

弹性摩擦接触问题的边界元 — 线性互补解法

沙德松 孙焕纯 徐守泽

(大连理工大学力学系, 1989年12月16日收到)

摘 要

本文对Coulomb摩擦的弹性接触问题给出了边界元—线性互补解法。这是对固体力学中自由边界问题进行边界元数学规划求解的新尝试, 文中附有算例

关键词 摩擦接触 线性互补 变分不等式 边界元

一、前 言

近年来出现的变分不等式和参变量变分原理, 为Hertz接触和非Hertz接触的有限元计算提供了一定的理论基础。文献[3], 文献[6]及文献[7]均给出了非Hertz接触的变分不等方程, 但却未给出求解的方法, 而且文献[6]认为是尚未解决的问题。文献[1]通过参变量变分原理及参变量二次规划, 提供了有限元—数学规划求解的新途径。但由于接触问题的高度应力集中, 使有限元法不能达到较好的精度。而边界元法具有精度高的特点, 所以用边界元法解接触问题尤为人们所重视。但目前使用边界元求解大多采用试验和迭代的方法。文献[5]曾对Hertz接触使用了边界元—数学规划的方法, 但却认为非Hertz接触问题是无法用边界元—数学规划求解的。

本文根据次微分边界条件上的变分不等式直接推导了摩擦接触边界上的线性互补关系, 并与边界积分相结合给出了边界元—线性互补算法。该方法具有精度高和算法简单的特点。在理论上开辟了变分不等式和凸泛函极值问题的新形式。

二、基 本 方 程

不失一般性, 我们仅考虑两个弹性体的平面接触问题。其边界上局部坐标由 \mathbf{n} (边界上外法线方向矢量) 和 \mathbf{t} (边界上切线方向矢量) 构成右手系。边界上面力 \mathbf{S} 和位移 \mathbf{u} 可分解为

$$\mathbf{S} = S_n \mathbf{n} + S_t \mathbf{t}, \quad \mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t}$$

定义可能接触边界 Γ 为 $\Gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$ 与 $\Gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$ 所构成的集合, 且满足:

$\Gamma_c^{(1)}$ 与 $\Gamma_c^{(2)}$ 之间的间隙是微小的,对于 $\Gamma_c^{(1)}$ 上任一点 P ,总存在 $\Gamma_c^{(2)}$ 上一点 Q 与之1-1对应. P 和 Q 之间的连线近似平行于 $\Gamma_c^{(1)}$ 及 $\Gamma_c^{(2)}$ 上的法线方向.

设对应的“点对”上的位移为 $u^{(1)}$ 及 $u^{(2)}$ 面力为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$,初始间隙为 u_0 ,命

$$\begin{cases} u_n = u_0 - (u_n^{(1)} + u_n^{(2)}) & (2.1a) \\ u_t = -(u_t^{(1)} + u_t^{(2)}) & (2.1b) \\ S_n = S_n^{(1)} = S_n^{(2)} & (2.1c) \\ S_t = S_t^{(1)} = S_t^{(2)} & (2.1d) \end{cases}$$

带 Coulomb 摩擦的两个弹性体的接触问题为:求位移场 u_i 和应力场 σ_{ij} 满足方程及边界条件

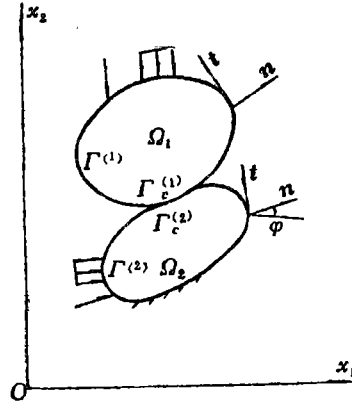


图 1

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i^{(k)} = 0 & \Omega^{(k)} \text{ 内} & (2.2a) \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \Omega^{(k)} \text{ 内} & (2.2b) \\ u_i = u_{gi} & \Gamma_g^{(k)} \text{ 上} & (2.2c) \\ \sigma_{ij} n_j = F_i & \Gamma_F^{(k)} \text{ 上} & (2.2d) \\ u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} S_n = 0 \\ S_t = 0 \end{cases} & \Gamma_o \text{ 上} & (2.2e) \\ u_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_n \leq 0 \\ |S_t| < -\mu S_n \Rightarrow u_t = 0 \\ |S_t| = -\mu S_n \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ u_t = \lambda S_t \end{cases} & \Gamma_o \text{ 上} & (2.2f) \\ & \Gamma_o \text{ 上} & (2.2g) \\ & \Gamma_o \text{ 上} & (2.2h) \\ & \Gamma_o \text{ 上} & (2.2i) \end{cases} \quad (k=1,2)$$

