应用数学和力学，第12卷第4期（1991年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Menger空间上局部压缩映象的不动点定理*

方 锦 暄

（南京师范大学数学系，1990年1月3日收到）

摘 要

本文引进ε-可链的PM-空间的概念，并给出这类空间上单值和多值局部压缩映象的几个不动点定理。

关键词 概率度量空间 Menger空间 ε-可链的 局部压缩映象 不动点

一、引 言

在[1]中，Sehgal和Bharucha-Reid证明了(ε,λ)-可链的PM-空间上单值局部压缩映象的不动点定理。后来，Cain, Jr.和Kasriel 在[2]中将这一定理作了重要推广。但是，[1]、[2]中给出的定理，对t-范数$\varDelta$的限制条件太强，都要求$\varDelta$满足：$\varDelta(t, t)\geqslant t$。容易证明，满足这一条件的$t$-范数只要一个，即$\varDelta=\min$。因此，这些结果有较大的局限性。本文引进$\varepsilon$-可链的PM-空间的概念，它是$(\varepsilon, \lambda)$-可链的PM-空间定义的加强。在这类空间中，我们在只要求t-范数$\varDelta$满足：$\sup\limits_{0<t<1}\varDelta(t, t)=1$的条件下，给出单值和多值局部压缩映象的几个不动点定理，它们是通常度量空间上局部压缩映象不动点定理[3,4]的推广。

二、预 备 知 识

以下，我们记$R=(-\infty, \infty)$，$R^+=[0, \infty)$，Z^+表示全体正整数的集合。$\mathscr{D}$表示R上一切（左连续）的分布函数成的集合。概率度量空间（简称PM-空间），Menger 概率度量空间（简称Menger空间）的定义，记号及有关术语参见文[5]或[6]。

Schweizer, Sklar和Thorp[9]指出：设$(X, F, \varDelta)$为Menger 空间，如果t-范数$\varDelta$满足：$\sup\limits_{0<t<1}\varDelta(t, t)=1$，则$(X, F, \varDelta)$是Hausdorff 拓扑空间，以

$$\mathscr{U}_p=\{U_p(\varepsilon, \lambda):\varepsilon>0, \lambda\in(0, 1)\}$$

为点$p\in X$的邻域基，其中

$$U_p(\varepsilon, \lambda)=\{q\in X:F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

---

* 张石生推荐。

记上述拓扑为$\mathscr{T}$，称为(X, F, Δ)的(ε, λ)-拓扑．因此按(ε, λ)-拓扑$\mathscr{T}$，在(X, F, Δ)中可引进一系列概念，如$\mathscr{T}$-收敛，$\mathscr{T}$-Cauchy列，$\mathscr{T}$-完备等．

下文中，若不作特别说明，均假设t-范数Δ满足$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t, t)=1$．

命题1 设(X, F, Δ)是Menger空间，δ为$(0, 1]$中的一个定数，对每一$\lambda\in(0, \delta)$，定义$d_\lambda: X\times X\to R^+$如下：

$$d_\lambda(x, y)=\inf\{t>0: F_{x,y}(t)>1-\lambda\} \tag{2.1}$$

则$\{d_\lambda:\lambda\in(0, \delta)\}$具有以下性质：

（1） $d_\lambda(x, y)<t$ 当且仅当$F_{x,y}(t)>1-\lambda$；

（2） $d_\lambda(x, y)=0$，$\forall\lambda\in(0, \delta)$当且仅当$x=y$；

（3） $d_\lambda(x, y)=d_\lambda(y, x)$；

（4） 若$\lambda, \mu\in(0, \delta)$，$\mu<\lambda$则$d_\lambda(x, y)\leqslant d_\mu(x, y)$，$\forall x, y\in X$；

（5） 对任何$\lambda\in(0, \delta)$，存在$\mu\in(0, \lambda]$，使得

$$d_\lambda(x, z)\leqslant d_\mu(x, y)+d_\mu(y, z), \qquad \forall x, y, z\in X \tag{2.2}$$

我们称由(2.1)式定义的$\{d_\lambda:\lambda\in(0, \delta)\}$为由 Menger 空间$(X, F, \Delta)$导出的$X$上的$L$-伪度量族．

