应用数学和力学，第11卷第11期（1990年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非线性常微分方程转向点问题的数值解*

林鹏程　白清源

（福州大学计算机系，1989年11月13日收到）

**摘　要**

本文利用文[3]的技巧得到了具转向点的非线性常微分方程边值问题的导数估计，再结合文[4]的方法，证明了所构造的差分格式关于小参数 $\varepsilon$ 的一致收敛性。我们给出了数值例子，数值结果与理论分析完全符合。

**关键词**　非线性常微分方程　转向点　奇异摄动问题　差分格式　一致收敛性

## 一、引　言

在量子力学、波的传播以及力学和物理学的其它问题中，广泛地出现含有转向点的微分方程边值问题。关于这类问题的渐近解，已有很多国内外学者做了大量的、详尽的工作。在数值解方面，一些学者如林鹏程、颜鹏翔，V. D. Liseikin, K. Niijima 等也已经对线性的和半线性的情况加以研究。但是，关于非线性的情况，迄今未见有文献发表。本文试着对具转向点的非线性常微分方程边值问题的数值解作一探讨。

考虑如下转向点问题：

$$\begin{cases} Lu(x)\equiv\varepsilon^2u''(x)+x\cdot a(u(x))u'(x)-b(x)u(x) \\ \qquad =f(x) \qquad\qquad (0<x<1) & (1.1) \\ u(0)=A,\ u(1)=B \qquad (A\text{、}B\text{均为常数}) & (1.2) \end{cases}$$

假定：函数 $a$，$b$，$f$ 均足够光滑，且 $a(u(x))\geqslant a_0>0$，$b(x)\geqslant b>0$，$x\in[0,1]$，$a_0$，$b_0$ 都是常数。不失一般性，设 $A=B=0$。

## 二、解的导数估计

容易证明下面三个引理。

**引理2.1**　算子 $L$ 满足极值原理。

**引理2.2**　设$u(x)$为(1.1)(1.2)的解，则

$$|u(x)|\leqslant\frac{1}{b_0}\cdot\max_{0<x<1}|Lu(x)|.$$

* 林宗池推荐。本文得到国家自然科学基金资助。

**引理2.3**　设$u(x)$为(1.1)(1.2)的解，对正整数$i$，成立估计式：$|u^{(i)}(x)|\leqslant M\varepsilon^{-i}$，$x\in[0,1]$.

其中　$M$表示与$x$，$\varepsilon$无关的常数．在后面的数值解讨论中，$M$还与$h$无关．

引理2.3中的导数估计对于我们的讨论是远远不够的．下面采用文[3]的技巧，得到了当$x$较远离转向点时导数的较精确估计．

**引理2.4**　设$u(x)$为(1.1)(1.2)的解，对$i=1,2,3$，有：

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant\begin{cases} M\varepsilon^{-i} & (0\leqslant x\leqslant m_0\varepsilon) \qquad (2.1)\\ M\left[\varepsilon^{-i}\cdot\exp\left(-\frac{a_0}{4}x^2\varepsilon^{-2}\right)+x^{\alpha-i}\right] & (m_0\varepsilon\leqslant x\leqslant 1) \qquad (2.2)\end{cases}$$

其中　$m_0$为某个固定的与$x$，$\varepsilon$无关的常数，$0<\alpha<b(0)/a(0)$，$\alpha\leqslant 1$.

**证明**　显然只需证明(2.2).

首先证明$i=1$时(2.2)成立．

设$u(x)$为(1.1)(1.2)的解，则下列问题：

$$\begin{cases}\tilde{L}\bar{u}(x)\equiv\varepsilon^2\bar{u}''(x)+x\cdot a(u(x))\cdot\bar{u}'(x)-b(x)\bar{u}(x)\\ \qquad =f(x) \qquad\qquad (0<x<1) & (2.3)\\ \bar{u}(0)=0,\ \bar{u}(1)=0 & (2.4)\end{cases}$$

与(1.1)(1.2)同解．易见算子$\tilde{L}$亦满足极值原理．

由(1.1)得

$$u'(x)=u'(0)\cdot\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]+\varepsilon^{-2}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]\cdot\int_0^x[b(\xi)u(\xi)+f(\xi)]\cdot\exp[\varphi(\xi,\varepsilon)]d\xi,$$

其中　$\varphi(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\int_0^x\xi\cdot a(u(\xi))d\xi$.

