应用数学和力学，第11卷第10期（1990年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于Helmholtz外问题的边界积分方程解的唯一性问题*

王 清** 徐博侯

（浙江大学力学系，1989年2月1日收到）

摘 要

本文用能量分析的观点探讨了用边界积分方程描述 Helmholtz 外问题时，解的唯一性不能保持的原因．文中证明了，当利用积分方程来描述问题时，实际上将无穷远处的 Sommerfeld 条件改成了既适合于外向波（辐射波），又适合于内向波（吸收波），即整个系统的能量保持守恒．并根据此观点解释了保持唯一性的算法．

关键词 Helmholtz 外问题，边界积分方程，唯一性

一、引 言

在声波方程

$$\nabla^2 U=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad 在D中 \tag{1.1}$$

中，引入$U=u\exp[i\omega t]$，则u满足约化的波动方程或 Helmholz 方程

$$\nabla^2 u+k^2 u=0, \qquad 在D中 \tag{1.2}$$

这里，u可以是速度势函数、声压等物理量，$k=\omega/c$是波数．若D是封闭的有限曲面∂D围成的内域（记作D_-），则方程(1.2)连同在∂D上的边界条件，构成内问题；若D是以有限曲面∂D为内边界的无限大外域（记作D_+），则方程(1.2)连同在∂D上的边界条件和无穷远处的辐射（吸收）条件，构成外辐射（吸收）问题．外辐射和外吸收问题又统称为外问题．

辐射条件确保波动是向外的．如果用r表示到∂D上或D_-内一定点的距离，则辐射条件为

$$u=O(1/r), \tag{1.3}$$

$$当r\to\infty$$

$$\partial u/\partial r+iku=o(1/r), \tag{1.4}$$

而相应的吸收条件为

* 丁浩江推荐．

** 现在浙江大学土木工程学系工作．

$$u=O(1/r), \tag{1.5}$$

当$r\to\infty$

$$\partial u/\partial r-iku=o(1/r), \tag{1.6}$$

这些条件统称为 Sommerfeld 条件[1]。

对于内问题，若在边界 ∂D 上系统与外界没有能量交换，系统能量守恒，则存在着实的特征波数k_n ($n=1,2,\cdots$)，对应这些特征波数，u 有非零解，系统发生固有振动；而对外问题，即使在内边界 ∂D 上无能量交换，但由于在无穷远处有能量辐射（吸收），系统能量不守恒，对于任意实数k，u都有唯一解，即方程没有实的特征波数。

然而，当我们用边界积分方程来描述外问题时，解的唯一性不再得到保证，表现为对应于 Dirichlet 内问题的特征波数，Neumann 外问题没有唯一解；对应于 Neumann 内问题的特征波数，Dirichlet 外问题没有唯一解。

Helmholtz 外问题的边界积分方程的唯一性问题(以下简称唯一性问题) 曾被多次讨论过。Schenck[2]利用 Fredholm 积分方程理论证明了唯一性的失效，并联合使用内问题的积分方程与原积分方程来克服这个困难；Burton 和 Miller[3] 利用原积分方程与其求法向导数后积分方程的线性组合来保证其唯一性；在文[4]中，将格林函数展成无穷级数的形式，这个格林函数满足内域边界积分方程所导出的无穷多个方程（叫零场方程），所得到的外问题的边界积分方程有唯一解。Kleinman 和 Roach[5] 对唯一性问题从数学理论上进行了系统描述。近年来，有关唯一性问题的研究工作还在一直继续[6]~[11]。

然而，以往的工作中没有对失去唯一性的物理意义进行研究，有的[3],[6],[7]甚至认为根本没有物理意义。

本文用能量分析的观点探讨了用边界积分方程描述 Helmholtz 外问题时，解的唯一性不能保持的原因。文中证明了，当利用边界积分方程来描述外问题时，无穷远处的边界条件改成了既适合于外向波，又适合于内向波，导致整个系统能量守恒，并根据此观点解释了保证唯一性的算法。