注1 由(4)，(5)可将广义三角不等式，即(2.2)式推广为：

（6） 对任何$n\in Z^+$及$\lambda\in(0, \delta)$，存在$\mu\in(0, \lambda]$使得

$$d_\lambda(x_1, x_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}d_\mu(x_i, x_{i+1}) \tag{2.2'}$$

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$为X中任意n个点．

命题2 设$\{d_\lambda:\lambda\in(0, \delta)\}$为$(X, F, \Delta)$导出的$L$-伪度量族，$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，则

(i) $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x\Longleftrightarrow F_{x_n,x}(t)\to1, \quad \forall t>0\Longleftrightarrow d_\lambda(x_n, x)\to0, \quad \forall\lambda\in(0, \delta)$；

(ii) $\{x_n\}$是$\mathscr{T}$-Cauchy列

$\Longleftrightarrow F_{x_n,x_m}(t)\to1 \quad (n, m\to\infty), \ \forall t>0$

$\Longleftrightarrow d_\lambda(x_n,x_m)\to0 \quad (n, m\to\infty), \ \forall\lambda\in(0, \delta)$.

定义1 设(X, F, Δ)是 Menger空间，$A\subset X$，$x\in X$．x与集A间的概率距离$F_{x,A}$定义为：

$$F_{x,A}(t)=\sup_{y\in A}F_{x,y}(t), \qquad \forall t\in R$$

记$CB(X)$为X中一切非空$\mathscr{T}$-闭、概率有界的集合族，定义$\tilde{F}: CB(X)\times CB(X)\to\mathscr{D}$如下（我们用$\tilde{F}_{A,B}$来表示$\tilde{F}(A,B)$）：

$$\tilde{F}_{A,B}(t)=\sup_{s<t}\Delta\Big(\inf_{a\in A}\sup_{b\in B}F_{a,b}(s), \ \inf_{b\in B}\sup_{a\in A}F_{a,b}(s)\Big)$$

$$\forall A, B\in CB(X), \ t\in R$$

我们称$\tilde{F}_{A,B}$为由F诱出的A，B间的Menger-Hausdorff 距离[7]．

注2 [7]中将$F_{x,A}$定义为

$$F_{x,A}(t)=\sup_{s<t}\sup_{y\in A}F_{x,y}(s), \quad \forall t\geqslant0$$

不难证明：

$$\sup_{s<t}\sup_{y\in A}F_{x,y}(s)=\sup_{y\in A}F_{x,y}(t)$$

因此本文中$F_{x,A}$的定义与[7]中是一致的。

于是，据[7]中命题1.3，有

命题3 设(X, F, Δ)为 Menger 空间，$A\subset X$，x，$y\in X$，则

(i) $F_{x,A}(t)=1$，$\forall t>0$当且仅当$x\in\bar{A}$；

(ii) $F_{x,A}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1), F_{y,A}(t_2))$，$\forall t_1, t_2>0$；

(iii) 对任何A，$B\in CB(X)$及$x\in A$，有

$$F_{x,B}(t)\geqslant\tilde{F}_{A,B}(t),\quad\forall t\geqslant 0$$

命题4[10] 设(X, F, Δ)为Menegr 空间，A，$B\in CB(X)$，对每一$\lambda\in(0, 1)$，定义

$$D_\lambda(A, B)=\inf\{t>0:\tilde{F}_{A,B}(t)>1-\lambda\}$$

则

(i) $D_\lambda(A, B)<t$当且仅当$\tilde{F}_{A,B}(t)>1-\lambda$；

(ii) 对任一$\lambda\in(0, 1)$，有

$$d_\lambda(x, B)\leqslant D_\lambda(A, B),\qquad\forall x\in A$$

其中
$$d_\lambda(x, B)=\inf_{y\in B}d_\lambda(x, y)$$

定义2 设(X, F)为PM-空间，$\varepsilon>0$是给定的正数，若对任何x，$y\in X$，存在X中的有限点组：$x=x_0$，x_1，…，$x_n=y$，使得

$$F_{x_{i-1},x_i}(\varepsilon)=1\qquad(i=1, 2, \cdots, n)$$

则称(X, F)是ε-可链的。

定义3 称函数$\Phi(t):R^+\to R^+$满足条件(Φ)，如果$\Phi(t)$严格增，且$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi^n(t)$收敛，$\forall t>0$。其中$\Phi^n(t)$是$\Phi(t)$的第$n$次迭代。

