen 极子; Lighthill 两步格式; 渐近解

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A

引 言

物体运动而产生的自由表面波是理论流体动力学的一个经典问题, 势流理论广泛应用于波形的定性研究^[1~4]。由此发现, 运动点源产生的定常远场波形是由局限在一个 V 状区域两族波(即横波和散波)的叠加。然而, 势流理论往往不能定量给出点源运动轨迹附近的波高。众所周知, 所有流体都具有粘性, 因而粘性理论比势流理论在数学上更精确, 物理上更合理。自 Cumberbatch^[5] 首先研究粘性对船行波的影响以来, 对带自由面的粘性流动现象的解析研究越来越受到重视。Allen^[6] 比较了 Kelvin 船行波中的粘性效应和点源分散效应; 运用 Oseen 近似理论, Brad^[7] 考虑了涡动对船行波的影响。通过对 Navier-Stokes 方程做级数展开, Lugt^[8] 对粘性流体的自由表面的物理特性做了局部分析。

从合成孔径雷达所捕获的船行波图象上, 可以观测到在海洋中因浮行或潜行物体产生的波形和尾迹, 但这些尾迹的产生机理尚未得到完整的研究^[9,10]。我们认为运动物体在流体表面所产生的信号, 与自由表面波和层流尾迹间的相互作用有关。

为了初步了解波和尾迹的相互作用, Lurye^[11] 提出了定常 Oseen 流动的 Green 函数问题, 其中流场被认为是一个无界“来流”和一个“绕射”流动的叠加。然而, Lurye^[11] 仅给出了描述波与

* 收稿日期: 2002_11_01; 修订日期: 2003_11_11

基金项目: 香港研究资助局资助项目(HKU7076/02E); 上海市重点学科建设项目

作者简介: 卢东强(1972—), 男, 福建惠安人, 博士(Tel: + 86_21_56338372; Fax: + 86_21_36033287; E-mail: dqlu@mail.shu.edu.cn)。

尾迹相互作用的 Fourier 积分式, 而要精确地给出这些式子的解析式是极端困难的. 为了对这一问题有进一步的了解, 有必要采用摄动的方法求解. 假定波动主要源于受扰流的“绕射”成分, Lurye^[12] 和 Chan & Chwang^[13] 分别求解了 Oseen 极子和 Oseen 偶极子产生的自由表面波的渐近解. 最近, Liu & Tao^[14] 和 Lu^[15] 用表面压力点模拟一个浮行体, 解析地研究了无限深粘性流体中一个浮体运动生成的自由面波和远尾迹.

本文研究具有无限深度的不可压粘性流体中运动潜体产生的自由表面波. 运动物体以 Oseen 极子模拟. 假定流动处于层流状态, 第 1 节给出了数学描述, 第 2、3 节分别导出自由面上波形的精确积分解和渐近解. 第 4 节给出相关的物理解释. 第 5 节作出结论.

1 数学描述

我们考虑在静止的不可压粘性流体中, 匀速运动物体所产生的自由面流动. 忽略初始效应, 假定运动是定常的. 将坐标系固定在移动物体上, 如图 1 所示, x 轴沿运动物体的直线轨迹, z 轴垂直向上, 则流体以匀速 Ue_x 流动, 其中 U 是常数, e_x 为 x 轴方向矢量.

假定运动物体产生的远流场满足 Oseen 方程, 我们选取 ρU^2 作为参考压力, U^2/g 为特征长度, 其中 ρ 是流体的密度, g 为重力加速度. 分别以 U 、 ρU^2 、 U^2/g 为特征系数无量纲化速度、压力、距离, 可得无量纲化的连续性方程和带奇点项的 Oseen 方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\nabla P + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{u} + F \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 表示受扰流场的速度, P 为动态压力, $\delta(\cdot)$ 是三维的 Dirac 函数, 且

$$\varepsilon = \mu g / \rho U^3, \quad (3)$$

其中, μ 是流体的粘度, $F = -F e_x$ 是位于 $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -h_0)$ 的恒定集中力, h_0 为潜深, F 为奇点力的大小. 这样的集中力被称为基本奇点^[16], 方程 (1) 和 (2) 与之对应的基本解称为 Oseen 极子. 无量纲化参数 ε 则为 Reynolds 数的关于特征长度的倒数.

