

# 无限域拉普拉斯方程问题的高阶边界条件及其应用

黄河宁 王发君

(国家海洋局海洋环境保护研究所, 1989年3月17日收到)

## 摘 要

对无限域 Laplace 方程问题, 推导出了高阶边界条件. 在采用数值方法的有限域的外边界上应用高阶边界条件, 可以在保证计算精度的前提下缩小数值求解域, 从而减小计算工作量和少占用计算机内存. 数值算例表明, 一阶边界条件近似于精确边界条件, 它明显地优于经典边界条件和二阶边界条件.

**关键词** 拉普拉斯方程 势函数 边界条件 保角变换

## 一、引 言

理想流体绕流问题, 静电场问题以及稳定温度分布问题都归结为求解 Laplace 方程的问题:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (1.1)$$

式中  $\phi$  为势函数,  $\Omega$  为求解域.

当所考虑的求解域  $\Omega$  为无限域, 且  $\phi$  为衰减函数时, 在无穷远处,  $\phi$  应满足:

$$\phi = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{当 } r \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

式中  $r$  为径向坐标. 当然, 在物体边界上,  $\phi$  还应满足第一类或者第二类边界条件.

当采用数值方法 (比如有限元法) 在无限域求解上述定解问题时, 传统的作法是在围绕物体的有限域的外边界 (例如二维问题时半径为  $R$  的圆周) 上令  $\phi=0$  (以下称其为经典边界条件), 使无限域问题转化为有限域问题. 根据式(1.2), 显然, 在半径为  $R$  的有限域外边界上施加经典边界条件的误差为:

$$\phi|_{r=R} = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (1.3)$$

由于经典边界条件精度很低, 只能依靠增大有限域外边界半径来满足计算精度要求. 这样势必增大有限域面积, 从而增加计算工作量.

Bayliss 等人<sup>[1]</sup>研究了无限域中 Laplace 方程和 Helmholtz 方程问题的高阶边界条件.

• 钱伟长推荐.

对于三维 Helmholtz 方程, 他们给出高阶边界条件为:

$$B_m \phi = \prod_{j=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{2j-1}{r} \right) \phi \quad (1.4)$$

式中  $B_m$  为第  $m$  阶边界条件微分算子,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k$  为波数.

对于三维 Laplace 方程, Bayliss 等人<sup>[1]</sup>简单地令式 (1.4) 中的  $k=0$  得到高阶边界条件:

$$B_m \phi = \prod_{j=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2j-1}{r} \right) \phi \quad (1.5)$$

然而经过作者检验, 式 (1.5) 仅对  $m=1$  是正确的, 对于  $m>1$  是不正确的. 其原因可能是由于 Laplace 方程问题的一般解并不能够通过令  $k=0$  由 Helmholtz 方程问题的一般解来得到. 而高阶边界条件却是利用一般解来得到的.

本文直接从高阶边界条件的物理意义出发, 利用无限域 Laplace 方程问题的一般解, 推导出了正确的高阶边界条件. 并通过数值算例, 考察了一阶和二阶边界条件, 以及经典边界条件对计算精度的影响.

## 二、高阶边界条件的推导

### (一) 二维问题

对于二维无限域中的衰减问题, 二维 Laplace 方程的一般解为<sup>[2]</sup>,

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (2.1)$$

式中  $\alpha_n, \beta_n$  为待定系数. 式 (2.1) 可以改写为:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} f_n(\theta) \quad (2.2)$$

第  $m$  阶边界条件的物理意义为: 对于  $r \geq R$  的区域, 在式 (2.2) 中保留前  $m$  项, 即:

$$\phi = \frac{1}{r} f_1 + \frac{1}{r^2} f_2 + \dots + \frac{1}{r^m} f_m + O\left(\frac{1}{R^{m+1}}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.3)$$

为了得到第  $m$  阶的边界条件, 分别写出关于  $\phi$  的各阶导数的表达式:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f_1 - 2\frac{1}{r^3} f_2 - \dots - \frac{m}{r^{m+1}} f_m + O\left(\frac{1}{R^{m+2}}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1 \cdot 2}{r^3} f_1 + \frac{2 \cdot 3}{r^4} f_2 + \dots + \frac{m(m+1)}{r^{m+2}} f_m + O\left(\frac{1}{R^{m+3}}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.5)$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} = & (-1)^n \frac{n!}{r^{n+1}} f_1 + (-1)^n \frac{(n+1)!}{r^{n+2}} f_2 + \dots \\ & + (-1)^n \frac{(n+m-1)!}{(m-1)! r^{n+m}} f_m + O\left(\frac{1}{R^{n+m+1}}\right) \quad (r \geq R) \end{aligned} \quad (2.6)$$