方程(2.2)可以通过边界积分方程来求解,即求位移 u_i 和面力 S_i 满足

$$\left. \begin{aligned} & C_{ij}^{(k)}(P)u_j^{(k)}(P) + \int_{\Gamma^{(k)}} S_{ij}^*(P,Q)u_j^{(k)}(Q)d\Gamma(Q) \\ & - \int_{\Gamma^{(k)}} u_{ij}^*(P,Q)S_j^{(k)}(Q)d\Gamma(Q) \\ & = \int_{\Omega^{(k)}} u_{ij}^*(P,Q)f_j^{(k)}(Q)d\Gamma(Q) \quad (k=1,2) \end{aligned} \right\} (2.3)$$

边界条件: (2.2c)~(2.2i)

式中 P 为源点, Q 为场点, $u_{ij}^*(P,Q)$ 和 $S_{ij}^*(P,Q)$ 为基本解,对于平面应变问题

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,st} r_{,sj} \right] \\ S_{ij}^* &= - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,st} r_{,sj}] \right. \\ & \quad \left. - (1-2\nu)[n_i r_{,sj} - n_j r_{,si}] \right\} \end{aligned}$$

若 u_i 和 S_i 用局部坐标来表示, 则应对系数 C_{ij} 和积分核 S_{ij}^* , u_{ij}^* 进行下述变换

$$\begin{aligned} C_{ij}(P) &\rightarrow \beta_{ik}(P)C_{ki}(P)\beta_{lj}(P) \\ u_{ij}^*(P, Q) &\rightarrow \beta_{ik}(P)u_{ki}^*(P, Q)\beta_{lj}(Q) \\ S_{ij}^*(P, Q) &\rightarrow \beta_{ik}(P)S_{ki}^*(P, Q)\beta_{lj}(Q) \\ \beta &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三、变分不等式及线性互补方程

对边界条件(2.2e)及(2.2g)引进相应的算子 $\beta_n(u_n)$:

$$\beta_n(u_n) = \begin{cases} 0 & \text{当 } u_n > 0 \\ (-\infty, 0) & \text{当 } u_n = 0 \\ \phi & \text{当 } u_n < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

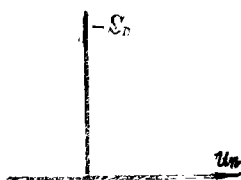


图 2

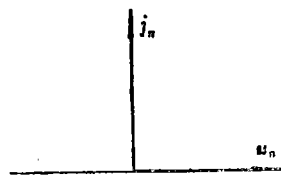


图 3

及超势函数

$$j_n(u_n) = \begin{cases} 0 & \text{当 } u_n \geq 0 \\ \infty & \text{当 } u_n < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

边界条件(2.2e)及(2.2g)表示为

$$S_n \in \beta_n(u_n), \quad \beta_n(u_n) = \partial j_n(u_n)$$

亦即 S_n 为 j_n 的次梯度. 写为变分不等式的形式

$$\left. \begin{aligned} S_n(v_n - u_n) &\leq 0 \\ S_n &\leq 0, \quad u_n \geq 0 \\ \forall v_n \in R \text{ 且 } v_n &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由(3.3)式容易得到:

$$S_n u_n = 0; \quad S_n \leq 0, \quad u_n \geq 0 \quad (3.4)$$

实际上(3.4)也可由(2.2e)与(2.2g)直接得到.

