

由几何反演导出的分形几何*

张永平 谢和平

(中国矿业大学, 1989年1月13日收到)

摘 要

本文介绍了由几何反演而导出的自反分形概念, 构造了一个对称的, 分叉自反分形曲线和一个自反分形尘集, 推广了分形密切的概念而且提出了一个新的概念——分形包络, 最后给出了“肥皂”和“鸡蛋”的两个自反分形的实例。

关键词 几何反演 自反分形 分形密切 分形包络。

一、引 言

分形几何是二十世纪七十年代才出现的一个新的数学分支, 这一开拓性的工作应归功于 B. B. Mandelbrot^{[1],[2]}. 分形几何为人们提供了一个研究自然界中复杂的不规则形状和结构的数学工具^[3,4,5,7].

分形几何从处理最简单的“线性分形”开始, 其研究的是具有自相似特征的分形集。然而分形概念并不拘泥于自相似, 在几何反演所对应的变换群下的某些不变集也具有分形特征, 这种分形集被称为自反分形。第一个自反分形是在十九世纪八十年代由Poincaré和Klein构造的, 而今自反分形已成为自守函数理论的一个特殊的论题。

二、几 何 反 演

给定一个以 O 为圆心, 以 R 为半径的圆 c , P 是不同于 O 点的任何一点, P 点的反演点定义为射线 OP 上的一点 P' , 使得长度 $|OP|$ 和 $|OP'|$ 满足

$$|OP| \cdot |OP'| = R^2$$

反演是保圆映射且是周期为2的周期映射(把直线作为半径为无穷大的圆), 其具有以下性质:

定理1 圆的反演像是圆。

定理2 彼此正交(或相切)的圆的反演仍是彼此正交(或相切)。

定理3 两个不同点 P 和 P' 关于圆 c 是互为反演点, 则经过 P 和 P' 的任意一个圆是它自身关于圆 c 的反演像, 并且它与圆 c 正交。

* 陈至达推荐。

定理4 若以 O 为圆心,以 R 为半径的圆 c 把点偶 AB (A, B 都不同于 O)反演成点偶 $A'B'$,则它们之间距离满足关系式:

$$|A'B'| = \frac{R^2 |AB|}{|OA| \cdot |OB|}$$

三、自反集与自反分形

与线性分形类似,我们从一个“生成器”开始,这里生成器是由任意取定的 m 个圆构成.由这些圆连续不断地反演构成一个变换群,把这样所得到的变换群记为 G .在群 G 的运算下不变的集合称为自反集.

对任意非空集 S ,把它称为种子(seed), S 关于 G 的所有变换下的像集的并称为 S 的族(clans),任何集 S 的族都是 G 的自反集.如果一个群 G 对任何种子 S , S 的族覆盖整个平面,这时 G 的自反集必为全平面,称 G 为混沌群(chaotic group).非混沌群归功于Poincaré.如果 G 是一个非混沌群, G 的自反集中最小的一个是在群 G 的运算下任何最初点变换的极限点的集合,我们把它称为极限集,记为 L .极限集可能退化为一个点或一个圆等等,但通常它是一个破碎或不规则的分形集.若变换群 G 的一个极限集 L 是分形集,则称 L 为自反分形.

四、对称的、分叉的自反分形曲线

本节我们来构造一个对称的、分叉的自反分形曲线.把图1中的7个圆 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_7$ 作为生成器.第一步是对生成器中每个圆 c_i ($i=1, 2, \dots, 7$),用除 c_i 外其它6个圆关于 c_i 的反演的像代替 c_i ,这样共得到42个圆(如图1中没有标记的42个圆).第二步用刚得到的42个圆关于生成器的7个圆的反演像中新出现的252个圆(如图1中所示的黑圆盘的边界).重复上述过程并且无限地进行下去,最终所得到的极限集 L 是一个自反集.

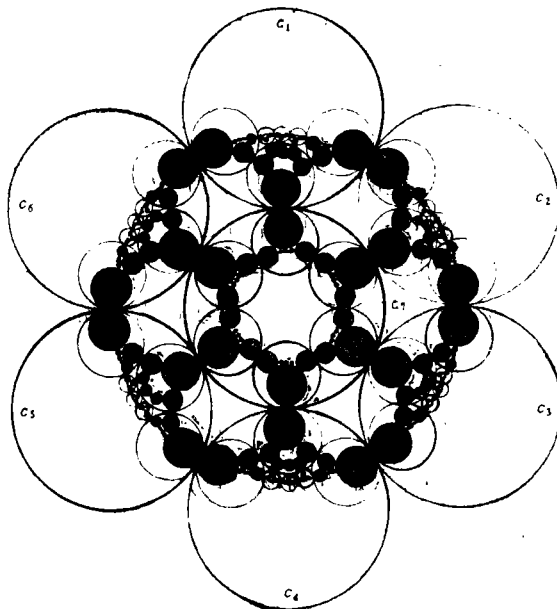


图 1

显然 L 是对称的.由于 L 不是自相似的,则分形维数的计算和估计变得十分困难.根据 L 的结构我们猜想 L 的分形维数小于2且不小于Apollonian网^[2]的分形维数,也就是说

$$1.3058 \leq D < 2$$

另一方面,在 L 的任意一点 P 的任意小的邻域 $U(P)$ 的边界 $\partial U(P)$ 上至少有3点是在 $L \cap \partial U(P)$ 的同一条曲线上,因此 L 是一条对称的,分叉的自反分形曲线.

