

反平面集中力作用下不同材料界面 共线裂纹问题

刘又文 蒋持平

(中南工业大学数学系) (中国科学院力学研究所)
(樊大钧推荐, 1989年4月12日收到)

摘 要

本文研究在反平面集中力作用下, 不同弹性材料界面上的共线裂纹问题。运用复变函数的解析延拓方法并结合对奇性主部的分析, 获得了一般解; 求出了几种典型情况的封闭解; 算出了应力强度因子。本文解答的若干特殊情形, 与前人成果吻合。通过比较, 我们发现, 在局部对称加载下, 本文结果与同种材料的相应解答^[1]完全相同。

关键词 反平面剪切, 固体-固体界面, 裂纹, 复变函数, 奇异解, 应力强度因子

一、引 言

我们在文[1]、[2]中研究了集中载荷作用下不同弹性材料之间界面裂纹的平面问题, 然而据我们所知, 相应的反平面问题, 至今尚无理论解答。随着复合材料科学研究的进展, 这个问题获得了重要的理论分析与工程实用意义。

本文讨论如下问题:

如图1所示, 设剪切弹性模量为 μ_1 的介质 I 占有上半平面 S^+ ; 剪切弹性模量为 μ_2 的介质 II 占有下半平面 S^- 。约定相应于这两种介质的量以下标1和2标记。沿实轴上区段 $L=L_1+L_2+\dots+L_n$, 两介质互相连接, 应力和位移保持连续:

$$\tau_{yz_1}^+(t) = \tau_{yz_2}^-(t) \quad t \in L \quad (1.1)$$

$$w_1^+(t) = w_2^-(t) \quad t \in L \quad (1.2)$$

沿其余部分 $L'=L'_1+L'_2+\dots+L'_n$, 互相裂开, 且无面力作用:

$$\tau_{yz_1}^+(t) = \tau_{yz_2}^-(t) = 0 \quad t \in L' \quad (1.3)$$

对于 n 条有限长裂纹, 裂纹端点依次是 $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$ 。 w 表示反平面位移; τ_{xz}, τ_{yz} 分别表示直角坐标系中反平面剪应力。设反平面集中力 P 作用在 S^+ (或 S^-) 内任意点 z_0 处。

二、基本公式推导

反平面剪切的弹性平衡方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

其通解可由一个定义在所论域内的解析函数 $f(z)$ 表示:

$$w = \operatorname{Re} f(z) \quad (2.2)$$

式中“Re”表示取实部。应力分量能够表示为

$$\tau_{xx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3)$$

将(2.2)代入(2.3)式可得

$$\tau_{xx} - i\tau_{yy} = \mu f'(z) \quad (2.4)$$

式中“'”表示对 z 求导数。

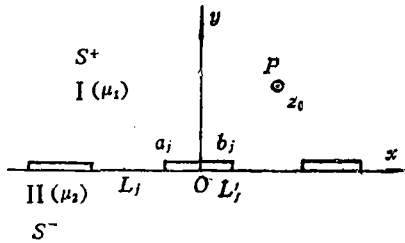


图 1

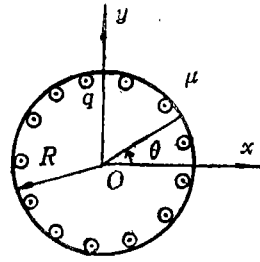


图 2

这样,反平面的弹性平衡问题,可归结为在给定条件下,求解析函数 $f'(z)$ 。

为了事先确定本问题中应力函数 $f'(z)$ 的奇性主部,先研究如下问题:

如图 2 所示,在剪切弹性模量为 μ 的无限弹性平面中,开有一个半径为 R 的圆孔,孔周边界承受均匀分布的反平面载荷 q ;且设无穷远处应力为零。设 τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$ 分别表示极坐标中法线沿 r 和 θ 方向的面上的反平面剪应力,则有

$$\tau_{rr}(t) = -q \quad t \in |z| = R \quad (2.5)$$

由对称性可知

$$\tau_{\theta\theta}(t) = 0 \quad t \in |z| = R \quad (2.6)$$

经坐标变换,(2.4)式成为

$$\tau_{rr} - i\tau_{\theta\theta} = \mu \exp[i\theta] f'(z) \quad (2.7)$$

将(2.5), (2.6)代入(2.7)式,得

$$\mu \frac{t}{R} f'(t) = -q \quad t \in |z| = R \quad (2.8)$$

即

$$f'(t) = -Rq/\mu t \quad t \in |z| = R \quad (2.9)$$

由 Dirichlet 公式, 并注意到无穷远处应力为零,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{-Rq/\mu t}{t-z} dt = \frac{-Rq}{\mu} \frac{1}{z} \quad (2.10)$$

令 $R \rightarrow 0$, 且保持 $2\pi Rq = P$, 由 (2.10) 式我们便得到无限弹性平面在坐标原点处作用一反平面集中力的解答

$$f'(z) = \frac{-P}{2\pi\mu} \frac{1}{z} \quad (2.11)$$

三、一般问题的处理

如图1, 在 S^+ 内, 可设

$$w_1 = \operatorname{Re} f_1(z) \quad z \in S^+ \quad (3.1)$$

由 (2.11) 式有

$$f'_1(z) = \frac{M_1}{z-z_0} + f_{10}(z) \quad z \in S^+ \quad (3.2)$$

式中, $M_1 = -P/2\pi\mu_1$, $f_{10}(z)$ 在 S^+ 内全纯.

由 (2.4) 式有

$$\tau_{xz_1} - i\tau_{yz_1} = \mu_1 f'_1(z) \quad z \in S^+ \quad (3.3)$$

将 (3.3) 代入 (1.3) 式得

$$\operatorname{Im} f'_1(t) = 0 \quad t \in L' \quad (3.4)$$

由 Schwarz 对称原理^[4], 将 $f'_1(z)$ 越过 L' 开拓到下半平面 S^-

$$f'_1(z) = \bar{f}'_1(z) \quad z \in S^- \quad (3.5)$$

将 (3.2) 代入 (3.5), 并考虑到 (3.2) 式, 我们得到

$$f'_1(z) = M_1 G(z) + f_{10}(z) \quad (3.6)$$

式中, $f_{10}(z)$ 在沿 L 割开的全平面全纯, 且

$$G(z) = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-\bar{z}_0} \quad (3.7)$$

在 S^- 内, 设

$$w_2 = \operatorname{Re} f_2(z) \quad (3.8)$$

同理, 将 $f'_2(z)$ 从 S^- 延拓到 S^+

$$f'_2(z) = \bar{f}'_2(z) \quad z \in S^+ \quad (3.9)$$

可知 $f'_2(z)$ 在沿 L 割开的全平面全纯.

考虑到 (1.1) 和 (1.3) 式, 有

$$\tau_{yz_1}^+(t) = \tau_{yz_1}^-(t) \quad t \in \text{全实轴} \quad (3.10)$$

即

$$\operatorname{Im} \mu_1 f_1^+(t) = \operatorname{Im} \mu_2 f_2^-(t) \quad t \in \text{全实轴} \quad (3.11)$$

注意到实轴上, $\bar{t} = t$, $f_1^+(\bar{t}) = f_1^-(t)$, $f_2^-(\bar{t}) = f_2^+(t)$, (3.11) 式成为

$$[\mu_1 f_1^+(t) + \mu_2 f_2^-(t)]^+ = [\mu_1 f_1^-(t) + \mu_2 f_2^+(t)]^- \quad t \in \text{全实轴} \quad (3.12)$$

根据推广的Liouville定理,并考虑到(3.6)及(3.9)式有

$$\mu_1 f_1'(z) + \mu_2 f_2'(z) = \frac{-P}{2\pi} G(z) + D_0 \quad z \in \text{全平面} \quad (3.13)$$

式中 D_0 为招定常数.