可以将式 (2.3), (2.5) 和 (2.6) 写成矩阵形式:

$$[K]\{f_n\} = \{P_n\} + \{e\} \quad (2.7)$$

式中:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^3} & \dots \\ \frac{2}{r^3} & \frac{6}{r^4} & \frac{12}{r^5} & \dots \\ \frac{-6}{r^4} & \frac{-24}{r^5} & \frac{-60}{r^6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} & \frac{(-1)^n (n+1)!}{r^{n+2}} & \frac{(-1)^n (n+2)!}{2! r^{n+3}} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{c} \frac{1}{r^m} \\ \frac{(m+1)!}{(m-1)!} \frac{1}{r^{m+2}} \\ \frac{-(m+2)!}{(m-1)!} \frac{1}{r^{m+3}} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^n (m+n-1)!}{(m-1)!} \frac{1}{r^{m+n}} \end{array} \right\}$$

$$\{f_n\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}, \quad \{P_n\} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \\ \vdots \\ \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} \end{Bmatrix}, \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} O\left(\frac{1}{R^{m+1}}\right) \\ O\left(\frac{1}{R^{m+3}}\right) \\ O\left(\frac{1}{R^{m+4}}\right) \\ \vdots \\ O\left(\frac{1}{R^{m+n+1}}\right) \end{Bmatrix}$$

令  $n=m$ , 由式 (2.7) 可以解出  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , 代入式 (2.4) 即得到第  $m$  阶边界条件. 在  $r=R$  的边界上应用第  $m$  阶边界条件的误差为  $O\left(\frac{1}{R^{m+2}}\right)$ .

分别令  $m=1$  和  $m=2$ , 得到一阶和二阶边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi = O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad (r \geq R) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \phi + \frac{1}{4} r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = O\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (r \geq R) \tag{2.9}$$

为了消去式 (2.9) 中的  $\partial^2 \phi / \partial r^2$  项, 利用方程 (1.1) 的极坐标形式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{2.10}$$

将式 (2.10) 代入式 (2.9), 整理后得到二阶边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{1}{r} \phi - \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = O\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.11)$$

## (二) 三维问题

在球坐标系下, 三维 Laplace 方程为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.12)$$

对于无限域中的衰减问题, 式 (2.12) 的一般解为<sup>[1]</sup>:

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(\theta, \varphi)}{r^{j+1}} \quad (2.13)$$

式中  $F_j(\theta, \varphi)$  为  $\theta$  和  $\varphi$  的函数。

对于  $r \geq R$  的区域, 保留式 (2.13) 中关于  $r$  的前  $m$  项, 有:

$$\phi = \frac{1}{r} F_0 + \frac{1}{r^2} F_1 + \dots + \frac{1}{r^m} F_{m-1} + O\left(\frac{1}{R^{m+1}}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.14)$$

显然, 式 (2.14) 与式 (2.3) 关于  $r$  形式是相同的, 因此式 (2.4) ~ (2.9) 对于三维问题也是成立的。三维问题的一阶边界条件与二维问题的相同 (式 (2.8))。二阶边界条件可以利用式 (2.12) 将式 (2.9) 改写为,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right] = O\left(\frac{1}{R^4}\right) \quad (r \geq R) \quad (2.15)$$

## 三、数值算例

考虑理想流体绕柱体流动问题, 设无穷远处来流流速为  $U$ , 则绕流问题可以转化为如下的定解问题:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad (\text{柱体边界}) \quad (3.2)$$

$$\phi = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.3)$$

式中  $\phi$  = 散射势,  $\phi_I = Ux$  = 入射势, 总速度势  $\phi_T$  为入射势与散射势的线性叠加:

$$\phi_T = \phi_I + \phi \quad (3.4)$$

我们采用有限元方法计算了圆柱和椭圆柱绕流问题。通过选择不同的有限域外边界半径, 应用不同的边界条件, 将有限元解与精确解相比较, 以便考察有限域外边界半径和边界条件对计算精度的影响。

有限域内采用 8 节点等参单元, 有限域外边界上采用 3 节点线单元。在线单元上分别施加一阶边界条件, 式 (2.8), 二阶边界条件, 式 (2.11) 和经典边界条件, 式 (1.3)。

关于有限元的求解过程按标准方法进行, 这里不再赘述。

圆柱绕流问题的精确解为:

$$\phi_T = U \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \quad (3.5)$$

式中  $a$  为圆柱半径。

在圆柱面上,  $r=a$ , 则:

$$\phi_r|_{r=a} = 2aU \cos\theta \quad (3.6)$$

椭圆柱绕流问题的精确解为:

$$\phi_r = \frac{1}{2} cU \rho \cos\varphi + \frac{1}{2} U \frac{(a+b)^2}{c} \frac{1}{\rho} \cos\varphi \quad (3.7)$$

式中  $a$  为椭圆长半轴,  $b$  为椭圆短半轴,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $\rho$  和  $\varphi$  为保角变换后的极坐标。将椭圆变为圆的变换关系为:

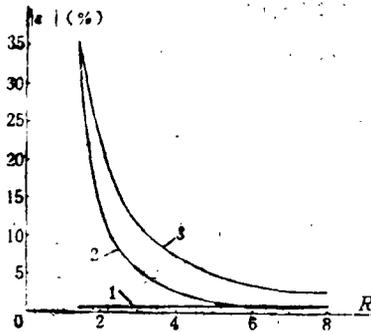
$$z = \frac{c}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.8)$$

在椭圆柱面上,  $\rho = (a+b)/c$ , 则:

$$\phi_r|_{\rho=(a+b)/c} = (a+b)U \cos\varphi \quad (3.9)$$

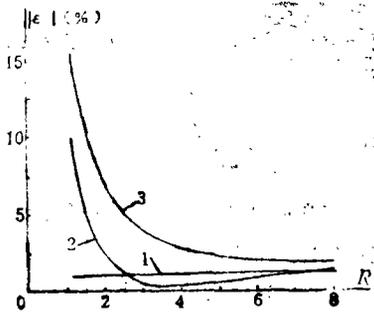
计算中取  $U=1$ , 圆柱半径  $a=1$ , 椭圆柱长半轴  $a=1$ , 短半轴  $b=0.5$ 。在图 1 和图 2 中显示了相应于圆柱上  $\theta=0, \pi$  的点和椭圆柱上  $\varphi=0, \pi$  的点的总速度势相对误差绝对值。相对误差计算公式为:

$$e = \frac{\text{精确解} - \text{数值解}}{\text{精确解}} \quad (3.10)$$



(圆柱面上  $\theta=0, \pi$ ; 曲线 1, 2, 3 分别对应于一阶、二阶和经典边界条件)

图 1 圆柱绕流问题有限元解的相对误差



(椭圆柱面上  $\varphi=0, \pi$ ; 曲线 1, 2, 3 分别对应于一阶、二阶和经典边界条件)

图 2 椭圆柱绕流问题有限元解的相对误差

#### 四、讨论和结论

由图 1 和图 2 可以看到, 应用一阶边界条件的结果相对误差最小, 不超过 1%, 且几乎不随有限域外边界半径  $R$  的变化而变化。应用二阶边界条件时, 计算误差随着有限域外边界半径增大很快减小。应用经典边界条件时, 计算误差虽然也随着有限域外边界半径增大而减小, 但衰减较慢, 例如对于圆柱绕流问题, 当  $R=8$  时, 相对误差仍达 2.5%。

对于圆柱绕流问题, 应用一阶边界条件的误差比应用二阶边界条件的误差小是理所当然的。因为事实上, 对于圆柱绕流问题, 一阶边界条件是精确的边界条件, 它对于  $r \geq a$  的区域都是成立的。图 1 中显示的应用一阶边界条件的误差实际上完全是由于数值计算引起的。因此当有限域增大时, 由于单元的增多, 计算误差略有增大。

然而对于椭圆柱绕流问题, 计算结果表明, 一阶边界条件仍然优于二阶边界条件, 并且同圆柱绕流问题一样, 应用一阶边界条件的误差也几乎不随  $R$  变化, 这有些出乎意料。对于

柱体波浪散射问题 (Helmholtz 方程问题), 黄河宁、李鉴初<sup>[3]</sup> 的数值计算结果表明, 二阶边界条件明显优于一阶边界条件, 而这里对于 Laplace 方程问题, 结论却相反。

根据以上的计算和讨论, 建议在实际应用中采用一阶边界条件, 它近似于精确的边界条件, 明显优于经典边界条件, 也优于二阶边界条件。

### 参 考 文 献

- [1] Bayliss, A., M. Gunzburger and E. Turkel, Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions, *SIAM, Appl. Math.*, **42**, 2, April (1982), 430—451.
- [2] 梁昆森, 《数学物理方法》, 人民教育出版社, 第二版 (1987).
- [3] 黄河宁、李鉴初, 散射波的二阶辐射边界条件及其应用, *海洋学报*, **10**, 2 (1988), 233—239.

## High-Order Boundary Conditions for the Problems of Laplace Equation in Infinite Region and Their Application

Huang He-ning Wang Fa-jun

(Institute of Marine Environmental Protection State Oceanic Administration, Dalian)

### Abstract

The high-order boundary conditions for the problems of Laplace equation in infinite region have been developed. The improvement in accuracy for numerical solution is achieved by imposing the high-order boundary conditions on the exterior boundary of a reduced finite region in which the numerical method is used. So both computing efforts and the required storage in computer are reduced. The numerical examples show that the 1st-order boundary condition approaches to the exact boundary condition and it is clearly superior to the traditional boundary condition and the 2nd-order boundary condition.

**Key words** Laplace equation, potential function, boundary condition, conformal transformation