对于小振幅波, 我们采用线性化的边界条件, 即在 $z = 0$ 上, 有

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad (4)$$

$$\varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} = 0, \quad (6)$$

$$p - 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

其中, $p = P - \eta$ 为未扰自由面上的总压, $\eta(x, y)$ 表示无量纲化的位移. 式 (4) 表示自由面上的流体质点一直保留在自由面上, 即运动边界条件. 忽略表面张力的影响, 式 (5) 和 (6) 分别表示自由面上 x 和 y 方向的剪切力为零, 式 (7) 表示法向应力为零. 式 (5) 至 (7) 为动力边界条件.

控制方程 (1) 和 (2) 及边界条件 (4) 至 (7), 构成了一个带奇点的边值问题. 我们认为受扰流场 (\mathbf{u}, P) 可以表示为无界的奇异 Oseen 流动 (\mathbf{u}_S, P_S) 与有界的正则 Oseen 流动 (\mathbf{u}_R, P_R) 之和, 前者表示奇点引发的粘性尾迹的效应, 而后者表示自由面效应, 即

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + \mathbf{u}_R(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$P = P_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + P_R(\mathbf{x}) \quad (9)$$

众所周知, 任何连续的矢量都可以表示成一个无旋向量和一个无散向量之和, 即

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_T, \quad (10)$$

和

$$\mathbf{V}_L = \nabla \Phi, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_T = 0, \quad (12)$$

其中 $\Phi(\mathbf{x})$ 为一个标量势函数, 表述无旋流动; 而 $\mathbf{V}_T(\mathbf{x})$ 表述有旋流. 我们有

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_T}{\partial x} = \varepsilon \nabla^2 \mathbf{V}_T, \quad (14)$$

$$P_R = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (15)$$

因而, 在未扰自由面 ($z = 0$) 上的边界条件可用 u_S , P_S , Φ 和 \mathbf{V}_T 来表示, 即

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + w_T \right) = w_S, \quad (16)$$

$$2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u_T}{\partial z} + \frac{\partial w_T}{\partial x} = - \left(\frac{\partial u_S}{\partial z} + \frac{\partial w_S}{\partial x} \right), \quad (17)$$

$$2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v_T}{\partial z} + \frac{\partial w_T}{\partial y} = - \left(\frac{\partial v_S}{\partial z} + \frac{\partial w_S}{\partial y} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta + 2\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial w_T}{\partial z} \right) = P_S - 2\varepsilon \frac{\partial w_S}{\partial z}, \quad (19)$$

其中, (u_S, v_S, w_S) 和 (u_T, v_T, w_T) 分别表示 \mathbf{u}_S 和 \mathbf{V}_T 的各分量. 这样, 奇异流动和正则流动通过边界条件建立了相互关系.

2 精确积分解

对方程(1)和(2)进行 Fourier 变换, 并运用 Cauchy 留数定理, 可以得到无界奇异流动的 Fourier 积分解:

$$u_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = - \frac{1}{8\pi^2} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} \nabla^2 - \nabla \nabla) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \frac{\exp(i\alpha x + i\beta y)}{i\alpha} \times \\ \left[\frac{1}{A} \exp(-A|z + h_0|) - \frac{1}{B} \exp(-B|z + h_0|) \right], \quad (20)$$

$$P_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = - \frac{1}{8\pi^2} (\mathbf{F} \cdot \nabla) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \frac{1}{A} \exp(i\alpha x + i\beta y - A|z + h_0|), \quad (21)$$

其中,

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (22)$$

$$B = \sqrt{i\alpha/\varepsilon + \alpha^2 + \beta^2}. \quad (23)$$

引用 Weyl 积分式^[17], 式(20)和(21)可以化成

$$u_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} \nabla^2 - \nabla \nabla) \int_0^{(x-r)/(2\varepsilon)} \frac{1 - \exp(\xi)}{\xi} d\xi, \quad (24)$$

$$P_S(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = - \frac{1}{4\pi} \mathbf{F} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad (25)$$

其中 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, 式(24)和(25)和 Oseen-Burger 张量一致^[18]. 根据 Oseen 解的分解定理^[19], 容易证明式(20)和(21)中带 $\exp(-A|z + h_0|)$ 项代表无粘流动, 而带 $\exp(-B|z +$