下面考虑位移连续条件,将(3.1)和(3.8)式代入(1.2)式,有

$$[\text{Ref}_1(t)]^+ = [\text{Ref}_2(t)]^- \quad t \in L \quad (3.14)$$

两边对 x 求导数后,得

$$[f_1'(t) + \overline{f_1'(t)}]^+ = [f_2'(t) + \overline{f_2'(t)}]^- \quad t \in L \quad (3.15)$$

$$\therefore f_1^{'+}(t) + f_1^{-}(t) = f_2^{-}(t) + f_2^{'+}(t) \quad t \in L \quad (3.16)$$

将(3.13)代入(3.16)式,并经整理得

$$f_2^{'+}(t) + f_2^{-}(t) = N_1 G(t) + D^* \quad t \in L \quad (3.17)$$

$$\text{式中} \quad N_1 = \frac{P}{\pi(\mu_1 + \mu_2)}, \quad D^* = \frac{2D_0}{\mu_1 + \mu_2}$$

由文[5],(3.17)式的积分形式解为

$$f_2'(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{N_1 G(t) + D^*}{X_0^+(t)(t-z)} dt + X_0(z) \cdot P_n(z) \quad (3.18)$$

其中

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{-\frac{1}{2}} (z-b_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

$X_0(z)$ 是沿 L 割开的 z 平面上的一单值分支,满足

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [X_0(z) \cdot z^n] = 1 \quad z \in S^+ \quad (3.20)$$

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_n \quad (3.21)$$

计算出(3.18)式中的柯西型积分后,我们得到

$$f_2'(z) = X_0(z) \left\{ P_n(z) - \frac{1}{2} [G_{z_0}(z) + G_{\bar{z}_0}(z) + G_\infty(z)] \right\} + \frac{N_1}{2} G(z) + \frac{D^*}{2} \quad (3.22)$$

式中, $G_{z_0}(z)$, $G_{\bar{z}_0}(z)$, $G_\infty(z)$ 分别为(3.18)式中被积函数 $(N_1 G(z) + D^*)/X_0(z)$ 在 $z=z_0$, \bar{z}_0 和 ∞ 处的奇性主部,不难由罗朗级数展开式获得.

在 $f_2'(z)$ 的表达式(3.22)中,还剩 C_0 , C_1 , C_2 , \dots , C_n 及 D^* 共 $n+2$ 个常数需要确定.这就需要 $n+2$ 个包含这些常数的代数方程,由无穷远处的受力条件,可确定两个常数;其余 n 个方程由位移单值条件导出,因为前面仅利用了连接线 L 两边(S^+ 与 S^-)位移的导数相等,为了保证 L 上两边位移相等,还需补充在 n 个裂纹端点 b_j 位移相等的条件,由各裂纹端点两边的位移相等,有

$$[w_1(b_j) - w_1(a_j)]^+ = [w_2(b_j) - w_2(a_j)]^- \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.23)$$

即

$$\operatorname{Re} \int_{a_j}^{b_j} f_1^+(t) dt = \operatorname{Re} \int_{a_j}^{b_j} f_1^-(t) dt \quad t \in L' \quad (3.24)$$

注意到在 L' 上, $f_1^+(z)$, $f_1^-(z)$ 的虚部为零. 再考虑到(3.13)式, 得

$$\int_{L_j} \left[(\mu_1 + \mu_2) f_1^+(t) + \frac{P}{2\pi} G(t) - D_0 \right] dt = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.25)$$

四、几个典型精确解

假设无穷远处应力为零, 即有

$$f_1^+(\infty) = f_1^-(\infty) = 0 \quad (4.1)$$

将(4.1)代入(3.13)式, 便知

$$D_0 = 0, D^* = 0 \quad (4.2)$$

由(3.18)及(4.1)式, 有

$$C_0 = 0 \quad (4.3)$$

例1 一条有限长界面裂纹

如图3所示, 设界面上有一条从 a 到 b 的裂纹, 在 S^+ 内任意点 z_0 处作用反平面集中剪力 P . 不失一般性, 建立图示坐标系, 使 $a = -l$, $b = l$. 我们从通解(3.22)式出发, 此时, $n=1$