命题5 若函数$\Phi(t):R^+\to R^+$满足条件(Φ)，则$\Phi(t)<t$，$\forall t>0$，且$\Phi(0)=0$。

证 由文[11]的引理即得。

三、多值局部压缩映象的不动点定理

定理1 设(X, F, Δ)是ε-可链的$(\varepsilon>0)$、$\mathscr{T}$-完备的Menger空间，映象$T:X\to CB(X)$满足以下条件：

(i) 对任一数$\beta>1$和任何x，$y\in X$，$u\in Tx$，存在$v\in Ty$使

$$F_{u,v}(\beta t)\geqslant\tilde{F}_{Tx,Ty}(t),\qquad\forall t\in R^+\tag{3.1}$$

(ii) 存在满足条件(Φ)的右连续函数$\Phi(t)$及$\alpha\in(0, 1)$，使得当$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$时，有

$$\tilde{F}_{Tx,Ty}(\Phi(t))\geqslant F_{x,y}(t)\tag{3.2}$$

则T有不动点，即存在$x_*\in X$，使$x_*\in Tx_*$。

证 我们首先证明：由(3.1)式可推得

$$d_\lambda(u, v)\leqslant\beta D_\lambda(Tx, Ty),\qquad\forall\lambda\in(0, 1)\tag{3.1$'$}$$

以及由(3.2)式可推得，当$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$时，

$$D_\lambda(Tx, Ty)\leqslant\Phi(d_\lambda(x, y)),\qquad\forall\lambda\in(0, \alpha]\tag{3.2$'$}$$

设 $D_\lambda(Tx, Ty)=t$，则$\forall s>t$，由命题4得$\tilde{F}_{Tx,Ty}(s)>1-\lambda$，从而由(3.1)式得

$F_{u,v}(\beta s)>1-\lambda$. 故由命题1得$d_\lambda(u, v)<\beta s$. 由$s$的任意性即得(3.1)$'$式.

设$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$, $d_\lambda(x,y)=t$, $\lambda\in(0, a]$, 则$\forall s>t$, 由命题1得$F_{x,y}(s)>1-\lambda\geqslant 1-a$. 从而由条件(ii)得$\tilde{F}_{Tx,Ty}(\Phi(s))>1-\lambda$. 由命题4, 我们有$D_\lambda(Tx, Ty)<\Phi(s)$. 据$\Phi(t)$的右连续性, 令$s\to t$, 即得(3.2)$'$式.

任取$x_0^{(0)}\in X$, $x_1^{(0)}\in Tx_0^{(0)}$, 因(X, F, Δ)是ε-可链的, 所以存在X的有限点组: $x_0^{(0)}$, $x_0^{(1)}$, $\cdots$, $x_0^{(n)}=x_1^{(0)}$, 使$F_{x_0^{(i-1)},x_0^{(i)}}(\varepsilon)=1$, $i=1, 2, \cdots, n$.

任取$\varepsilon_0>\varepsilon, \varepsilon_n\in(\varepsilon,\varepsilon_0), \varepsilon_n\nearrow\varepsilon_0$. 因为$F_{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}}(\varepsilon)=1$, 所以$d_\lambda(x_0^{(0)}, x_0^{(1)})<\varepsilon$, $\forall\lambda\in(0,1)$. 记$d_0(x_0^{(0)}, x_0^{(1)})=\sup\limits_{\lambda\in(0,1)} d_\lambda(x_0^{(0)}, x_0^{(1)})$, 显然$d_0(x_0^{(0)}, x_0^{(1)})\leqslant\varepsilon<\varepsilon_1$. 于是$\Phi(d_0(x_0^{(0)},x_0^{(1)}))<\Phi(\varepsilon_1)$. 取$\delta_1>0$使

$$\frac{\Phi(\varepsilon_1)}{\Phi(d_0(x_0^{(0)}, x_0^{(1)}))+\delta_1}>1$$

由条件(i)及(3.1)$'$式知, 对$x_1^{(0)}\in Tx_0^{(0)}$, 存在$x_1^{(1)}\in Tx_0^{(1)}$, 使

$$d_\lambda(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})\leqslant\frac{\Phi(\varepsilon_1)}{\Phi(d_0(x_0^{(0)}, x_0^{(1)}))+\delta_1}\cdot D_\lambda(Tx_0^{(0)}, Tx_0^{(1)})$$