与(2.2f)、(2.2h)、(2.2i)对应的算子 $\beta_i(u_i)$ 及函数 $j_i(u_i)$ 分别为

$$\beta_i(u_i) = \begin{cases} [\mu S_n, -\mu S_n] & \text{当 } u_i = 0 \\ -\mu S_n & \text{当 } u_i > 0 \\ \mu S_n & \text{当 } u_i < 0 \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$j_i(u_i) = S_{i0} |u_i| \quad (3.5b)$$

式中

$$S_{i0} = -\mu S_n$$

而边界条件(2.2f)及(2.2h)、(2.2i)为

$$S_i \in \beta_i(u_i), \quad \beta_i(u_i) = \partial j_i(u_i)$$

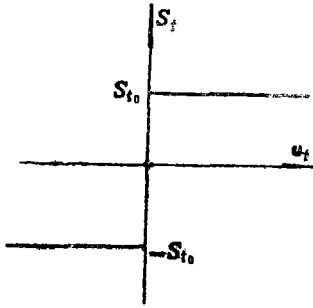


图 4

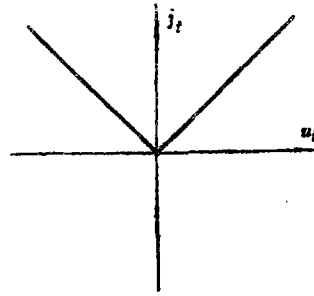


图 5

其变分不等式为

$$j_t(v_t) - j_t(u_t) \geq S_t(v_t - u_t) \quad \forall v_t \in R \tag{3.6}$$

设 $u_t = u_t^+ - u_t^-$, $u_t^+ \geq 0$, $u_t^- \geq 0$ (3.7)

于是分别有变分不等式

$$\left. \begin{aligned} j_t(v_t) - j_t(u_t^+) &\geq S_t(v_t - u_t^+) \\ u_t^+ &\geq 0, \quad \forall v_t \in R \text{ 且 } v_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.8a}$$

及

$$\left. \begin{aligned} j_t(-v_t) - j_t(-u_t^-) &\geq -S_t(v_t - u_t^-) \\ u_t^- &\geq 0, \quad \forall v_t \in R \text{ 且 } v_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.8b}$$

亦可以写为

$$\left. \begin{aligned} S_{t_0}(v_t - u_t^+) &\geq S_t(v_t - u_t^+) \\ u_t^+ &\geq 0, \quad \forall v_t \in R \text{ 且 } v_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.9a}$$

及

$$\left. \begin{aligned} S_{t_0}(v_t - u_t^-) &\geq -S_t(v_t - u_t^-) \\ u_t^- &\geq 0, \quad \forall v_t \in R \text{ 且 } v_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.9b}$$

考虑到

$$S_{t_0} - S_t \geq 0, \quad S_{t_0} + S_t \geq 0 \tag{3.10}$$

由(3.9a)及(3.9b)容易得到

$$(S_{t_0} - S_t)u_t^+ = 0, \quad (S_{t_0} + S_t)u_t^- = 0, \quad u_t^+ \geq 0, \quad u_t^- \geq 0 \tag{3.11}$$

四、数值计算

对边界积分方程(2.3)在局部坐标下进行边界元离散, 然后凝聚到边界 $\Gamma_t^{(k)}$ ($k=1, 2$) 上, 可以写为

$$A^{(k)}U^{(k)} + B^{(k)}S^{(k)} = F^{(k)} \tag{4.1}$$

把(2.1)写成节点列向量形式

$$U = \begin{Bmatrix} U_n \\ U_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} U_n^{(1)} \\ U_t^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} U_n^{(2)} \\ U_t^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

$$S = \begin{Bmatrix} S_n \\ S_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_n^{(k)} \\ S_t^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (k=1, 2) \tag{4.3}$$

利用(4.2), (4.3)可以消去(4.1)式中 $U^{(k)}$, $S^{(k)}$ ($k=1, 2$), 然后经整理可得如下形式的方程

$$\begin{Bmatrix} S_n \\ S_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{tn} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ U_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_n \\ P_t \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

设

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ -\mu I & -I \\ -\mu I & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_n \\ S_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_n \\ T_t^+ \\ T_t^- \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

显然 $T_{nt} \geq 0, T_t^+ \geq 0, T_t^- \geq 0$

再由(3.7)式得

$$\begin{Bmatrix} U_n \\ U_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ U_t^+ \\ U_t^- \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

由(3.4)及(3.11)得

$$\begin{cases} T_{nt}U_{nt} = 0, T_t^+U_t^+ = 0, T_t^-U_t^- = 0 \\ T_{nt} \geq 0, T_t^+ \geq 0, T_t^- \geq 0 \\ U_{nt} \geq 0, U_t^+ \geq 0, U_t^- \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