$$P_n(z) = C_1 \quad (4.4)$$

$$X_0(z) = 1/\sqrt{z^2 - l^2} \quad (4.5)$$

$$G_{z_0}(z) = N_1 \sqrt{z_0^2 - l^2} / (z - z_0) \quad (4.6)$$

$$G_{\bar{z}_0}(z) = N_1 \sqrt{\bar{z}_0^2 - l^2} / (z - \bar{z}_0) \quad (4.7)$$

$$G_\infty(z) = 2N_1 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \therefore f_1^+(z) = & \frac{1}{\sqrt{z^2 - l^2}} \left\{ C_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{N_1 \sqrt{z_0^2 - l^2}}{z - z_0} + \frac{N_1 \sqrt{\bar{z}_0^2 - l^2}}{z - \bar{z}_0} + 2N_1 \right] \right\} \\ & + \frac{N_1}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

下面确定常数 C_1 , 由(3.25)式, 并注意到(4.2)式有

$$\int_{-l}^l \left[(\mu_1 + \mu_2) f_1^+(t) + \frac{P}{2\pi} G(t) \right] dt = 0 \quad (4.10)$$

为了从(4.10)式计算出常数 C_1 , 考察如图4围道积分

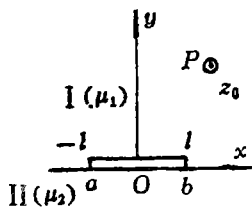


图 3

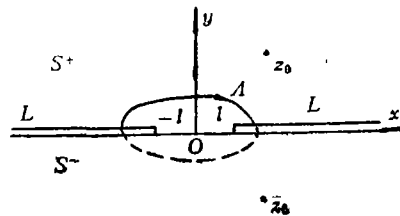


图 4

$$\oint_{\Delta} \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_1(z) + \frac{P}{2\pi} G(z) \right] dz$$

围道 Δ 在通过割线 L 后在下半平面 S^- 进入了 $X_0(z)$ 的另一支 $X_0^*(z)$ 。令 Δ 收缩于 ab ，不难得出

$$\oint_{\Delta} \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_1(z) + \frac{P}{2\pi} G(z) \right] dz = 0 \quad z_0, \bar{z}_0 \text{ 在 } \Delta \text{ 外} \quad (4.11)$$

由留数定理，注意到 $X_0^*(z_0)/X_0(z_0) = -1$ ，有

$$2\pi i \left[(\mu_1 + \mu_2) \left(-\frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{2} N_1 - C_1 + N_1 + \frac{N_1}{2} + \frac{N_1}{2} \right) + \frac{P}{2\pi} \times 2 \right] = 0$$

$$\therefore C_1 = N_1 \quad (4.12)$$

故

$$f'_1(z) = \frac{-N_1}{2\sqrt{z^2 - l^2}} \left[\frac{\sqrt{z_0^2 - l^2}}{z - z_0} + \frac{\sqrt{\bar{z}_0^2 - l^2}}{z - \bar{z}_0} \right] + \frac{N_1}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \quad (4.13)$$

由(3.13)式，并考虑到 $D_0 = 0$ ，有

$$f'_1(z) = -\frac{\mu_2}{\mu_1} f'_2(z) + M_1 G(z) \quad (4.14)$$

例 2 两条有限长界面裂纹

如图5所示，设界面上有两条等长的裂纹，裂纹端点顺次为 $-b$ ， $-a$ ， a ， b ，在 S^+ 内任意位置 z_0 处作用反平面集中剪力 P 。我们仍从通解(3.22)式出发，此时 $n=2$

$$P_n(z) = C_1 z + C_2 \quad (4.15)$$

$$X_0(z) = (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} (z^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

$$G_{z_0}(z) = N_1 \sqrt{(z_0^2 - a^2)(z_0^2 - b^2)} / (z - z_0) \quad (4.17)$$

$$G_{\bar{z}_0}(z) = N_1 \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - b^2)} / (z - \bar{z}_0) \quad (4.18)$$

$$G_{\infty}(z) = 2N_1 z \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \therefore f'_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \left[(C_1 - N_1)z + C_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_1 \sqrt{(z_0^2 - a^2)(z_0^2 - b^2)}}{2} \frac{1}{z - z_0} - \frac{N_1 \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - b^2)}}{2} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right] \\ &\quad + \frac{N_1}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