二、问题的描述

对 Helmholtz 方程来说，存在以下六类问题：1°内 Neumann问题；2°内 Dirichlet 问题；3°外辐射 Neumann 问题；4°外吸收 Neumann 问题；5°外辐射 Dirichlet 问题；6°外吸收 Dirichlet 问题。

现在以4°与2°为例来讨论有关问题。

外吸收 Neumann 问题的控制方程和边界条件为：

$$\left.\begin{array}{ll}(\Delta+k^2)u_{a+}(P)=0, & P\in D_+\\ \dfrac{\partial u_{a+}}{\partial n_P}(P)=g_{a+}(P), & P\in\partial D\\ \lim\limits_{r_P\to\infty}\left\{r_P\left[\dfrac{\partial u_{a+}}{\partial r_P}(P)-iku_{a+}(P)\right]\right\}=0 & \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

而相应的内 Dirichlet 问题为

$$\left.\begin{array}{ll}(\Delta+k^2)u_-(P)=0 & P\in D_-\\ u_-(P)=f_-(P), & P\in\partial D\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

其中 $\Delta=\nabla^2$，$g_{a+}(P)$，$f_-(P)$为∂D上的已知函数。

可以证明[12]，对任意实波数k，由(2.1)式所描述的问题4°，以及由类似(2.1)所描述的问题3°，5°，6°都有唯一的解。

这些边值问题也可以用边界积分方程来描述。假定∂D是光滑的。

定义格林函数

$$G_k(P,Q)=\frac{1}{4\pi|P-Q|}\exp[-ik|P-Q|] \tag{2.3}$$

$$\bar{G}_k(P,Q)=\frac{1}{4\pi|P-Q|}\exp[ik|P-Q|] \tag{2.4}$$

显然，G_k和$\bar{G}_k$互为共轭复数，$|P-Q|$是P点和Q点之间的距离($\boldsymbol{R}^3$中)。

外吸收问题的积分方程为

$$\int_{\partial D}\left[\frac{\partial u_{a+}(q_0)}{\partial n_{q_0}}\bar{G}_k(P,q_0)-u_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k(P,q_0)}{\partial n_{q_0}}\right]dS_{q_0}=\begin{cases}u_{a+}(P), & P\in D_+\\ u_{a+}(P)/2 & P\in\partial D\\ 0, & P\in D_-\end{cases} \tag{2.5}$$

这里q_0是∂D上的一点，$\partial/\partial n_{q_0}$是对$q_0$点的单位外法线（朝$D_+$）上的导数。引入$\partial D$上的Neumann 条件，我们得到

$$\frac{1}{2}u_{a+}(p_0)+\int_{\partial D}u_{a+}(q_0)\frac{\partial\bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0)dS_{q_0}$$

$$=\int_{\partial D}g_{a+}(q_0)\bar{G}_k(p_0,\ q_0)dS_{q_0},\qquad p_0\in\partial D \tag{2.6}$$

其对应的齐次方程为

$$\frac{1}{2}u_{a+}(p_0)+\int_{\partial D}u_{a+}(q_0)\frac{\partial\bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,\ q_0)dS_{q_0}=0,\qquad p_0\in\partial D \tag{2.7}$$

内问题的积分方程为

$$\int_{\partial D}\left[\frac{\partial u_-(q_0)}{\partial n_{q_0}}G_k(P,\ q_0)-u_-(q_0)\frac{\partial G_k(P,q_0)}{\partial n_{q_0}}\right]dS_{q_0}=\begin{cases}0, & P\in D_+\\ -u_-(P)/2, & P\in\partial D\\ -u_-(P), & P\in D_-\end{cases} \tag{2.8}$$

显然，将(2.8)式中G_k换成$\bar{G}_k$，方程(2.8)仍然成立。

引入∂D上的 Dirichlet 条件，我们得到的是关于问题2°的第一类 Fredholm 方程。为了得到相应的第二类 Fredholm 方程，对(2.8)取法向导数$\partial/\partial p_0$，并引入边界条件，于是

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_-(p_0)}{\partial n_{p_0}}+\int_{\partial D}\frac{\partial u_-(q_0)}{\partial n_{q_0}}\frac{\partial G_k}{\partial n_{p_0}}(p_0,\ q_0)dS_{q_0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial n_{p_0}}\int_{\partial D}f_-(q_0)\frac{\partial G_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0)dS_{q_0},\qquad p_0\in\partial D \tag{2.9}$$