$h_0 |)$ 项代表粘性效应。

对自由面流动 ($z \leq 0$), 可以引进如下的 Fourier 变换:

$$\left\{ \eta, \Phi, V_T \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \left\{ \eta, \Phi \exp(Az), V_T \exp(Bz) \right\} \exp(i\alpha x + i\beta y). \quad (26)$$

这样的变换使得方程(13)和(14)自动满足。将式(26)运用到式(13)和(16)至(19), 并考虑到连续性方程, 我们得到求解 $\left\{ \eta, \Phi, V_T \right\}$ 的联立代数方程组。由此, 容易求得 η 的精确积分表达式:

$$\eta = \frac{F}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{D} \exp(i\alpha x + i\beta y) d\alpha d\beta, \quad (27)$$

其中,

$$N = (i\alpha + 2A^2 \varepsilon) \exp(-Ah_0) - 2AB\varepsilon \exp(-Bh_0), \quad (28)$$

$$D = A - \alpha^2 + 4i\varepsilon\alpha^2 + 4\varepsilon^2 A^3 (A - B). \quad (29)$$

3 渐近展开

式(27)精确地给出了自由面上波形的表达式, 但不具有物理直观。因而, 我们有必要寻求式(27)的渐近解。下文将以 Reynolds 数的倒数 ε 为摄动小参数, 运用 Lighthill 的两步格式^[20, 21]对波形进行摄动分析。

为了运算式(27)中的 α 积分, 我们首先分析被积函数的分母的解析特性。式(29)中的 $D(\alpha, \beta, \varepsilon)$ 可认为是一个色散函数, 它定义了粘性波的色散关系。式(27)的被积函数的极点由以下色散方程的根所确定

$$D = A - \alpha^2 + 4i\varepsilon\alpha^2 + 4A^3(A - B)\varepsilon^2 = 0. \quad (30)$$

当 ε 较小时, 色散方程有两个关于 α 的零点:

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} a_0 + i\varepsilon a_1 + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (n = 1, 2), \quad (31)$$

其中

$$a_0(\beta) = [1 + (1 + 4\beta^2)^{1/2}]^{1/2} / \sqrt{2}, \quad (32)$$

$$a_1(\beta) = 4a_0^6(2a_0^2 - 1)^{-1}. \quad (33)$$

在 (x, y) 平面引进极坐标 (R, θ) 如下

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (34)$$

根据 Lighthill^[20] 的理论, 式(27)中的积分值主要贡献来自色散方程(30)的零点附近。Lighthill 方法的第一步中, 我们运用留数定理得到当 R 较大时波形的渐近表达式

$$\eta = \frac{F}{2\pi} \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \left\{ \frac{a_0^2 N_1}{1 - 2a_0^2 \exp[Rf_n(\beta)]} \right\}, \quad (35)$$

其中

$$N_1 = - [1 + 2(-1)^n i\varepsilon a_0^3] \exp(-a_0^2 h_0) + 2(-1)^n i\varepsilon^{1/2} a_0^3 \exp \left[- \frac{a_0^2 h_0}{\sqrt{2\varepsilon}} [1 + (-1)^{n+1} i] + (-1)^{n+1} \frac{\pi i}{4} \right] + o(R^{-1}), \quad (36)$$

$$f_n(\beta) = i\alpha_n \cos \theta + i\beta \sin \theta + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \theta \in (-\pi, \pi). \quad (37)$$

Lighthill 方法的第二步中, 我们将运用最速下降法求解当 R 较大时的 β 积分。 β 积分的驻定点由以下方程确定

$$f_n(\beta) = 0 \quad (n = 1, 2), \quad (38)$$

其中撇号表示对 β 求导。参照式(31), 可以假定方程(38)具有以下形式的渐近解

$$\beta = b_0 + \mathcal{E}b_1 + O(\mathcal{E}^{3/2}). \quad (39)$$

将式(39)代入式(38), 并在 $\beta = b_0$ 附近做 Taylor 展开, 可以得到式(39)的首项由以下方程确定

$$(-1)^{n+1} a_0'(\beta) \cos \theta + \sin \theta = 0 \quad (n = 1, 2), \quad (40)$$

而第二项由下式确定

$$b_1 = -i(-1)^{n+1} \left[\frac{a_1'(\beta)}{a_0'(\beta)} \right]_{\beta=b_0} \quad (n = 1, 2). \quad (41)$$