由(3.25)式，并注意 $D_0 = 0$ ，得确定常数 C_1 和 C_2 的两个方程

$$\int_{-b}^{-a} \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_1(t) + \frac{P}{2\pi} G(t) \right] dt = 0 \quad (4.21)$$

$$\int_a^b \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_1(t) + \frac{P}{2\pi} G(t) \right] dt = 0 \quad (4.22)$$

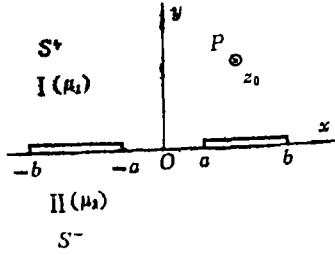


图 5

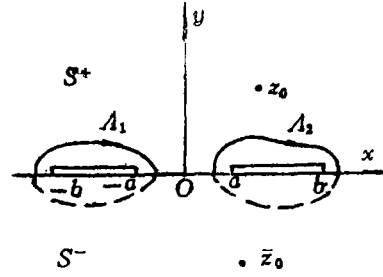


图 6

考察图 6 所示的围道积分

$$\oint_{A_1+A_2} \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_i(z) + \frac{P}{2\pi} G(z) \right] dz$$

仿例 1 可得

$$\oint_{A_1+A_2} \left[(\mu_1 + \mu_2) f'_i(z) + \frac{P}{2\pi} G(z) \right] dz = 0 \quad (4.23)$$

由留数定理计算(4.23)式, 可得

$$C_1 = N_1 \quad (4.24)$$

常数 C_2 只能由(4.21)或(4.22)式单独算出, 将(4.20)与(4.24)代入(4.22)式, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{C_2}{a\sqrt{(t^2-a^2)}(t^2-b^2)} dt - \frac{N_1}{2} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(z_0^2-a^2)}(z_0^2-b^2)}{(t-z_0)\sqrt{(t^2-a^2)}(t^2-b^2)} dt \right. \\ \left. + \int_a^b \frac{\sqrt{(z_0^2-a^2)}(z_0^2-b^2)}{a(t-z_0)\sqrt{(t^2-a^2)}(t^2-b^2)} dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

由文[8]计算出(4.25)式中的椭圆积分后, 得

$$C_2 = \frac{-N_1 b}{2E(k)} \left[\frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h, k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h', k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \pi \right] \quad (4.26)$$

式中, $X(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$, $E(k)$ 是第二类完全椭圆积分, $\Pi(\varphi, h, k)$ 是第三类椭圆积分, 且

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad h = \frac{b^2 - a^2}{b^2 - z_0^2}, \quad k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad h' = \frac{b^2 - a^2}{b^2 - z_0^2} \quad (4.27)$$

例 3 两条半无限长界面裂纹

如图 7 所示, 设界面上有两条半无限长裂纹, $-a, a$ 为裂纹端点, 集中剪力 P 作用在上半平面 S^+ 任意点 z_0 处。

这里, 我们试图从例 2 的结果取极限得出这个解答。在(4.20)式中, 令 $b \rightarrow \infty$, 并注意(4.24)式, 有

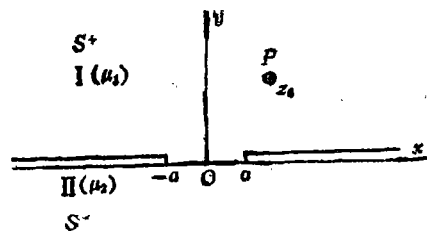


图 7

$$f_1(z) = \frac{-N_1}{2\sqrt{z^2-a^2}} \left[\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z-z_0} + \frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z-\bar{z}_0} \right] + \frac{N_1}{2} G(z) \quad (4.28)$$

值得指出,我们在例3中取极限所得的结果,仍然保持了在无穷远处 $w_1^+(t) = w_1^-(t)$ 的条件,因此(4.28)式只是描述了在无穷远处上下两个半平面仍相连接,或者说,实际是两条有限长裂纹,因为裂纹很长,把它作为两条半无限长裂纹处理的情形.关于含两条半无限长界面裂纹的更一般情形及处理方法,我们将在另外的文章中详细讨论.