由此有：

$$|u'(x)|\leqslant M\varepsilon^{-1}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]+\varepsilon^{-2}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]\cdot\int_0^x|bu+f|\cdot\exp[\varphi(\xi,\varepsilon)]d\xi \tag{2.5}$$

我们先估计$|b(x)\cdot u(x)+f(x)|$.

由(2.3)有：$\tilde{L}[bu+f]\leqslant Mx$.

取闸函数　$g(x)=M_1\exp\left(-\frac{a_0}{2}x^2\varepsilon^{-2}\right)+M_2\cdot x^\alpha$，$M_1$，$M_2$是待定常数．则

$$\tilde{L}g(x)\leqslant-(a_0+b_0)\cdot M_1\cdot\exp\left(-\frac{a_0}{2}x^2\varepsilon^{-2}\right)-[b(x)-\alpha\cdot a(u(x))]\cdot M_2\cdot x^\alpha$$

因为$\alpha<b(0)/a(0)$，由函数连续性我们可以证明：

$$\tilde{L}[g(x)\pm(bu+f)]<0,$$

$$[g(x)\pm(bu+f)]|_{x=m_0\varepsilon}\geqslant 0,$$

$$[g(x)\pm(bu+f)]|_{x=m_1}\geqslant 0,$$

只要$M_1$，$M_2$取得充分大即可．这里，$m_1$是某个固定的正常数．

因此，由极值原理可得到：

$$|[b(x)u(x)+f(x)]|\leqslant M_1\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}a_0x^2\varepsilon^{-2}\right)+M_2\cdot X^a,\quad X\in[m_0\varepsilon, m_1]$$

但在整个区间[0，1]上，$|bu+f|\leqslant M$.

故我们有：

$$|b(x)u(x)+f(x)|\leqslant M\left[\exp\left(-\frac{1}{2}a_0x^2\varepsilon^{-2}\right)+x^a\right] \tag{2.6}$$

将(2.6)代入(2.5)，可得：

$$|u'(x)|\leqslant M\varepsilon^{-1}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]+M\varepsilon^{-2}x\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}a_0x^2\varepsilon^{-2}\right]+Mx^{a-1} \tag{2.7}$$

因此 $$|u'(x)|\leqslant M\left[\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{4}a_0x^2\varepsilon^{-2}\right)+x^{a-1}\right]$$

即，完成了当 $i=1$ 时(2.2)式的证明.

为证明当 $i=2$ 时(2.2)成立，我们对(1.1)两边求导一次，得到

$$\varepsilon^2u'''(x)+x\cdot a(u(x))\cdot u''(x)=H(x,u,u') \tag{2.8}$$

其中 $$H(x,u,u')=(bu+f)'-(xa(u))'\cdot u'$$

容易证明：

$$|H(x,u,u')|\leqslant M(1+|u'(x)|)$$

由(2.8)有：

$$u''(x)=u''(0)\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]+\varepsilon^{-2}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]\cdot\int_0^x H(\xi,u,u')\cdot\exp[\varphi(\xi,\varepsilon)]d\xi$$

故 $$|u''(x)|\leqslant M\varepsilon^{-2}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]+\varepsilon^{-2}\exp[-\varphi(x,\varepsilon)]\cdot\int_0^x|H(\xi,u,u')|\exp[\varphi(\xi,\varepsilon)]d\xi$$

利用(2.7)可得：

$$|u''(x)|\leqslant M[\varepsilon^{-2}+x\cdot\varepsilon^{-3}+x^2\varepsilon^{-4}]\exp\left[-\frac{a_0}{2}x^2\varepsilon^{-2}\right]+M\cdot x^{a-2} \tag{2.9}$$

故 $|u''(x)|\leqslant M\left[\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{a_0}{4}x^2\varepsilon^{-2}\right)+x^{a-2}\right]$

就证明当 $i=2$ 时(2.2)成立.