容易求得渐近解的首项为

$$b_0 = \beta_{nm} = (-1)^n q_m Q_m^{1/2} \tan \theta \quad (n, m = 1, 2), \quad (42)$$

其中

$$Q_m = (q_m + 1)/2, \quad (43)$$

$$q_m = 2 \left[1 + (-1)^{m+1} \sqrt{1 - 8 \tan^2 \theta} \right]^{-1}. \quad (44)$$

式(37)在驻点附近可表示为

$$f_n(\beta) = f_n(\beta_{nm}) + i \mathcal{E} b_1 \left[(-1)^{n+1} a_0'(\beta_{nm}) \cos \theta + \sin \theta \right] + \frac{1}{2} f_n''(\beta_{nm}) (\beta - \beta_{nm})^2 + O(\mathcal{E}^{3/2}), \quad (45)$$

其中

$$f_n(\beta_{nm}) = -\mathcal{E} a_1(\beta_{nm}) \cos \theta + i \left[(-1)^{n+1} a_0(\beta_{nm}) \cos \theta + \beta_{nm} \sin \theta \right]. \quad (46)$$

运用最速下降法和其他数学运算, 粘性尾迹上的波形可表示为

$$\eta = \sum_{k=0}^2 \eta_k + o(R^{-1}), \quad (47)$$

其中

$$\eta_0 = F d^R \sum_{m=1}^2 d_m^V d_m^S Q_m^{3/4} \cos M_m, \quad (48)$$

$$\eta_1 = 2 \mathcal{E} F d^R \sum_{m=1}^2 d_m^V d_m^S Q_m^{9/4} \sin M_m, \quad (49)$$

$$\eta_2 = -2 \mathcal{E}^{1/2} F d^R \sum_{m=1}^2 d_m^V d_m^B Q_m^{3/2} \sin \left[M_m - \frac{Q_m^{1/4} h_0}{\sqrt{2 \mathcal{E}}} + \frac{\pi}{4} \right], \quad (50)$$

$$d^R = \left[\frac{2}{\pi R \cos \theta} \right]^{1/2} (1 - 8 \tan^2 \theta)^{-1/4}, \quad (51)$$

$$d_m^V = \exp(-4 \mathcal{E} q_m^{-1} Q_m^3 R \cos \theta), \quad (52)$$

$$d_m^S = \exp(-Q_m h_0), \quad (53)$$

$$d_m^B = \exp \left[-\frac{Q_m^{1/4} h_0}{\sqrt{2 \mathcal{E}}} \right], \quad (54)$$

$$M_m = Q_m^{1/2} R (\cos \theta - q_m \sin \theta \tan \theta) + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4}. \quad (55)$$

4 物理解释

不难看出, 波形的解仅仅在 $|\theta| < \theta^C$ 的区域内成立, 其中 $\theta^C = \arctan \sqrt{1/8} \approx 19^\circ 28'$, 即所有波动和尾迹都囿于运动物体下游的 V 状区, 如图 2 所示。注意到波形的解依赖于角度 θ , 波型可以常相位线显示, 其参数方程如下

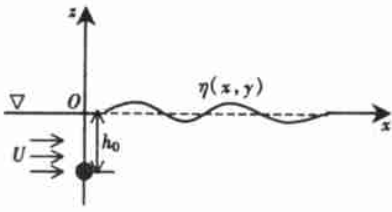


图 1 坐标系

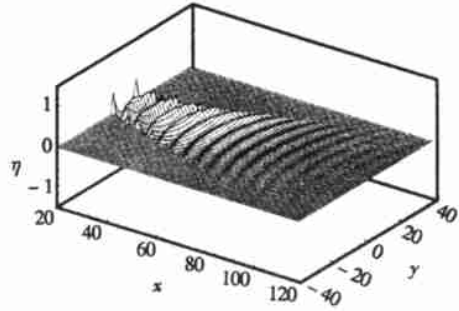


图 2 当 $h_0 = 1, \varepsilon = 0.01$ 和 $F = 4\pi$ 时 Oseen 极子产生的自由表面波

$$x = \frac{2k\pi + (-1)^m \pi/4}{Q_m^{V/2} (1 - q_m \tan^2 \theta)}, \tag{56}$$

$$y = \frac{[2k\pi + (-1)^m \pi/4] \tan \theta}{Q_m^{V/2} (1 - q_m \tan^2 \theta)} \quad (m = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots), \tag{57}$$