五、自反分形尘集

我们采用与上节类似的方法再构造一个自反分形尘集.如图2, c_1, c_2 和 c_3 是三个半径相等、圆心之间距离也相等且互不相交的圆.我们把这三个圆作为生成器.第一步用 c_2 和 c_3 关于 c_1 的反演像代替 c_2 ,这样得到6个圆 c_4, c_5, \dots, c_6 .第二步用这6个圆关于生成器的三个圆的反演所得到的12个新圆代替它们.如此无限地进行下去,最终所得极限集 L 是一个自反集.

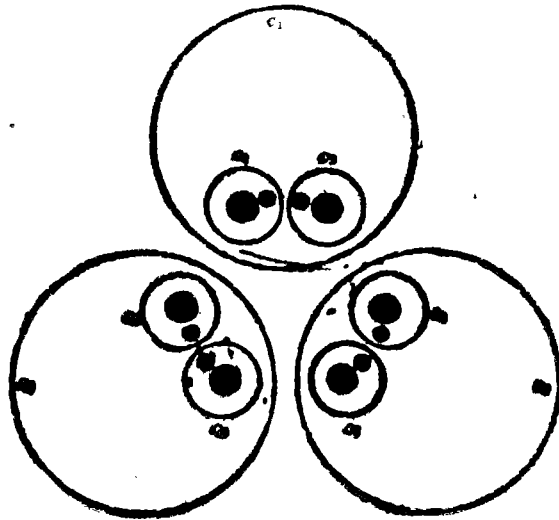


图 2

下面我们来估计 L 的分形维数 D .我们必须借助于Hausdorff-Besicovitch维数的定义来确定或估计 L 的分形维数.但这是很困难的.幸运的是这个自反集 L 具有较好的“相似性”和对称性.这里我们近似把它作为自相似的,由于 $N=2$,又根据定理4可知比率 r 满足:

$$\frac{1}{4} < r < \frac{2}{5}$$

在极限情况下,我们得到两个相似比 $r_1=1/4$ 和 $r_2=2/(3+\sqrt{5})$,利用Mandelbrot公式^[2] $\sum_1^N r_i^D = 1$ 得分形维数 $D \approx 0.597$.另一方面 $D_r=0$,因此极限集 L 是一个自反分形尘集.

六、分形密切和分形包络

从Apollonian网不难看出很多自反分形具有“密切”或“包络”特征.当然由于分形曲线不那么光滑,标准的密切和包络概念在分形几何中无什么意义.因此有必要来重新定义这些概念,这里我们把它们分别称为分形密切和分形包络.

1) 密切与分形密切

在标准密切概念中为描述圆 c 与曲线 L 在 P 点处密切, 一个合适的参数 u 是 P 到圆心的距离的倒数. 把密切圆对应的参数记为 u_0 , u_0 是曲线 L 在 P 点处的曲率. 设密切的圆心为 O , 把过 P 点且圆心在射线 PO 上的圆的全体作为一个圆族, 记为 $\{c_u\}$, 其中 u 是 c_u 的参数. 在 $\{c_u\}$ 中, 若 $u < u_0$, 则以 P 点为中心曲线的一小段全部落在以 c_u 为边界的闭圆盘 D_u 上, 而如果 $u > u_0$, 则以 P 点为中心曲线的一小段全部落在开圆盘 $D_u \setminus c_u$ 之外.

对分形曲线利用曲率来定义密切概念是无意义的. 下面我们两个值 u' 和 u'' 代替 u_0 来定义分形密切概念, 定义如下:

对于分形曲线 L 上的一个正则点 P (在 P 点有切线), 如果存在过 P 点且参数分别为 u' 和 u'' 的圆 $c_{u'}$ 和 $c_{u''}$, 使得:

- (1) $c_{u'}$ 和 $c_{u''}$ 都在 P 点与 L 相切;
- (2) L 全部落在以 $c_{u'}$ 和 $c_{u''}$ 为边界的闭区域 W (可以是有界也可能是无界的区域) 上;
- (3) 对过 P 点且落在区域 W 内的任何圆 c_u , ($c_{u'}$ 和 $c_{u''}$ 除外), 设 D_u 为以 c_u 为边界的闭圆盘, 记 $L_u = L \cap D_u$, 都恒有 $L_u \setminus c_u \neq \emptyset$, $L \setminus L_u \neq \emptyset$; 则称 $c_{u'}$ 和 $c_{u''}$ 为 L 的 (整体) 分形密切圆. Apollonian圆⁽²⁾是Apollonian网的分形密切圆.

需要指出的是分形密切圆之一可以退化为一个点或是过 P 点的切线 (点作为退化了的圆, 直线作为半径为无穷大的圆). 上述分形密切的定义是整体的, 分形密切概念可以局部地重新来定义.