再由(3.2)$'$式, 并注意到$\Phi(d_\lambda(x_0^{(0)}, x_0^{(1)}))\leqslant\Phi(d_0(x_0^{(0)}, x_0^{(1)}))$, 即得

$$d_\lambda(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})<\Phi(\varepsilon_1), \qquad \forall\lambda\in(0, a]$$

类似地, 由$F_{x_0^{(1)},x_0^{(2)}}(\varepsilon)=1$及$x_1^{(1)}\in Tx_0^{(1)}$知, 存在$x_1^{(2)}\in Tx_0^{(2)}$, 使

$$d_\lambda(x_1^{(1)}, x_1^{(2)})<\Phi(\varepsilon_1), \qquad \forall\lambda\in(0, a]$$

如此下去, 可得X的有限点组: $x_1^{(0)}$, $x_1^{(1)}$, $\cdots$, $x_1^{(n)}=x_2^{(0)}$满足$x_1^{(i)}\in Tx_0^{(i)}$, 且

$$d_\lambda(x_1^{(i-1)}, x_1^{(i)})<\Phi(\varepsilon_1), \qquad (i=1, 2, \cdots, n)\ \forall\lambda\in(0, a]$$

因$d_\lambda(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})<\Phi(\varepsilon_1)$, $\forall\lambda\in(0, a]$, 所以

$$d_0(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})=\sup_{\lambda\in(0,a]} d_\lambda(x_1^{(0)}, x_1^{(1)})\leqslant\Phi(\varepsilon_1)<\Phi(\varepsilon_2)$$

于是$\Phi(d_0(x_1^{(0)},x_1^{(1)}))<\Phi^2(\varepsilon_2)$, 取$\delta_2>0$使

$$\frac{\Phi^2(\varepsilon_2)}{\Phi(d_0(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}))+\delta_2}>1$$

对$x_2^{(0)}\in Tx_1^{(0)}$, 由(3.1)$'$及(3.2)$'$式知, 存在$x_2^{(1)}\in Tx_1^{(1)}$, 使

$$d_\lambda(x_2^{(0)}, x_2^{(1)})\leqslant\frac{\Phi^2(\varepsilon_2)}{\Phi(d_0(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}))+\delta_2}\cdot D_\lambda(Tx_1^{(0)}, Tx_1^{(1)})$$

$$\leqslant\frac{\Phi^2(\varepsilon_2)}{\Phi(d_0(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}))+\delta_2}\cdot\Phi(d_\lambda(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}))<\Phi^2(\varepsilon_2) \qquad \forall\lambda\in(0, a]$$

仿此下去, 可得X的有限点组: $x_2^{(0)}$, $x_2^{(1)}$, $\cdots$, $x_2^{(n)}=x_3^{(0)}$, 满足$x_2^{(i)}\in Tx_1^{(i)}$且

$$d_\lambda(x_2^{(i-1)},\ x_2^{(i)})<\Phi^2(\varepsilon_2)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\ \ \forall\lambda\in(0,\ \alpha]$$

用数学归纳法不难证明，对任何自然数m，存在X的有限点组：$x_m^{(0)}$，$x_m^{(1)}$，…，$x_m^{(n)}=x_{m+1}^{(0)}$，满足 $x_m^{(i)}\in Tx_{m-1}^{(i)}$，且

$$d_\lambda(x_m^{(i-1)},\ x_m^{(i)})<\Phi^m(\varepsilon_m)<\Phi^m(\varepsilon_0)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\quad\forall\lambda\in(0,\ \alpha]$$

现证 $\{x_m^{(0)}\}_{m=1}^{\infty}$ 是X中的$\mathscr{T}$-Cauchy 列。

对任何i，$j\in Z^+$，$i<j$及任何$\lambda\in(0,\ \alpha]$，由注1知，存在$\mu\in(0,\ \lambda]$使得

$$d_\lambda(x_i^{(0)},\ x_j^{(0)})\leqslant\sum_{m=i}^{j-1}d_\mu(x_m^{(0)},\ x_{m+1}^{(0)})$$

