应用数学和力学，第12卷第4期（1991年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性地基上自由边矩形薄板几个问题的注记*

谈骏渝

（重庆大学应用数学系，1989年11月23日收到）

摘　要

对于弹性地基上自由边矩形薄板的弯曲、稳定和振动问题，本文选择了一个挠曲函数，它能精确满足自由边全部边界条件以及自由角点的条件。应用能量变分原理，给出了确定挠曲函数中待定参数的方程，以及稳定性方程和频率方程，给出了求最小临界力和最小固有频率的一般公式。

关键词　弯曲　挠曲函数　稳定性　振动　临界力　频率

一、前　　言

对于弹性地基上的自由边矩形板的弯曲、稳定及振动问题 B. З. Власов[1]，E. C. Кононенко[2]，以及张福范[3]等都曾进行了研究，但所给出的方法都比较繁杂。文[4]的讨论虽比较简单，但放松了自由边弯矩为零的条件（见本文末），而且其主要结论也只是对方板的一种情形进行了讨论。本文所给出的挠曲函数能精确满足全部自由边界条件及自由角点条件。对于一般矩形板，我们给出了问题的一般公式，且论证了板上的总荷载和地基上的总反力是相平衡的。因而方法是简明可靠的。最后，我们还对方板$a=b$，$\mu=0.167$的情形给出了具体结果。

二、问题及挠曲函数

设有一弹性地基上的矩形薄板，中面区域为$\Omega=\{x, y\,|\,0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ 板的四边自由，即边界条件为

在$x=0$，a边上，有

$$w_{xx}+\mu w_{yy}=0 \tag{2.1}$$

* 杨绪灿推荐。

$$w_{xxx}+(2-\mu)w_{xyy}=0 \tag{2.2}$$

在$y=0$，b边上，有

$$w_{yy}+\mu w_{xx}=0 \tag{2.3}$$

$$w_{yyy}+(2-\mu)w_{yxx}=0 \tag{2.4}$$

在四个角点上

$$w_{xy}=0 \tag{2.5}$$

我们选取如下挠曲函数

$$w=f_1\cos\frac{2\pi}{a}x+f_2\cos\frac{2\pi}{b}y+f_3\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{2\pi}{b}y$$
$$+f_4x(x-a)+f_5y(y-b)f_6 \tag{2.6}$$

其中a，b分别表示薄板沿x轴和y轴的长度，系数$f_1\sim f_6$是待定的参数。不难验证，函数(2.6)满足条件(2.2)、(2.4)和(2.5)，将函数(2.6)代入式(2.1)和(2.3)中，便得到

$$\left.\begin{aligned} &f_1=-\left(\mu+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{f_3}{\mu},\quad f_2=-\left(\mu+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{f_3}{\mu} \\ &f_4=-\frac{2\pi^2}{\mu b^2}f_3,\qquad f_5=-\frac{2\pi^2}{\mu a^2}f_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

或写成

$$f_1=\beta_1 f_3,\quad f_2=\beta_2 f_3,\quad f_4=\beta_4\frac{\pi^2}{b^2}f_3,\quad f_5=\beta_5\frac{\pi^2}{a^2}f_3 \tag{2.8}$$

这样挠曲函数(2.6)便可表示为

$$w=f_3\left[\beta_1\cos\frac{2\pi}{a}x+\beta_2\cos\frac{2\pi}{b}y+\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{2\pi}{b}y\right.$$
$$\left.+\beta_4\frac{\pi^2}{b^2}x(x-a)+\beta_5\frac{\pi^2}{a^2}y(y-b)\right]+f_6 \tag{2.9}$$

于是挠曲函数(2.9)满足全部条件(2.1)～(2.5)且只有两个独立参数f_3，f_6。

三、弯 曲 问 题

若板受外荷载作用，其形变势能为

$$U=\frac{D}{2}\iint[w_{xx}^2+w_{yy}^2+2\mu w_{xx}w_{yy}+2(1-\mu)w_{xy}^2]dxdy+\frac{K}{2}\iint w^2dxdy \tag{3.1}$$