当 $i=3$ 时，证明如上，此略.

引理证毕.

类似于文[3]，我们可以将(2.1)(2.2)改写成如下形式，(对 $i=1, 2, 3$)：

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant\begin{cases} M\varepsilon^{-i} & (0\leqslant x\leqslant m_0\varepsilon)\\ M[\varepsilon^{-i}\exp(-m_3x\varepsilon^{-1})+x^{a-i}] & (m_0\varepsilon\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

其中 $m_3$ 是任意的不依赖于 $x$，$\varepsilon$ 的常数.

由此，我们得到下列有用的不等式：

（1） $|x\cdot u'(x)|\leqslant M$，$|x^2u''(x)|\leqslant M$，$|x^3u'''(x)|\leqslant M$ $(x\in[0, 1])$

（2） $\int_0^1|u'(x)|dx\leqslant M$.

## 三、差分格式及其一致收敛性的证明

等距划分$[0, 1]$，步长$h$，且有$N\cdot h=1$，$x_i=ih$ ($i=0, 1, \cdots, N$, $N$是正整数)．对(1.1)(1.2)构造如下格式：

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv \dfrac{\varepsilon^2}{h^2}[\sigma_{i+1}u_{i+1}-2\sigma_i u_i+\sigma_{i-1}u_{i-1}] \\ \qquad +x_i a(u_i)\cdot\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-b_i u_i=f_i \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1) & (3.1) \\ u_0=0,\ u_N=0 & (3.2) \end{cases}$$

其中 $\sigma_i=\frac{1}{2}\rho x_i\cdot a(u_i)\cdot \coth\left(\frac{1}{2}\rho x_i a(u_i)\right)$, $\rho=\frac{h}{\varepsilon^2}$ $\quad(1\leqslant i\leqslant N-1)$

$\sigma_0\equiv 1$, $b_i=b(x_i)$, $f_i=f(x_i)$ $\quad(1\leqslant i\leqslant N-1)$

定义$R^{N+1}$为$N+1$维欧氏空间，$V=(v_0, v_1, \cdots, v_N)\in R^{N+1}$，模为$\|V\|_1=h\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}|v_i|$，开球$V(\phi,r)=\{\psi\in R^{N+1}\mid \|\psi-\phi\|_1<r\}$，闭球$\bar V(\phi,r)$．

引进压缩映射原理如下：

**引理3.1** 假设算子 $H: R^{N+1}\to R^{N+1}$是$V(\phi^{(0)}, r)$上的压缩映射，即存在常数$\theta$：$0<\theta<1$，使得$\forall\phi, \psi\in V(\phi^{(0)}, r)$，有 $\|H(\phi)-H(\psi)\|_1\leqslant\theta\|\phi-\psi\|_1$．如果

$$r_0 \overset{记}{=} \frac{1}{1-\theta}\|\phi^{(0)}-H(\phi^{(0)})\|_1\leqslant r，那么$$

（1） 算子方程$\phi=H(\phi)$在$\bar V(\phi^{(0)}, r)$上存在唯一解，

（2） $\|\phi-\phi^{(0)}\|_1\leqslant r_0$，

类似于文[9]中引理1的证明，我们有：

**引理3.2** 定义差分算子$M_h$为：

$$M_h[u_i]\equiv\varepsilon^2\sigma_i[u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}]/h^2+x_i\cdot a(u_i)\cdot\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} \quad (1\leqslant i\leqslant N-1)$$

设$u(x)$为(1.1)(1.2)的解，则

$$M_h[u(x_i)]=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}K_i(t)\cdot g_i(t, u, u', u'')dt \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1)$$