θ 为参数。图 3 显示了当 $k = 1, 2, 3$ 时粘性自由面波型, 从中可以得知表达式中和 q_1 有关的项表示横波, 而和 q_2 有关的项表示散波。

从式(55)可以看出, 我们可以定义相位函数如下

$$M_m = K_m R + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4}, \tag{58}$$

其中 K_m 是波数, 且

$$K_m = Q_m^{V/2} (\cos \theta - q_m \tan \theta \sin \theta) \quad (m = 1, 2). \tag{59}$$

于是, 波长 $L_m(\theta)$ 可表示为

$$L_m(\theta) = \frac{2\pi}{K_m} = 2\pi Q_m^{-V/2} (\cos \theta - q_m \tan \theta \sin \theta)^{-1} \quad (m = 1, 2). \tag{60}$$

如图 4 显示, 当 θ 趋近 θ^C , 波长趋近 $4\sqrt{3}\pi/3$ 。当 θ 趋近零, 横波波长为 2π 而散波波长为零。图 4 表明横波长于散波, 该结论与无粘流体的情况一致^[3]。

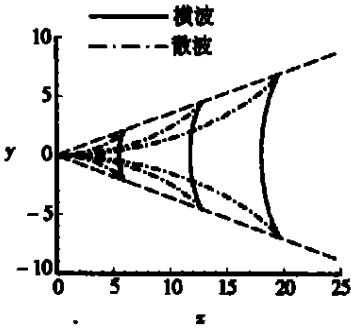


图 3 波型

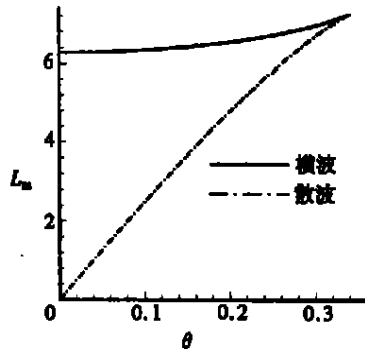


图 4 波长

可以发现, 波形的解析式存在三类衰减因子: 径向衰减因子 d^R , 粘性衰减因子 d_m^V , 潜深衰减因子 d_m^S 和 d_m^B 。波形随距离的增大呈代数衰减而随粘性和潜深增大呈指数衰减。如式(49)和(50)所示, η_1 和 η_2 的波幅和无量纲参数 ε 关联, 可认为它们是粘性尾迹对波形的贡献; 当粘性趋向零时, η_1 和 η_2 亦消失。式(50)则显示对于小的 ε , η_2 随深度增加迅速衰减。

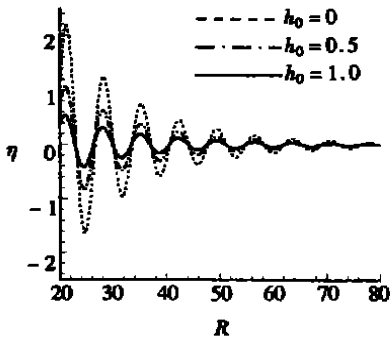


图5 当 $\varepsilon = 0.01$, $\theta = 0.33$ 和 $F = 4\pi$ 时潜深对波形的影响

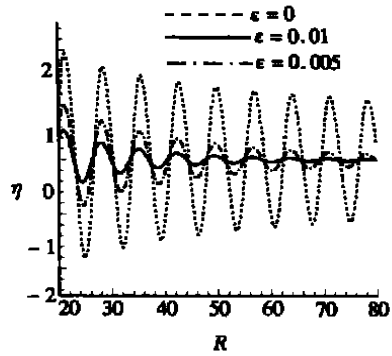


图6 当 $h_0 = 1$, $\theta = 0.33$ 和 $F = 4\pi$ 时粘性对波形的影响

当 $h_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$, 即物体在自由面边界层内运动时, η_0 的影响显著。图5和6分别显示了潜深和粘性对波形的影响。

5 结 论

本文给出具有无限深度的不可压粘性流体中运动物体产生的自由表面波形的精确积分解、渐近解和图象显示, 求得了波形的主导项和附加校正项。而附加项代表了粘性尾迹的影响, 当粘性趋于零时, 这些项也随之消失。这些附加项幅度较小, 且和主项存在相位差。结果显示, 波形的渐近解存在三类衰减因子: 径向衰减因子, 粘性衰减因子, 潜深衰减因子。