D是板的弯曲刚度，K为弹性地基的系数，二重积分的区域为Ω。又外力作用的势能为

$$W=\iint pw(x,y)dxdy \tag{3.2}$$

对于均布荷载作用的情形

$$W=p\iint wdxdy=-\frac{pab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_3+pabf_6 \tag{3.3}$$

对于在板中心有集中力作用的情形

$$W=Pw\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)=P\left(-\beta_1-\beta_2+1-\frac{\beta_4\pi^2}{4}\lambda^2-\frac{\beta_5\pi^2}{4\lambda^2}\right)f_3+Pf_6 \tag{3.4}$$

其中$\lambda=a/b$。根据能量变分原理，在板处于稳定平衡状态时，总势能$\Pi=U-W$应为最小，即$\delta\Pi=0$，于是对两个独立参数进行变分，便得含参数f_3，f_6的代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&Af_3-\frac{Kab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_6=B\\&-\frac{Kab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_3+Kabf_6=C\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

其中

$$B=\begin{cases}-\dfrac{ab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\dfrac{\beta_5}{\lambda^2}\right)p & \text{均布荷载作用的情形}\\ \left(-\beta_1-\beta_2+1-\dfrac{\beta_4\pi^2}{4}\lambda^2-\dfrac{\beta_5\pi^2}{4\lambda^2}\right)P & \text{集中力作用的情形}\end{cases}\tag{3.6}$$

$$C=\begin{cases}pab & \text{均布荷载作用的情形}\\ P & \text{集中力作用的情形}\end{cases}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}A=&\frac{2D\pi^4}{a^2\lambda}\left[4(\beta_1^2+\lambda^4\beta_2^2)+2(1+\lambda^2)^2+2\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)\right.\\&\left.+\mu\beta_4\beta_5\lambda^2\right]+K\left[\frac{1}{2}\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi^4}{30}\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)\right.\\&\left.+\beta_1\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_2\beta_5}{\lambda^2}+\frac{\beta_4\beta_5\pi^4}{18}\right]ab\end{aligned}\tag{3.8}$$

于是由式(3.5)可求得f_3，f_6进而可求得挠度和内力。

注意到式(3.5)的第二个方程，其地基反力

$$R_f=K\iint w\,dx\,dy=-\frac{Kab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_3+Kabf_6=\begin{cases}pab\\P\end{cases}\tag{3.9}$$

因此，对于矩形板的一般情形，地基总反力和全部外荷载总是相平衡的。

四、稳定性及振动问题

（1） 已知弹性地基上的自由边矩形板在边界上沿x和y轴方向分别受有均匀分布压力p_x和p_y，则外力的势能为

$$W=\frac{1}{2}\iint(p_xw_x^2+p_yw_y^2)\,dx\,dy\tag{4.1}$$

若设$p_y=\gamma^0p_x$，γ^0为临界力参数，则有

$$\begin{aligned}W=&\frac{p_xf_3^2}{2}\left\{\frac{2\pi^2}{\lambda}\left(\beta_1^2+\frac{1}{2}\right)+\lambda\beta_4\left(\frac{1}{3}\lambda^2\beta_4+4\beta_1\right)\right.\\&\left.+\gamma^0\left[\frac{2\pi^2}{\lambda}\left(\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)+\lambda\beta_5\left(\frac{1}{3}\lambda^2\beta_5+4\beta_2\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}p_xIf_3^2\end{aligned}\tag{4.2}$$

同前，进行变分可得含参数f_3，f_6的代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&A_1f_3-\frac{Kab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_6=0\\&-\frac{Kab\pi^2}{6}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_3+Kabf_6=0\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