其中

$$K_i(t)=\begin{cases}\dfrac{\tau_i-1}{h(\tau_i+\tau_i^{-1}-2)}\left[1-\exp\left(x_i\cdot a(u(x_i))\dfrac{t-x_{i-1}}{h}\rho\right)\right] \\ \qquad\qquad (t\in[x_{i-1}, x_i]) \\ \dfrac{1-\tau_i^{-1}}{h(\tau_i+\tau_i^{-1}-2)}\left[\exp\left(-x_i\cdot a(u(x_i))\dfrac{x_{i+1}-t}{h}\rho\right)-1\right] \\ \qquad\qquad (t\in[x_i, x_{i+1}])\end{cases}$$

$g_i(t,u,u',u'')=\varepsilon^2 u''(t)+x_i\cdot a(u(x_i))\cdot u'(t)$

$\tau_i=\exp(-x_i\cdot a(u(x_i))\cdot\rho)$

**引理3.3** 对上述的$K_i(t)$，有：

（1）$K_i(t)\geqslant 0 \quad (t\in[x_{i-1},x_{i+1}], \quad 1\leqslant i\leqslant N-1)$

（2）$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} K_i(t)dt=1$

（3）$h\cdot K_i(t)\leqslant 1 \quad (1\leqslant i\leqslant N-1)$.

**引理3.4**(文[4]) 设函数$\sigma(v)=v\cdot\coth v$，则$\forall v$，有：$|\sigma'(v)|\leqslant 1$， $\sigma''(v)\geqslant 0$.

令

$$G_h(U)|_i=\begin{cases}0 & (i=0,N)\\ u_i+k(L^h u_i-f_i) & (1\leqslant i\leqslant N-1)\end{cases}$$

其中 $k$为待定常数，$U=(u_0, u_1, \cdots, u_N)\in R^{N+1}$，$k>0$。则(3.1)(3.2)等价于算子方程$U=G_h(U)$

首先证明算子$G_h$是$V(U(x), m)$上的压缩映射，其中$m$是不依赖于$h$，$\varepsilon$的正常数，而$U(x)=(u(x_0), u(x_1), \cdots, u(x_N))$，$u(x)$是(1.1)(1.2)的解。

由模的定义有：

$$\|G_h(U)-G_h(V)\|_1=h\sum_{i=1}^{N-1}|G_h(U)|_i-G_h(V)|_i| \quad (\forall U,V\in V(U(x),m))$$

由多元中值定理可知，存在$w\in V(U(x), m)$，使

$$G_h(U)|_i-G_h(V)|_i=\sum_{j=-1}^{1}\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_{i+j}}(u_{i+j}-v_{i+j})$$

现在分两种情况加以讨论：

（i）设$\rho=h/\varepsilon^2\leqslant M$.

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_{i+1}}=K\cdot\frac{\varepsilon^2}{h^2}\left[\sigma_{i+1}+u_{i+1}\cdot\frac{d\sigma_{i+1}}{du_{i+1}}+z_i\right]$$

这里$z_i=\rho x_i\cdot a(u_i)/2$.

而
$$u_{i+1}\cdot\frac{d\sigma_{i+1}}{du_{i+1}}=\frac{da(u_{i+1})}{du_{i+1}}\cdot\frac{u_{i+1}}{a(u_{i+1})}\left[z_{i+1}\cdot\coth z_{i+1}-\frac{z_{i+1}^2}{\mathrm{sh}^2 z_{i+1}}\right]$$

容易证明：$\forall z\geqslant 0$，$f^*(z)=z\cdot\coth z-z^2/\mathrm{sh}^2 z\geqslant 0$

因此当$\frac{da(u)}{du}\cdot u\geqslant 0(\forall x\in[0, 1])$时，$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_{i+1}}\geqslant 0$.