五、应力强度因子

我们采用文[6]的定义,计算双相材料界面裂纹Ⅲ型应力强度因子.

$$K_3 = \sqrt{2\pi} \left| \lim_{z \rightarrow l} \sqrt{z-l} \mu_2 f_1'(z) \right| \quad (5.1)$$

1. 一条界面裂纹,任意位置受集中剪力

如图3情形,将(4.13)代入(5.1)式,得

$$K_3 = \frac{\mu_2 P}{2(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{\pi l}} \left[\frac{\sqrt{z_0^2 - l^2}}{l - z_0} + \frac{\sqrt{z_0^2 - l^2}}{l - \bar{z}_0} \right] \quad (5.2)$$

2. 一条界面裂纹,裂纹面上受集中剪力

图3中,当 $z_0 \rightarrow t$, t 为上半平面裂纹面上任意点时,我们得图8情形,由(5.2)式得

$$K_3 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} \quad (5.3)$$

令 $t \rightarrow 0$, 便得图9情形,由(5.3)式得这种情况下的Ⅲ型应力强度因子:

$$K_3 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \quad (5.4)$$

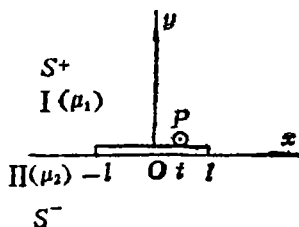


图 8

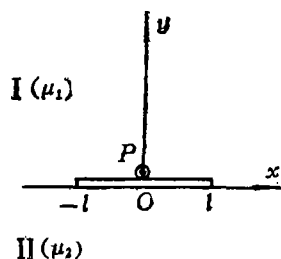


图 9

3. 一条界面裂纹,裂纹面上受一对剪力

利用(5.3)式和叠加原理,便得图10情形

$$K_3 = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} \quad (5.5)$$

我们发现,此结果与同种材料的情形^[7]一致.

4. 一条界面裂纹,裂纹面上受均布剪力

如图11所示, 在上半平面裂纹面上, 任意区段 (a, b) 受均布剪力 p . 由(5.3)式积分得

$$K_3 = \frac{\mu_2 p}{\mu_1 + \mu_2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + 2 \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{l-a}{2l}} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{l-b}{2l}} \right) \right] \quad (5.6)$$

当 $a=-l, b=l$, 剪力布满裂纹面时,

$$K_3 = \frac{\mu_2 p}{\mu_1 + \mu_2} \sqrt{\pi l} \quad (5.7)$$

5. 两条界面裂纹, 任意位置 z_0 受集中剪力 P

如图5情形, 将(4.20)代入(5.1)式, 并考虑到(4.24)、(4.26)两式, 在裂纹尖端 $x=a$ 处

$$K_3 = \frac{\mu_2 P}{2(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{\pi a(a^2 - b^2)}} \left\{ \frac{b}{E(k)} \left[\frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h, k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h', k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \pi \right] + \frac{X(z_0)}{a - z_0} + \frac{X(z_0)}{a - z_0} \right\} \quad x=a \quad (5.8)$$

在裂纹尖端 $x=b$ 处

$$K_3 = \frac{\mu_2 P}{2(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{\pi b(b^2 - a^2)}} \left\{ \frac{b}{E(k)} \left[\frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h, k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \frac{z_0 X(z_0) \Pi(\varphi, h', k)}{b(z_0^2 - b^2)} + \pi \right] + \frac{X(z_0)}{b - z_0} + \frac{X(z_0)}{b - z_0} \right\} \quad x=b \quad (5.9)$$