其中$A_1=A-p_xI$。为使方程组有非零解，系数引列式应等于零，可得

$$A-p_xI-\frac{Kab\pi^4}{36}(\beta_4\lambda^2+\beta_5/\lambda^2)^2=0 \tag{4.4}$$

即得最小的临界荷载

$$\begin{aligned}(p_{cr})_{\min}&=\frac{1}{I}\left[A-\frac{Kab\pi^4}{36}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{I}\left\{\frac{2D\pi^4}{a^2\lambda}[4(\beta_1^2+\lambda^4\beta_2^2)+2(1+\lambda^2)^2\right.\\&\quad+2(\beta_4^2\lambda^4+\beta_5^2)+\mu\beta_4\beta_5\lambda^2]+K\left[\frac{1}{2}\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{\pi^4}{180}\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)+\beta_1\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_2\beta_5}{\lambda^2}\right]\right\}>0\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}I=\pi^2&\left\{\frac{2}{\lambda}\left(\beta_1^2+\frac{1}{2}\right)+\lambda\beta_4\left(\frac{1}{3}\lambda^2\pi^2\beta_4+4\beta_1\right)\right.\\&\left.+\gamma^0\left[\frac{2}{\lambda}\left(\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)+\lambda\beta_5\left(\frac{1}{3}\lambda^2\pi^2\beta_5+4\beta_2\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.6}$$

（2） 已知薄板具有分布质量

$$W_k=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\gamma h}{g}\iint w^2dxdy \tag{4.7}$$

其中ω为薄板自由振动的固有频率，γ和g分别为板材料的比重及重力加速度. 将式(2.9)代入上式，有

$$\begin{aligned}W_k=\frac{ab\omega^2\gamma h}{2g}&\left\{\left[\frac{\beta_1^2}{2}+\frac{\beta_2^2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\pi^4}{30}\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)+\beta_1\beta_4\lambda^2\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{\beta_2\beta_5}{\lambda^2}+\frac{\pi^4}{18}\beta_4\beta_5\right]f_3^2+f_6^2-\frac{\pi^2}{3}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_3f_6\right\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

以W_k代替W，并进行变分，则有

$$\left.\begin{aligned}&A_2f_3-\frac{ab\pi^2}{6}\left(K-\omega^2\frac{\gamma h}{g}\right)\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)f_6=0\\&-\frac{ab\pi^2}{6}\left(K-\omega^2\frac{\gamma h}{g}\right)\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)+\left(K-\omega^2\frac{\gamma h}{g}\right)abf_6=0\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned}A_2=A-\frac{\omega^2\gamma h}{g}abJ=A-\frac{\omega^2\gamma h}{g}ab&\left[\frac{\beta_1^2}{2}+\frac{\beta_2^2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\pi^4}{30}\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)\right.\\&\left.+\beta_1\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_2\beta_5}{\lambda^2}+\frac{\pi^4}{18}\beta_4\beta_5\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

为求f_3，f_6的非零解，可得频率方程

$$A-\frac{\omega^2\gamma hab}{g}J-\frac{ab\pi^4}{36}\left(K-\frac{\omega^2\gamma h}{g}\right)\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)^2=0 \tag{4.11}$$

于是可求得薄板自由振动的最小固有频率

$$\omega_{\min}=\left\{\frac{A-(abK\pi^4/36)(\beta_4\lambda^2+\beta_5/\lambda^2)^2}{J-(\pi^4/36)(\beta_4\lambda^2+\beta_5/\lambda^2)^2}\cdot\frac{g}{\gamma hab}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&A-\frac{abK\pi^4}{36}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)^2=\frac{2D\pi^4}{a^2\lambda}\Big[4(\beta_1^2+\lambda^4\beta_2^2)+2(1+\lambda^2)^2\\&\quad+2\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)+\mu\beta_4\beta_5\lambda^2\Big]+K\Big[\frac{1}{2}\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\frac{1}{2}\right)\\&\quad+\frac{\pi^4}{180}\left(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\right)+\beta_1\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_2\beta_5}{\lambda^2}\Big]ab\\&J-\frac{\pi^4}{36}\left(\beta_4\lambda^2+\frac{\beta_5}{\lambda^2}\right)^2=\frac{\beta_1^2}{2}+\frac{\beta_2^2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\pi^4}{180}\Big(\beta_4^2\lambda^4+\frac{\beta_5^2}{\lambda^4}\\&\quad+6\beta_1\beta_4\lambda^2+\frac{6\beta_2\beta_5}{\lambda^2}\Big)\end{aligned}\right\}\tag{4.13}$$