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_i}=1-k\Big\{\frac{1}{h}x_i\cdot a(u_i)\cdot\coth z_i+b_i+2\frac{\varepsilon^2}{h^2}\cdot\frac{da(u_i)}{du_i}$$
$$\cdot\frac{u_i}{a(u_i)}\left[z_i\cdot\coth z_i-\frac{z_i^2}{\mathrm{sh}^2 z_i}\right]-x_i\cdot\frac{da(u_i)}{du_i}\cdot\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}\Big\}$$

因为$x\cdot|u'(x)|\leqslant M(x\in[0, 1])$，从而可以找到一个这样的常数$k$，使：

$$0<k\cdot\Big\{\max_{x\in[0,1]}\left[\frac{1}{h}x\cdot a(u)\cdot\coth\left(\frac{1}{2}\rho x a(u)\right)\right]+\max_{x\in[0,1]}a(u(x))$$
$$+\max_{x\in[0,1]}b(x)+\max_{x\in[0,1]}\left|x\cdot\frac{da(u)}{du}\cdot u'(x)\right|+2\frac{\varepsilon^2}{h^2}\cdot\max_{x\in[0,1]}\frac{da(u)}{du}$$

$$\cdot\frac{u(x)}{a(u)}\cdot\left[\frac{1}{2}\rho x a(u)\coth\left(\frac{1}{2}\rho x a(u)\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}\rho x a(u)\right)^2}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{1}{2}\rho x a(u)\right)}\right]\Bigg\}<1$$

于是

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_i}\geqslant 0.$$

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_{i-1}}=k\frac{\varepsilon^2}{h^2}\left[\sigma_{i-1}+u_{i-1}\frac{d\sigma_{i-1}}{du_{i-1}}-z_i\right]$$

注意到当 $\rho\leqslant M$ 时，$z_i=z_{i-1}+O(h\rho)$，因此当 $h$ 充分小时，$\sigma_{i-1}-z_i\geqslant 0$。从而，

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial u_{i-1}}\geqslant 0.$$

因此，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1}|G_h(U)|_i-G_h(V)|_i|\leqslant\sum_{i=1}^{N-1}\Bigg\{1-k\cdot\Bigg[b_i-x_i\cdot\frac{da}{du_i}\cdot\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$

$$+\frac{x_{i+1}a(u_{i+1})-x_{i-1}a(u_{i-1})}{2h}\Bigg]\Bigg\}|u_i-v_i|$$

而 $\displaystyle\frac{x_{i+1}a(u_{i+1})-x_{i-1}a(u_{i-1})}{2h}=(x\cdot a(u(x)))'|_{x_i}+\frac{h^2}{3}(x\cdot a(u(x)))'''|_{\xi_i}$

$$x_i\cdot\frac{da}{du_i}\cdot\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=x_i\cdot\frac{da}{du_i}\cdot u_i'+\frac{h^2}{3}x_i\cdot\frac{da}{du_i}\cdot u'''(\eta_i)$$

这里 $\xi_i$，$\eta_i$ 介于 $x_{i-1}$ 与 $x_{i+1}$ 之间。

不难看出 $\displaystyle\frac{h^2}{3}(xa(u(x)))'''|_{\xi_i}=O(h^2\cdot\varepsilon^{-2})\leqslant O(h)$

$$\frac{h^2}{3}x_i\cdot\frac{da}{du_i}\cdot u'''(\eta_i)=O(h^2\varepsilon^{-2})\leqslant O(h)$$

于是当 $h$ 充分小时

$$\sum_{i=1}^{N-1}|G_h(U)|_i-G_h(V)|_i|\leqslant\sum_{i=1}^{N-1}[1-k(a_0+b_0)]|u_i-v_i|$$

此即 $\qquad\|G_h(U)-G_h(V)\|_1\leqslant\theta\cdot\|U-V\|_1$，$\theta=1-k(a_0+b_0)$

这表明当 $\rho\leqslant M$ 时 $G_h$ 是具压缩映射因子 $\theta=1-k(a_0+b_0)$ 的压缩映射。

对于任意给定的 $h$，$\varepsilon$，总可找到数 $M$，使 $\rho\leqslant M$，因此由压缩映射原理知道，差分格式(3.1)(3.2)总有唯一解 $U=(u_0,u_1,\cdots,u_N)$