对应的齐次方程为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_-(p_0)}{\partial n_{p_0}}+\int_{\partial D}\frac{\partial u_-(q_0)}{\partial n_{q_0}}\frac{\partial G_k}{\partial n_{p_0}}(p_0,\ q_0)dS_{q_0}=0,\qquad p_0\in\partial D \tag{2.10}$$

已经知道，方程(2.10)有实的特征波数，同时还存在以下定理：

定理2.1 对应实的特征波数，方程(2.10)有实的特征函数u_{-k}.

证明 假定对应实特征波数k，方程(2.10)有复的特征函数u_{-k}.

将(2.10)中的G_k换成$\bar{G}_k$，方程仍然成立，即u_{-k}仍是修改后的方程的特征函数. 另一方面，将u_{-k}满足的方程(2.10)直接求复共轭，可以得到$\bar{u}_{-k}$是修改后方程的特征函数. 于是我们有$u_{-k}=\bar{u}_{-k}$，即u_{-k}是实的.（证毕）

为了证明定理2.2，需要用到下述的 Fredholm 定理:

Fredholm 定理 如果k是一个积分算子的特征值，则$\bar{k}$是这个算子的共轭算子的特征值.

定理2.2 方程(2.7)和(2.10)有相同的特征波数，并且方程(2.7)的特征函数也是实的.

证明 如果注意到$G_k(p_0,q_0)=G_k(q_0,p_0)$，则核

$$\frac{\partial G_k(p_0,q_0)}{\partial n_{q_0}}=\frac{\partial G_k(q_0,p_0)}{\partial n_{p_0}}$$

为核$\partial\bar{G}_k(p_0,q_0)/\partial n_{q_0}$的共轭核. 由 Fredholm 定理，方程(2.7)和方程(2.10)有相同的特征波数.

仿定理2.1的证明，由于(2.10)的特征波数和特征函数是实的，则由其共轭核定义的积分方程(2.7)的特征函数也是实的.（证毕）

类似的结果可以推广到其它的外问题和相应的内问题的关系上去. 总之，我们可以得到：用边界积分方程描述时，在 Neumann (Dirichlet) 齐次边界条件下，外吸收问题与外辐射问题具有相同的实特征波数和实特征函数.

三、物理意义的讨论

定理3.1 在相同的齐次边界条件下，用边界积分方程描述的外辐射和外吸收问题表示的是同一个问题.

这是上一节结果的自然推论. 由上节的定理易知，同一边界条件的外辐射和外吸收问题（即问题3°，4°或问题5°，6°）具有相同的特征波数和相同的特征函数，从而表示的是同一问题.

由于方程(2.7)的特征波数是实的，即其波动是不衰减的，所以，由该方程描述的系统的能量应当是守恒的. 这一点可以从数学上给以证明:

定理3.2 由方程(2.7)描述的系统内能量是守恒的.

证明 由定理3.1可知，(2.7)描述的既是外辐射，又是外吸收问题，从而u_+必须同时满足(1.4)和(1.6)式，由此可得

$$u=O(1/r) \tag{3.1}$$

当 $r\to\infty$

$$\partial u/\partial r=o(1/r) \tag{3.2}$$

另一方面，设V是速度势，即

$$V=\operatorname{Re}U=(u\exp[-i\omega t]+\bar{u}\exp[i\omega t])/2$$

则由内边界∂D和半径r很大的球面S_r所包含的体积Σ内的能量E可写成

$$E=\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma}\left(\frac{1}{c^2}V_t^2+|\nabla V|^2\right)d\Omega \tag{3.3}$$

这里$V_t=\partial V/\partial t$. 利用格林公式，方程(1.1)和$\partial D$的齐次边条件，可以得到

$$\frac{dE}{dt}=\iint_{S_r}V_t\frac{\partial V}{\partial r}dS \tag{3.4}$$

考虑到

$$V_t=\frac{1}{2}i\omega(\bar{u}\exp[i\omega t]-u\exp[-i\omega t])$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\exp[-i\omega t]+\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\exp[i\omega t]\right)$$