五、举　　例

设有一集中力作用在板中心的弹性地基上的正方形薄板，$a=b$，$\mu=0.167$，$\lambda=a/b=1$，且取$Ka^4/D=10^4$。

由式(2.8)算得

$$\beta_1=\beta_2=-6.98802,\quad \beta_4=\beta_5=-11.97605 \tag{5.1}$$

（1） 由式(3.6)～(3.8)，有

$$1943.4280f_3+39.39956f_6=74.07538Pa^2/D,\quad 39.39956f_3+f_6=10^{-4}Pa^2/D \tag{5.2}$$

于是可求得

$$f_3=0.08866\times10^{-4}Pa^2/D,\quad f_6=-2.49323\times10^{-4}Pa^2/D$$

由式(2.9)可算得板中心的最大挠度

$$w(a/2,\ a/2)=4.07440\times10^{-4}Pa^2/D \tag{5.3}$$

不难验证反力$R_f=P$。

（2） 设$P_x=P_y$，$\gamma^0=1$，由式(4.4)或(4.5)可求得最小临界荷载

$$(P_{cr})_{\min}=\frac{391.10310}{17869.3120}Ka^2=\frac{391.10310}{17869.3126}\times10^4\frac{D}{a^2}=218.868\frac{D}{a^2} \tag{5.4}$$

若方形薄板只受单向均匀压力，即只有$p_x=p$，而$p_y=0$，从而$\gamma^0=0$，于是可求得最小临界荷载

$$(p_{cr})_{\min}=437.736D/a^2 \tag{5.5}$$

（3） 由式(4.11)或(4.12)可求得最小固有频率。

$$\omega_{\min}=\left\{\frac{391.10310}{374.69269}\cdot\frac{Kg}{\gamma h}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{10522.216\frac{gD}{\gamma ha^4}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=1.02570\times10^2\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \tag{5.6}$$

（4） 其次，按照文[4]，我们能算得在自由边上和在中心的弯距为

$$M_x|_{x=0,a}=M_y|_{y=0,b}=-24.45913\times10^{-4}P \tag{5.7}$$

$$M_x(a/2,a/2)=M_y(a/2,a/2)=96.947036\times10^{-4}P \tag{5.8}$$

显然，在自由边的弯距不等于零且与(5.8)的比率的绝对值是0.25229，因此不是小量。

又按本文，我们能算得

$$M_x|_{x=0,a}=0,\quad M_y|_{y=0,b}=0$$

$$M_x(a/2,a/2)=M_y(a/2,a/2)=57.08753\times10^{-4}P \tag{5.9}$$

那么(5.8)与(5.9)的比率是1.69822，即(5.8)比(5.9)偏大接近70%。

由于按文[4]，在自由边上弯距不为零且为负，因此算得的结果是中心最大挠度，最小临界荷载是偏大的，而固有频率偏小。

六、结　语

由本文的讨论，所给的挠曲函数满足全部边界及角点条件，且地基的总反力与全部外荷载相平衡，因而本文的方法及结果是可靠的，而且方法简便，可用以求弹性地基上自由边矩形薄板弯曲、稳定和振动等问题的近似解。

参 考 文 献

[1] Власов В. З. и Н. Н. Леонтьев, *Балки, Плиты и Оболочки на Упругом Основании*, Гос. Изд., М. (1960).

[2] Кононенко Е. С., О приближенном расчете прямоугольных плит на упругом основании, *Исследования по Теории Сооружений, Сборник Статей*, 9, 11 (1960).

[3] 张福范，《弹性薄板》（第二版），科学出版社 (1984), 237—249.

[4] 成祥生，弹性地基上自由边矩形板的弯曲、稳定和振动，应用数学和力学，9, 6 (1988), 529—533.

Remarks of Some Problems for Rectangular Thin Plates with Free Edges on Elastic Foundations

Tan Jun-yu

(*Chongqing University, Chongqing*

Abstract

For the bending, stability and vibrations of rectangular thin plates with free edges on elastic foundations, in this paper we give a flexural function which exactly satisfies not only all the boundary conditions on free edges but also the conditions at free corner points. Applying energy variation principle, we give equations defining parameters in flexural function, stability equation, frequency equation, and general formulae of minimum critical force and minimum eigenfrequency as well.

Key words bending, flexual function, stability, vibration, critical force, frequency