(ii) 设 $\rho=h/\varepsilon^2>M$

现在考虑如下的差分格式：

$$\begin{cases}\widetilde{L}^h\tilde{u}_i\equiv\varepsilon^2[\sigma_{i+1}\tilde{u}_{i+1}-2\sigma_i\tilde{u}_i+\sigma_{i-1}\tilde{u}_{i-1}]/h^2\\ \qquad+x_i\cdot a(u_i)\cdot\dfrac{\tilde{u}_{i+1}-\tilde{u}_{i-1}}{2h}-b_i\tilde{u}_i=f_i\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1)&(3.3)\\ \tilde{u}_0=0,\ \tilde{u}_N=0&(3.4)\end{cases}$$

其中 $u_i(0\leqslant i\leqslant N)$ 为(3.1)(3.2)的解。

显见(3.3)(3.4)与(3.1)(3.2)同解，从而(3.3)(3.4)也等价于算子方程$U=G_h(U)$.因此现在只需证明：

$$\|G_h(\tilde{U})-G_h(V)\|_1\leqslant\theta\cdot\|\tilde{U}-V\|_1$$

即可。由计算可知：

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial\tilde{u}_{i+1}}=k\cdot\frac{\varepsilon^2}{h^2}[\sigma_{i+1}+z_i]\geqslant0$$

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial\tilde{u}_i}=1-k\left[2\frac{\varepsilon^2}{h^2}\sigma_i+b_i\right]\geqslant0$$

$$\frac{\partial G_h(w)|_i}{\partial\tilde{u}_{i-1}}=\cdot k\frac{\varepsilon^2}{h^2}[\sigma_{i-1}-z_i]\leqslant0\quad(\text{因为}\rho\geqslant M)$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{N-1}\left|G_h(\tilde{U})|_i-G_h(V)|_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{N-1}\left\{1-k\left[\frac{\varepsilon^2}{h^2}(2z_i-z_{i-1}-z_{i+1})+b_i\right]\right\}|\tilde{u}_i-v_i|$

又 $\frac{\varepsilon^2}{h^2}[2z_i-z_{i-1}-z_{i+1}]=-\frac{h}{2}(xa(u(x)))''|_{\xi_i'}$，$\xi_i'$介于$x_{i-1}$，$x_{i+1}$之间。我们讨论如下：

若$h\geqslant M\varepsilon$，则$x_i\geqslant h\geqslant M\varepsilon$，$1\leqslant i\leqslant N-1$，利用引理2.4可得：

$$-\frac{h}{2}(x\cdot a(u(x)))''|_{\xi_i'}=O(h^a)\ (0<a\leqslant1)$$

若$M\varepsilon^2\leqslant h<M\varepsilon$，可设$h=M\cdot\varepsilon^{1+\beta}$ $(0<\beta<1)$

（1） 当$x_i=O(h)$时，$1\leqslant i<N-1$，

$$-\frac{h}{2}(xa(u(x)))''|_{\xi_i'}=O(\varepsilon^\beta)=O\left(h^{\frac{\beta}{1+\beta}}\right)$$

（2） 当$x_i=O(h^\delta)$时$(0\leqslant\delta<1,\ 1<i\leqslant N-1)$，

若$\delta(1+\beta)\leqslant1$，则由上面讨论已有$-\frac{h}{2}(x\cdot a(u(x)))''|_{\xi_i'}=O(h^a)$

若$\delta(1+\beta)>1$,则$-2^{-1}h(xa(u(x)))''|_{\xi_i'}=O(\varepsilon^\beta+\varepsilon^{(\delta+\delta\beta-1)+\beta})=O\left(h^{\frac{\beta}{1+\beta}}\right)$

因此，不论何种情况，当$\rho\geqslant M$时，总有

$$\sum_{i=1}^{N-1}|G_h(\tilde{U})|_i-G_h(V)|_i|\leqslant\sum_{i=1}^{N-1}(1+kb_0)|\tilde{u}_i-v_i|$$

此即 $\|G_h(\tilde{U})-G_h(V)\|_1\leqslant\theta^*\|\tilde{U}-V\|_1\qquad(\theta^*=1-kb_0)$

因此 $\|G_h(U)-G_h(V)\|_1\leqslant\theta^*\|U-V\|_1\qquad(\theta^*=1-kb_0,\ \rho>M)$