由(4.4)~(4.7)可以得到线性互补问题为

求 $T_n, T_t^+, T_t^-, U_n, U_t^+, U_t^- \in R^m$ 使满足

$$\begin{Bmatrix} T_n \\ T_t^+ \\ T_t^- \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} & -C_{nt} \\ \mu C_{nn} + C_{tn} & \mu C_{nt} + C_{tt} & -\mu C_{nt} - C_{tt} \\ \mu C_{nn} - C_{tn} & \mu C_{nt} - C_{tt} & -\mu C_{nt} + C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ U_t^+ \\ U_t^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_n \\ -\mu P_n - P_t \\ -\mu P_n + P_t \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$T_{nt} \geq 0, T_t^+ \geq 0, T_t^- \geq 0, U_{nt} \geq 0, U_t^+ \geq 0, U_t^- \geq 0$$

$$T_{nt}U_{nt} = 0, T_t^+U_t^+ = 0, T_t^-U_t^- = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

式中 $P_n, P_t \in R^m$, m 为可能接触点的“节点对”数。

解出线性互补问题(4.8)以后, 最终接触压力, 摩擦剪力 $S = \{S_n, S_t\}^T$ 及相对位移 $U = \{U_n, U_t\}^T$ 均可以通过(4.5), (4.6)式求出。

五、算 例

一弹性滚轴放在弹性基础上, 设滚轴和基础具有相同的弹性模量 E 和泊桑比 ν , 如图6所示。其边界元划分如图7所示。可能接触点取13对。

给定 $Q = 5.172 \text{ N/mm}$, $R = 10.0 \text{ mm}$, $E_1 = E_2 = 4000 \text{ N/mm}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 。

在输入不同摩擦系数 μ 时, 皆发生11对节点接触。接触长度 $b = 0.35 \text{ mm}$ 。

当 $\mu = 0$ 时, 其计算结果与Hertz理论解相比较见图8, 本文方法以B、E、C表示, 吻合相当不错。

对摩擦系数 μ 取不同值时, 切向摩擦面力 S_t 分布 (在 Γ_0 上) 见图9~图11。可以看出具

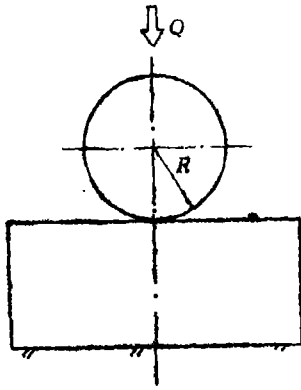


图 6

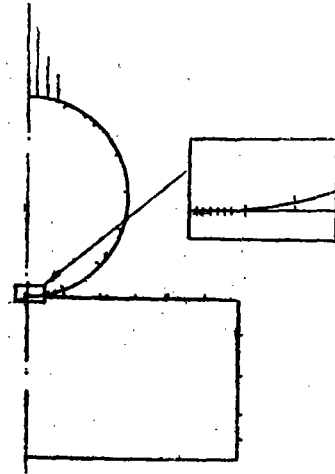
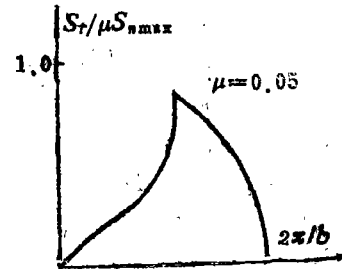
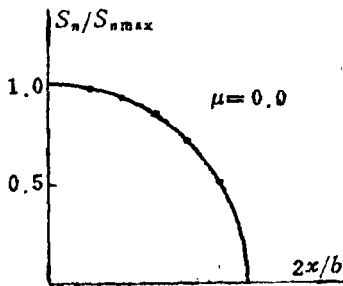


图 7



— Hertz: $S_{nmax} = 19.2 \text{ N/mm}^2, b = 0.349 \text{ mm}$
 · B. E. C: $S_{nmax} = 19.5 \text{ N/mm}^2, b = 0.35 \text{ mm}$