则

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{i\omega}{4}\iint_{S_r}\left(u\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}-\bar{u}\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{\partial u}{\partial r}\exp[-2i\omega t]-\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\exp[2i\omega t]\right)dS \tag{3.5}$$

由(3.1)、(3.2)可知，当$r\to\infty$时，$dE/dt\to 0$，即系统由无穷远处吸收的能量为零；加上内边界∂D对能量是封闭的，所以我们已经证明了整个系统内能量是守恒的. (证毕)

可以证明[13]，当u满足方程(1.2)和外辐射条件(1.3)，(1.4)时，由(3.5)式定义的$dE/dt\leqslant 0$；而将外辐射条件换成外吸收条件(1.5)，(1.6)时，$dE/dt\geqslant 0$. 因此，我们可以说，利用边界积分方程无形中加强了无穷远处的边界条件，使其既适合辐射波，又适合吸收波. 真正的辐射（吸收）应当$dE/dt<0(dE/dt>0)$，这样才能使得系统能量不守恒.

在定理3.2的证明中，我们利用方程(2.7)的特征值是实的这一事实，导出(3.1)和(3.2). 反过来，我们有

定理3.3 在条件(3.1)，(3.2)和齐次内边界(∂D上)条件下，方程 (1.2) 有实的特征值和特征函数.

证明

$$\begin{aligned}0&=\iiint_{D_+}(\nabla^2u+k^2u)\delta u d\Omega\\&=-\iint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}\delta u dS+\lim_{r\to\infty}\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial r}\delta u dS-\delta\iiint_{D_+}\frac{1}{2}[(\nabla u)^2-k^2u^2]d\Omega\\&=-\delta\iiint_{D_+}\frac{1}{2}[(\nabla u)^2-k^2u^2]d\Omega\end{aligned} \tag{3.6}$$

这里已经用到(3.1)，(3.2)及∂D上的条件，于是

$$k^2=\mathrm{St}\cdot\left[\iiint_{D_+}(\nabla u)^2d\Omega\Big/\iiint_{D_+}u^2d\Omega\right] \tag{3.7}$$

由于式(3.7)的分子分母都是对称正定的，从而其特征值和特征函数都是实的. (证毕)

四、对保证唯一性算法的说明

已经指出，用来保证唯一性的算法主要有三种：1°联合使用内域积分方程和原积分方

程；2°使用原积分方程与其求法向导数后积分方程的线性组合；3°利用内域方程导出外问题新的格林函数. 算法1°和3°实质上是相同的. 这里仅以外 Neumann 吸收问题为例来说明算法1°和2°.

1. 由(2.5)可知外 Neumann 吸收问题的边界积分方程为(2.6)式，而内域方程为

$$\int_{\partial D} u_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(P,q_0)\,dS_{q_0}=\int_{\partial D} g_{a+}(q_0)\bar{G}_k(P,q_0)dS_{q_0},\qquad P\in D_- \tag{4.1}$$

当k取对应(2.6)的特征波数时，方程(2.6)的解可写成

$$u_{a+}(p_0)=u^1_{a+}(p_0)+u^2_{a+}(p_0),\qquad p_0\in\partial D \tag{4.2}$$

这里，u^1_{a+}为相应的特征函数全体，无指向性；u^2_{a+}是原问题的真解（即外吸收解），有指向性. 解(4.2)还要满足(4.1)，即

$$\int_{\partial D} u^1_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(P,q_0)dS_{q_0}=0,\qquad P\in D_- \tag{4.3}$$

由此导得$u^1_{a+}=0$. 这样，方程(4.1)可以看作一种补充条件，通过它可以使(2.6)解的指向性得到恢复.