注意到$\theta\leqslant\theta^*$，故对任何的$\rho\geqslant0$，均有

$$\|G_h(U)-G_h(V)\|_1\leqslant\theta^*\|U-V\|_1,\ \theta^*=1-kb_0(0<\theta^*<1)$$

这表明算子$G_h$是具压缩因子$\theta^*=1-kb_0$的$V(U(x),\ m)$上的压缩映射。

其次证明：$\|U(x)-G_h(U(x))\|_1\leqslant Mkh$。

由模的定义可知，我们只须证明：$\sum\limits_{i=1}^{N-1}|L^hu(x_i)-f_i|\leqslant M$，由[4]中的证明，我们可以容易地得到上述式子。

现在应用压缩映射原理如下：

$$H=G_h,\ \phi^{(0)}=U(x),\ r=m,\ r_0=\frac{1}{1-\theta^*}\|U(x)-G_h(U(x))\|_1\leqslant Mh.$$

因此有如下结论：

（1）$U=G_h(U)$ 在 $\bar{V}(U(x),m)$ 上有唯一解；

（2）$\|U-U(x)\|_1\leqslant Mh$.

（2）式表明差分格式(3.1)(3.2)的解 $u_i(0\leqslant i\leqslant N)$ 按 $L'$ 模关于 $\varepsilon$ 一阶一致收敛于微分问题(1.1)(1.2)的解 $u(x)$.

更进一步，引进插值多项式 $Y(x)$ 和 $U_h(x)$，满足：$Y(x_i)=u(x_i)$，$U_h(x_i)=u_i$，$0\leqslant i\leqslant N$

参照[4]的证明，有：$\int_0^1|U_h(x)-u(x)|dx\leqslant Mh$

综上所述，我们证明了如下的主要结果：

**定理3.1**　设 $u(x)$ 是(1.1)(1.2)的解，$m$ 表示不依赖于 $h$，$\varepsilon$ 的正数，那么当 $(da(u)/du)\cdot u(x)\geqslant 0$ $(x\in[0,1]$ 时，差分格式(3.1)(3.2)在闭球 $\bar{V}(U(x),m)$ 上存在唯一解 $U=(u_0,u_1,\cdots,u_N)$。而且 $u_i(0\leqslant i\leqslant N)$ 按 $L'$ 模关于 $\varepsilon$ 一阶一致收敛于 $u(x)$.

**注**：对于下列转向点问题，也有相同的结论：

$$\begin{cases} Lu(x)\equiv\varepsilon^2u''(x)+xa(u(x))u'(x)-b(x)u(x)=f(x) & (-1<x<1)\\ u(-1)=A,\ u(1)=B & (A,\ B\text{均为常数})\end{cases}$$

其中，$a(u)(x))\geqslant a_0>0$，$b(x)\geqslant b_0>0$，$x\in[-1,1]$.

## 四、数 值 例 子

考虑：

$$\varepsilon^2u''(x)+x\cdot u'(x)-u(x)=-(1+\varepsilon^2\pi^2)\cdot\cos\pi x-\pi x\cdot\sin\pi x,\ (-1>x>1)$$
$$u(-1)=u(1)=0$$

这问题有一个精确解为：

$$u(x)=\cos\pi x+\frac{x\cdot\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}\right)}{\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)}$$

其中 “erf“ 为误差函数，即：$\mathrm{erf}(x)=\int_0^x\exp(-t^2)dt$.

计算结果如表1所列.

从表中的数据，我们看到，由于在区间中点出现了转向点，因此在 $x=0$ 附近，误差比其它点的误差大，且误差常常达不到 $O(h)$. 但当 $x$ 稍远离 $x=0$ 时，误差就达到 $O(h)$. 我们的解释是：

当 $i=0$ 时，我们取 $\sigma_0=1$. 这个拟合因子已不是指数型的. 因此，当 $i=0$，即 $x=0$ 时，有较大的误差，这个误差会影响转向点附近几点.