图 8

图 9

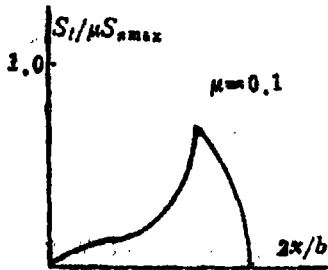


图 10

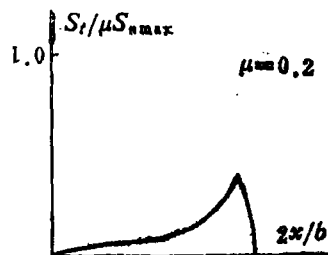
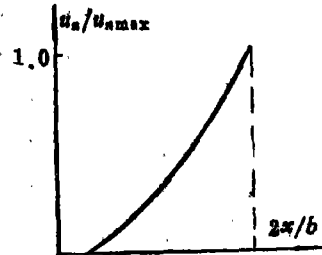
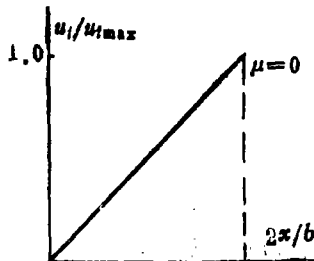


图 11



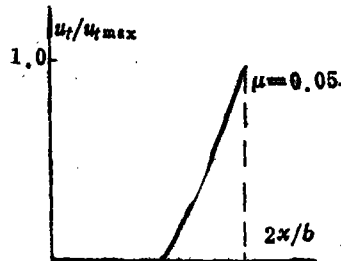
$u_{nmax} = 1.52 \times 10^{-3} \text{ mm}$

图 12



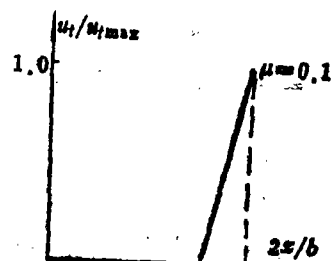
$u_{tmax} = 7.64 \times 10^{-5} \text{ mm}$

图 13



$u_{tmax} = 4.71 \times 10^{-5} \text{ mm}$

图 14



$u_{tmax} = 3.64 \times 10^{-5} \text{ mm}$

图 15

有一个尖点, 在尖点内侧($0 \leq x \leq x_p b/2$) S_i 单调增加, 而且 $|S_i| < \mu |S_n|$, 即当 $|x| < x_p b/2$ 时没有发生滑动, 而尖点外侧($x_p b/2 < x \leq b/2$) S_i 单调减少, 且 $|S_i| = \mu |S_n|$, 即当 $x_p b/2 < |x| \leq b/2$ 时发生摩擦滑动。随着 μ 的增加尖点向外移动。

对不同摩擦系数 μ , 法向相对位移量 $u_n = u_n^{(1)} + u_n^{(2)}$, 几乎完全相同, 其分布见图 12。

对不同摩擦系数 μ , 切向相对位移量 $u_t = u_t^{(1)} + u_t^{(2)}$, 几乎成线性分布, 与 x 轴的交点随 μ 的增加逐渐向右移动。当 $\mu = 0$ 时, 直线经过原点, 即接触中心。 $u_t = 0$ 区间没有发生滑动。 $u_t > 0$ 的直线部分表示相对滑动。

参 考 文 献

- [1] 钟万勰, 弹性接触问题的势能原理及其算法, 计算结构力学及其应用, 1 (1985), 21—29.
- [2] 钟万勰, 弹性接触问题的变分原理及其参数二次规划求解, 计算结构力学及其应用, 2 (1985), 2—9.
- [3] 崔俊芝, 具有初始间隙的弹性接触问题, 力学学报, 3 (1980), 261—268.
- [4] 汪骏书, 边界元法在线弹性接触问题中的应用, 东北工学院学报, 3 (1985), 11—16.
- [5] 陆山, 边界元法和数学规划技术求解弹塑性接触问题, 航空学报, 6, 6 (1985), 548—555.
- [6] Duvaut, G. and J. L. Lions 著, 王耀东译, 《力学和物理中的变分不等方程》, 科学出版社 (1987).
- [7] Panagiotopoulos, P. D., *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser Boston Inc. (1985).
- [8] Brebbia, C. A., *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 1, Pentech Press Ltd (1981).

Formulation of Boundary Element-Linear Complementary Equation for the Frictional Elastic Contact Problems

Sha De-song Sun Huan-chun Xu Shou-ze
(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of
Technology, Dalian)

Abstract

Boundary element-linear complementary equations are formulated to solve elastic contact problems with Coulomb frictions. It is also a new attempt to solve free boundary problems in solid mechanics by means of boundary element-mathematical programming techniques.

Key words: frictional contact, linear complementary, variational inequality, boundary element