2) 包络与分形包络

若一条曲线 L 在其每一点处都与曲线族中的一条曲线相切, 而且曲线族中每条曲线都以这种方式与 L 相切, 则称 L 为该曲线族的包络.

如果一条曲线 L 是一个曲线族的包络, 则 L 是一条光滑曲线. 然而要求分形曲线是光滑曲线确实太尖刻了. 我们用几乎处处光滑代替光滑来定义分形包络概念, 定义如下:

如果一条分形曲线 L 和曲线族 Γ 满足:

- (1) L 上除有限或可列无限多个点外, 所有点都是正则点;
- (2) 在 L 的每个正则点 P 处, 都存在曲线族 Γ 中的曲线与 L 在该点处相切;

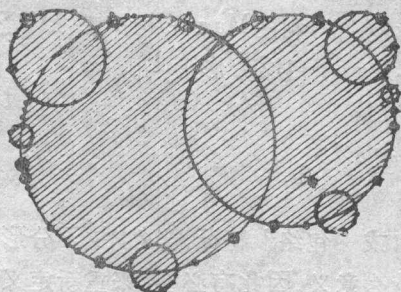


图 3

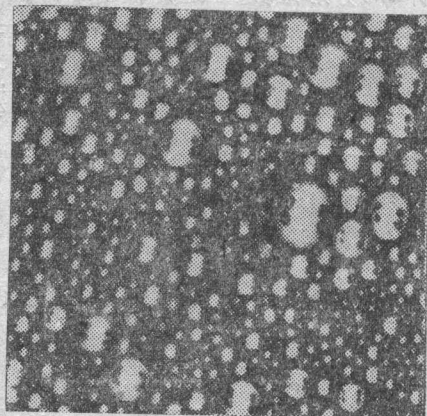


图 4

(3) 曲线族 Γ 中每条曲线都与 L 相切;
则分形曲线 L 称为该曲线族 Γ 的分形包络。

图3的阴影部分的边界分形曲线 L 是 L 内部所包含的圆组成的曲线族的分形包络。

七、液状结晶的Apollonian模型

本节给出两个自反分形的实例(肥皂和鸡蛋),其中“鸡蛋”的Apollonian模型是由我们发现的。它们是自反分形在液状结晶的一个范畴的描述中所起作用的具体体现。

由于液状结晶概念不广为人知,我们引用Bragg于1934年给出的意译来描述:“这些漂亮而且神秘的物质是:在它们流动性方面呈现液状特征,而在视觉上则表现为结晶体的特征;它们的分子具有比较复杂的结构,长长的而且象链。”

一些液状结晶状态的组成象肥皂组织的模型。肥皂液状结晶象地上谷物一样排列,层的厚度是分子的长度。最外层非常柔韧,坚固而且接近于澄清,并且屈从后释族。

实际中另一个Apollonian模型的实例是“鸡蛋”。在蒸鸡蛋羹之前,我们先要把鸡蛋打入碗里,再加入两倍的温水或牛奶,然后用筷子搅拌使起泡沫。搅拌之后,我们会发现“鸡蛋”表面形成了一层泡沫,(图4)表示的是它们在摄影底片上的像,其具有Apollonian空隙模型。鸡蛋表面被大小不同的气泡覆盖,并且状态比较稳定。只有把碗放入加热的锅里之后,气泡才很快释放掉。

八、结束语

自反分形作为某些反演群下的不变集具有很丰富的内容,然而自反分形并不拘泥于几何反演。某些变换群的运算下的不变集也是自反分形。特别是一些保圆变换群。例如,由Möbius变换或者Möbius变换与共轭变换的复合变换所生成的变换群,这些变换群可以构造更多、更丰富的自反分形。

参 考 文 献

- [1] Mandelbrot, B.B., *Fractals Forms, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco (1977).
- [2] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman and Company (1983)
- [3] 谢和平、陈至达,分形几何及其在断口分析中的应用,MMM I文集(1987).
- [4] 谢和平、张永平,分形几何与自然界中的分形几何律,江苏省数学会(1988.9).
- [5] Underwood, Ervine and Kingshuk Baneji, Invine review fractals in fractography, *Materials Science and Engineering*, 80 (1986).
- [6] Gilbert, W.J., Fractal geometry derived from complex bases, *Math. Int.*, 4, 2 (1982).
- [7] 谢和平、陈至达,分形几何与岩石断裂,力学学报, 20, 3 (1988), 264.

Fractal Geometry Derived from Geometric Inversion

Zhang Yong-ping

Xie He-ping

(Dept. of Math. and Mech., China University of Mining and Technology, Xuzhou)

Abstract

In this paper, the conception of fractal geometry derived from geometric inversion is introduced. A ramified self-inverse fractal with symmetry and a self-inverse fractal dust set are constructed. The authors extend the conception of the fractal osculation and propose a new notion—fractal envelope. Finally, two examples of self-inverse fractal (soap and egg) are given.

Key words geometric inversion, self-inverse fractal, fractal osculation, fractal envelope