因此，计算结果与我们的理论分析一致，

表 1

| 坐标 \ h, ε | h=0.05 | | h=0.01 | |
|---|---|---|---|---|
| | $\varepsilon^2=10^{-4}$ | $\varepsilon^2=10^{-6}$ | $\varepsilon^2=10^{-4}$ | $\varepsilon^2=10^{-6}$ |
| | 误 差 | 误 差 | 误 差 | 误 差 |
| $x=-0.99$ | — | — | −5.291485E-3 | −5.480086E-3 |
| $x=-0.95$ | −3.612442E-2 | −3.686039E-2 | −2.636445E-2 | −2.720517E-2 |
| $x=-0.90$ | −6.980794E-2 | −7.134191E-2 | −5.205606E-2 | −5.370875E-2 |
| $x=-0.10$ | −5.917681E-2 | −6.770545E-2 | −7.507652E-2 | −7.609499E-2 |
| $x=-0.05$ | 0.1160548 | 0.1662628 | −4.550159E-2 | −4.105711E-2 |
| $x=0$ | −0.7283468 | −0.8224658 | −0.1239313 | −0.8041361 |
| $x=0.05$ | 0.1160550 | 0.1662627 | −4.550159E-2 | −4.105687E-2 |
| $x=0.1$ | −5.917669E-2 | −6.770557E-2 | −7.507664E-2 | −7.609511E-2 |
| $x=0.9$ | −6.980794E-2 | −7.134192E-2 | −5.205604E-2 | −5.370876E-2 |
| $x=0.95$ | −3.611442E-2 | −3.686040E-2 | −2.636444E-2 | −2.720516E-2 |
| $x=0.99$ | — | — | −5.291485E-3 | −5.480086E-3 |

## 参 考 文 献


[1] 江福汝，关于具转向点的一类常微分方程的边值问题，应用数学和力学，1，2 (1980)，201—203.

[2] 林鹏程、颜鹏翔，无共振转向点问题的数值解，应用数学和力学，6，5 (1985)，423—429.

[3] Liseikin, V. D., Numerical solution for a singular perturbation equation with turning point, *J. Comp. Math. and Math. Phys.*, **24**, 12 (1984), 1812—1818. (in Russian)

[4] Niijima, K., A uniformly convergent difference scheme for a semilinear singular perturbation problem, *Numer. Math.*, **43**, 2 (1984), 175—198.

[5] Dorr, F. W., Singular perturbation of nonlinear boundary value problems with turning points, *J. Math. Anal. Appl.*, **29**, 2 (1970), 273—293.

[6] Farrell, P. A., A uniformly convergent difference scheme for turning point problems, The First Conference on Boundary and Interior Layers——Computation and Asymptotic Methods, Dublin, Ireland (1980).

[7] Stynet, M. and E. O'Riordan, $L^1$ and $L^\infty$ uniform convergence of a difference scheme for a semilinear singular perturbation problem, *Numer. Math.*, **50**, 4 (1987), 519—531.

[8] Berger, A. Z., H. D. Han and R. E. Kellogg, A priori estimates and analysis of a numerical method for a turning point problem, *Math. Comp.*, **42**, 166 (1984), 465—492.

[9] Niijima, K., Error estimates for an exponentially fitted difference scheme for a singular perturbation problem I, *Computational and Asymptotic Methods for Boundary and Interior Layers*, Proc. BAIL II Short Course, Dublin, Boole Press (1982), 63—67.

# Numerical Solution of Nonlinear Ordinary Differential Equation for a Turning Point Problem

Lin Peng-cheng Bai Qing-yuan
(*Fuzhou University, Fuzhou*)

**Abstract**

By using the method in[3] several useful estimations of the derivatives of the solution of the boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation with a turning point are obtained. With the help of the technique in[4], the uniform convergence on the small parameter $\varepsilon$ for a difference scheme is proved. At the end of this paper, a numerical example is given. The numerical result coincides with theoretical analysis.

**Key words** nonlinear ordinary differential equation, turning point, singular perturbation problem, difference scheme, uniform convergence