6. 两条界面裂纹, 裂纹面上受集中剪力

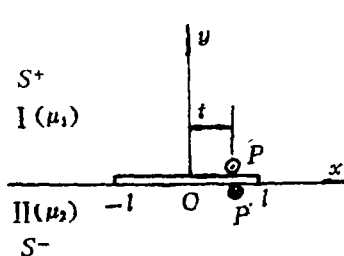


图 10

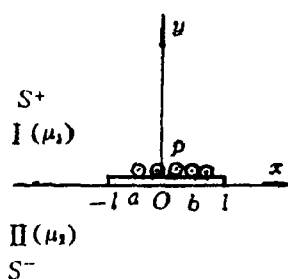


图 11

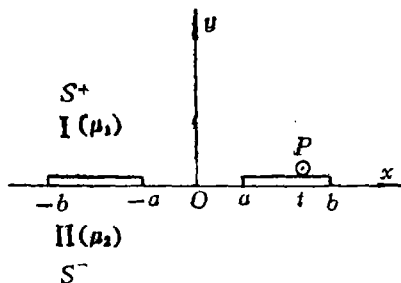


图 12

如图12, 设界面上有两条等长裂纹, 集中剪力 P 作用在上半平面裂纹面 $x=t$ 处, 注意到在裂纹面上, $z_0 = z_0 = t$

$$X(z_0) = X(z_0) = X(t)$$

在裂纹尖端 $x=a$ 处, 由(5.8)式, 令 $z_0 \rightarrow t$, 得

$$K_3 = \frac{\mu_2 P}{(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{\pi a(a^2 - b^2)}} \left\{ \frac{b X(t)}{E(k)} \left[\frac{t \Pi(\varphi, h, k)}{b(t^2 - b^2)} + \frac{\pi}{2 X(t)} \right] + \frac{X(t)}{a - t} \right\} \quad x=a \quad (5.10)$$

式中, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{b^2 - a^2}{b^2 - t^2}$, $k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$

在裂纹尖端 $x=b$ 处, 由(5.9)式, 令 $z_0 \rightarrow t$, 得

$$K_s = \frac{\mu_2 P}{(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{\pi b(b^2 - a^2)}} \left\{ \begin{aligned} & bX(t) \left[\frac{t\Pi(\varphi, h, h)}{E(h)} \left[\frac{t}{b(t^2 - b^2)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\pi}{2X(t)} \right] + \frac{X(t)}{b-t} \right] \right\} \quad x=b \quad (5.11) \end{aligned} \right.$$

参 考 文 献

- [1] 刘又文、蒋持平, 在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面的裂纹问题, 应用数学和力学, 8, 3 (1987), 267—270.
- [2] 蒋持平、刘又文, 关于集中载荷作用下不同材料界面的共线裂纹问题, 应用数学和力学, 9, 2 (1988), 155—164.
- [3] Liu You-wen and Jiang Chi-ping, Some closed-form solution for anti-plane cracks propagating in the bi-material interface, *J. Cent.-South Inst. Min. Metal*, 19, 4 (1988), 459.
- [4] 樊大钧, 《数学弹性力学》, 新时代出版社 (1983), 373.
- [5] Мухомелишвили Н. Н., 《数学弹性力学的几个基本问题》, 科学出版社 (1965).
- [6] Sih, G. C., P. C. Paris and F. Erdogan, Crack-tip stress-intensity factors for plane extension and plane bending problem, *J. Appl. Mech.*, 29 (1962), 306.
- [7] 中国航空研究院, 《应力强度因子手册》, 科学出版社 (1981), 194.
- [8] Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (1980), 246, 251.

Problems of Collinear Cracks between Bonded Dissimilar Materials under Antiplane Concentrated Forces

Liu You-wen

(Department of Applied Mathematics and Mechanics, Central South University of Technology, Changsha)

Jiang Chi-ping

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)

Abstract

In this paper problems of collinear cracks between bonded dissimilar materials under antiplane concentrated forces are dealt with. General solutions of the problems are formulated by applying extended Schwarz principle integrated with the analysis of the singularity of complex stress functions. Closed-form solutions of several typical problems are obtained and the stress intensity factors are given. These solutions include a series of original results and some results of previous researches. It is found that under symmetrical loads the solutions for the dissimilar materials are the same as those for the homogeneous materials^[7].

Key words anti-plane shear, solid-solid interface, crack, complex functions, singular solution, stress intensity factor