同理，对上述的μ，存在$\nu\in(0,\ \mu]$使

$$d_\mu(x_m^{(0)},\ x_{m+1}^{(0)})=d_\mu(x_m^{(0)},\ x_m^{(n)})$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}d_\nu(x_m^{(i-1)},\ x_m^{(i)})<n\Phi^m(\varepsilon_0)$$

于是

$$d_\lambda(x_i^{(0)},\ x_j^{(0)})\leqslant n\sum_{m=i}^{j-1}\Phi^m(\varepsilon_0),\qquad\forall\lambda\in(0,\ \alpha]$$

注意到级数$\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^m(\varepsilon_0)$收敛，在上式中令$i\to\infty$，即得$d_\lambda(x_i^{(0)},\ x_j^{(0)})\to0$，$\forall\lambda\in(0,\ \alpha]$。由命题 2 知$\{x_m^{(0)}\}_{m=1}^{\infty}$是$\mathscr{T}$-Cauchy列。因$(X,\ F,\ \Delta)$是$\mathscr{T}$-完备的，所以存在 $x_*\in X$ 使 $x_m^{(0)}\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$。

最后证明x_*是T的不动点，即 $x_*\in Tx_*$。

因 $x_m^{(0)}\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$，所以$F_{x_m^{(0)},x_*}(t)\to1$，$\forall t>0$。故对任何$t>0$，存在$N\in Z^+$，当 $m>N$ 时，有$F_{x_m^{(0)},x_*}(\varepsilon)\neq0$，且$F_{x_m^{(0)},x_*}(t)>1-\alpha$。于是，由条件 (ii)得

$$\tilde{F}_{Tx_m^{(0)},Tx_*}(\Phi(t))\geqslant F_{x_m^{(0)},x_*}(t)\to1\quad(m\to\infty),\ \ \forall t>0$$

注意到$\Phi(t)<t$，故有

$$\tilde{F}_{Tx_m^{(0)},Tx_*}(t)\to1\qquad(m\to\infty),\ \ \forall t>0$$

因 $x_m^{(0)}=x_{m-1}^{(n)}\in Tx_{m-2}^{(n)}=Tx_{m-1}^{(0)}$，由命题 3 得

$$F_{x_*,Tx_*}(t)\geqslant\Delta(F_{x_*,x_m^{(0)}}(t/2),\ F_{x_m^{(0)},Tx_*}(t/2))$$

$$\geqslant\Delta(F_{x_*,x_m^{(0)}}(t/2),\tilde{F}_{Tx_{m-1}^{(0)},Tx_*}(t/2))\tag{3.3}$$

在(3.3)右边令$m\to\infty$，注意到$\Delta(t,\ t)$在$t=1$处连续，因t-范数Δ满足$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,\ t)=1$，

我们得$F_{x_*,Tx_*}(t)=1$，$\forall t>0$。由命题3即知$x_*\in Tx_*$，这便完成了证明。

在定理1中令$\Phi(t)=kt$，$0<k<1$，我们得下述推论。

推论1 设(X, F, Δ)是ε-可链的，$\mathscr{T}$-完备的Menger空间，映象$T:X\to CB(X)$满足定理1的条件(i)及下述条件：

(ii)′ 存在正数$k<1$及$\alpha\in(0, 1)$，使得当$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$时，有

$$\tilde{F}_{Tx,Ty}(kt)\geqslant F_{x,y}(t) \tag{3.4}$$

则T有不动点。

下面利用定理1来证明度量空间上多值局部压缩映象的不动点定理。

设ε是一正数，我们称度量空间(X, d)是ε-可链的，如果对任意两点x，$y\in X$，存在X中的有限点组：$x=x_0$，x_1，…，$x_n=y$，使得$d(x_{i-1}, x_i)<\varepsilon$，$i=1, 2, \cdots, n$。