2. 在(2.5)的外域(D_+中)方程中对n_{p_0}求导，并令$p_0\to\partial D$，则得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_{a+}(p_0)}{\partial n_{p_0}}+\frac{\partial}{\partial n_{p_0}}\int_{\partial D} u_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0)dS_{q_0}$$

$$-\frac{\partial}{\partial n_{p_0}}\int_{\partial D}\frac{\partial u_{a+}(q_0)}{\partial n_{q_0}}\bar{G}_k(p_0,q_0)dS_{q_0}=0,\qquad p_0\in\partial D \tag{4.4}$$

将∂D上的条件代入(4.4)式，并在所得式两端乘以α，加到(2.6)式，其对应的齐次方程为

$$\frac{1}{2}u_{a+}(p_0)+\int_{\partial D} u_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0)dS_{q_0}$$

$$+\alpha\frac{\partial}{\partial n_{p_0}}\int_{\partial D} u_{a+}(q_0)\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0)dS_{q_0}=0 \tag{4.5}$$

文[3]中已经证明，当$\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0$时，方程(4.5)只有零解. 这一点也可以从物理上加以解释：

在方程(4.4)中令

$$\frac{\partial u_{a+}(p_0)}{\partial n_{p_0}}=\frac{1}{\alpha}u_{a+}(p_0),\qquad p_0\in\partial D \tag{4.6}$$

并考虑到

$$\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{p_0}}(p_0,q_0)=-\frac{\partial \bar{G}_k}{\partial n_{q_0}}(p_0,q_0),\qquad p_0,q_0\in\partial D \tag{4.7}$$

则方程(4.4)立即变成方程(4.5). 这说明式(4.5)是具有第三类齐次边界条件(4.6)的外问题的边界积分方程，由于$\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0$，从而$\partial D$上有能量吸入（或耗散），使总系统的能量不守恒. 这样对于任意实的k，方程(4.5)只有零解.

参 考 文 献

[1] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equation in Physics*, Academic Press (1949).

[2] Schenck, H. A., Improved integral formulation for acoustics radiation problems,

J. Acoust. Soc. Am., **44** (1968), 41—58.

[3] Burton, A. J. and G. F. Miller, The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **323** (1971), 201—210.

[4] Waterman, P. C., New formulation of acoustic scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, **45** (1969), 1417—1429.

[5] Kleinman, R. E. and G. F. Roach, Boundary integral equations for the three-dimensional Helmholtz equation, *SIAM Review*, **16** (1974), 214—236.

[6] Piaszczyk, C. M., Acoustic radiation from vibrating surface at characteristic frequencies, *J. Acoust. Soc. Am.*, **75** (1984), 363—375.

[7] Martin, P. A., On the null-field equations for the exterior problems of acoustics, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **33** (1980), 385—396.

[8] Brod, K., On the uniqueness of solution for all wave numbers in acoustic radiation, *J. Acoust. Soc. Am.*, **76** (1984), 1238—1243.

[9] Filippi, P. J. T., Integral equations in acoustics, *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques*, Ed. by P. Fillippi, Springer-Verlag (1983), 1—49.

[10] Meyer, W. L., et al., Boundary integral solution of three dimensional acoustic radiation problems, *J. Sound and Vib.*, **59**, 2 (1978), 242—262.

[11] Amini, S. and D. T. Wilton, An investigation of boundary element methods for the exterior acoustic problem, *Compu. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **54** (1986), 49—65.

[12] 斯米尔诺夫, В. И., 《高等数学教程》, 谷超豪、金福临译, 第4卷, 第2分册, 人民教育出版社 (1958).

[13] 柯朗、希尔伯脱, 《数学物理方法》, 能振翔、杨应辰译, Ⅰ卷, 科学出版社 (1981).

On the Uniqueness of Boundary Integral Equation for the Exterior Helmholtz Problem

Wang Qing   Xu Bo-hou

(Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

From the point of view of energy analysis, the cause that the uniqueness of the boundary integral equation induced from the exterior Helmholtz problem does not hold is investigated in this paper. It is proved that the Sommerfeld's condition at the infinity is changed so that it is suitable not only for the radiative wave but also for the absorptive wave when we use the boundary integral equation to describe the exterior Helmholtz problem. Therefore, the total energy of the system is conservative. The mathematical dealings to guarantee the uniqueness are discussed based upon this explanation.

Key words exterior Helmholtz problem, boundary integral equation, uniqueness