致谢 笔者对章梓雄(Allen T. Chwang) 教授有益的建议和讨论致以衷心的感谢。

[参 考 文 献]

- [1] Ursell F. On the Kelvin's ship wave pattern [J]. J Fluid Mech, 1960, 8: 418—431.
- [2] Crapper G D. Surface waves generated by a traveling pressure point [J]. Proc Roy Soc A, 1964, 282: 547—558.
- [3] Chung Y K, Lim J S. A review of the Kelvin ship wave pattern [J]. J Ship Research, 1991, 35(3): 191—197.
- [4] Reed A M, Milgram J H. Ship wakes and their radar images [J]. Annu Rev Fluid Mech, 2002, 34: 469—502.
- [5] Cumberbatch E. Effects of viscosity on ship waves [J]. J Fluid Mech, 1965, 23: 471—479.
- [6] Allen R F. The effects of interference and viscosity in the Kelvin ship wave problem [J]. J Fluid Mech, 1968, 34: 417—421.
- [7] Brard R. Viscosity, wake and ship waves [J]. J Ship Research, 1970, 14(4): 207—240.
- [8] Lugt H J. Local flow properties at a viscous free surface [J]. Phys Fluids, 1987, 30(12): 3647—3652.
- [9] Milgram J H. Theory of radar Backscatter from short waves generated by ships, with application to radar (SAR) imagery [J]. J Ship Research, 1988, 32(1): 54—69.
- [10] Lyden J D, Hammond R R, Lyzenga D R, et al. Synthetic aperture radar imaging of surface ship waves [J]. J Geophysical Research, 1988, 93(C10): 12293—12303.
- [11] Lurye J R. Interaction of free surface waves with viscous wakes [J]. Phys Fluids, 1968, 11(2): 261—265.

- [12] Lurye J R. Wave height and wave resistance in the presence of a viscous wake[J]. *Phys Fluids*, 1973, **16**(6): 750—760.
- [13] Chan A T, Chwang A T. Interaction of laminar far wake with a free surface[J]. *Phys Fluids*, 1996, **8**(2): 421—429.
- [14] 刘敏嘉, 陶明德. 在粘性流体中船行波的速度场[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(10): 1085—1091.
- [15] Lu D Q. Free surface waves and far wakes generated by a floating body in a viscous fluid[J]. *J Hydrodynamics, Ser B*, 2003, **15**(4): 10—16.
- [16] Chwang A T, Wu T Y. Hydromechanics of low Reynolds number flow—Part 2: Singularity method for Stokes flows[J]. *J Fluid Mech*, 1975, **67**: 787—815.
- [17] Duffy D G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations* [M]. Florida: CRC Press, 1994: 116—117.
- [18] Happel J, Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics* [M]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973: 79—85.
- [19] Lagerstrom P A. *Laminar Flow Theory* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1996, 74—75.
- [20] Lighthill M J. Studies on magneto hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions[J]. *Phil Trans Roy Soc Lond A*, 1960, **252**: 397—430.
- [21] Wen S L. An extension of Lighthill's result on asymptotic evaluation of multiple Fourier integrals [J]. *Intl J Eng Sci*, 1969, **7**: 53—59.

Interaction of Viscous Wakes With a Free Surface

LU Dong_qiang^{1,2}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China

2. Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: The interaction of laminar wakes with free surface waves generated by a moving body beneath the surface of an incompressible viscous fluid of infinite depth was investigated analytically. The analysis was based on the steady Oseen equations for disturbed flows. The kinematic and dynamic boundary conditions were linearized for the small amplitude free surface waves. The effect of the moving body was mathematically modeled as an Oseenlet. The disturbed flow was regarded as the sum of an unbounded singular Oseen flow which represents the effect of the viscous wake and a bounded regular Oseen flow which represents the influence of the free surface. The exact solution for the free surface waves was obtained by the method of integral transforms. The asymptotic representation with additive corrections for the free surface waves was derived by means of Lighthill's two stage scheme. The symmetric solution obtained shows that the amplitudes of the free surface waves are exponentially damped by the presences of viscosity and submergence depth.

Key words: free surface wave; viscous wake; viscosity; submergence depth; Oseenlet; Lighthill's two stage scheme; asymptotic solution