引理1 设(X, d)是度量空间，定义映象$F:X\times X\to\mathscr{D}$如下（我们用$F_{x,y}$表示$F(x, y)$）：

$$F_{x,y}(t)=H(t-d(x, y)), \qquad \forall x, y\in X \tag{3.5}$$

取$\Delta=\min$，则(X, F, Δ)是Menger空间，且X上由度量d确定的拓扑$\mathscr{T}_d$与(X, F, Δ)的(ε, λ)-拓扑$\mathscr{T}$是一致的。我们称(X, F, Δ)为由(X, d)导出的Menegr空间。

证 由[1]中定理3知，$(X, F, \min)$是Menger空间。由(3.5)式易知，对任何$\varepsilon>0$及$\lambda\in(0, 1)$，

$$d(x, y)<\varepsilon\Longleftrightarrow F_{x,y}(\varepsilon)=1\Longleftrightarrow F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda$$

因此$\mathscr{T}_d$与$\mathscr{T}$是一致的。

引理2 设(X, F, Δ)是度量空间(X, d)导出的Menger空间，则

(i) (X, d)完备当且仅当$(X, F, \Delta)\ \mathscr{T}$-完备；

(ii) A是(X, d)中的有界闭集当且仅当A是(X, F, Δ)中的概率有界的$\mathscr{T}$-闭集。

因此，(X, d)中一切非空有界闭集族也可以用$CB(X)$来表示。

引理3 设(X,F,Δ)是度量空间(X, d)导出的Menger空间，则对任何A，$B\in CB(X)$

$$\tilde{F}_{A,B}(t)=H(t-D(A, B)) \tag{3.6}$$

其中$D(A, B)=\inf\{r:A\subset S(B, r)$，且$B\subset S(A, r)\}$为$A$，$B$间的Hausdorff度量，$S(A, r)=\{x\in X:d(x, A)<r\}$。

证 由(3.5)式易证：

$$A\subset S(B, r)\Longleftrightarrow \inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(r)=1\Longleftrightarrow \inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(r)>0$$

据此可证，若$D(A, B)<t$，则

$$\tilde{F}_{A,B}(t)=\sup_{s<t}\min\{\inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(s),\ \inf_{x\in B}\sup_{y\in A}F_{x,y}(s)\}=1$$

若$D(A, B)\geqslant t$，则可证$\tilde{F}_{A,B}(t)=0$。若不然（设$\tilde{F}_{A,B}(t)>0$），必存在$r\in(0, t)$，使

$$\inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(r)>0 \text{ 且 } \inf_{x\in B}\sup_{y\in A}F_{x,y}(r)>0$$

从而$D(A, B)\leqslant r<t$，矛盾。(3.6)式得证。

定理2 设(X, d)是ε-可链的、完备的度量空间，映象$T:X\to CB(X)$满足下述条件：存在满足条件(Φ)的右连续函数$\Phi(t)$，使得

$$D(Tx, Ty)\leqslant\Phi(d(x, y)), \qquad \text{当}d(x, y)<\varepsilon\text{时} \tag{3.7}$$

则T有不动点。

证 设$(X, F, \min)$为(X, d)导出的Menger空间，因(X, d)是ε-可链的、完备的度量空间，由引理2及(3.5)式易知，$(X, F, \min)$是ε-可链的，$\mathscr{T}$-完备的 Menger 空间。下面只需证明T满足定理1的条件(i)和(ii)。

(i) 对任一正数$\beta>1$和任何$x, y\in X$，$u\in Tx$，由Nadler引理[12]知，存在$v\in Ty$使

$$d(u, v)\leqslant \beta D(Tx, Ty)$$

据此可证(3.1)式。事实上，不妨设$\tilde{F}_{Tx,Ty}(t)>0$，由(3.6)我们有$D(Tx, Ty)<t$，从而$d(u, v)<\beta t$，由(3.5)式得$F_{u,v}(\beta t)=1$。故$F_{u,v}(\beta t)\geqslant \tilde{F}_{Tx,Ty}(t)$。

(ii) 设$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$。由(3.5)式易知$d(x, y)<\varepsilon$且$d(x, y)<t$，从而

$$D(Tx, Ty)\leqslant \Phi(d(x, y))<\Phi(t)$$

由(3.6)式即得$\tilde{F}_{Tx,Ty}(\Phi(t))=1\geqslant F_{x,y}(t)$。

定理1的条件都满足，因此T有不动点。

注3 [4]中定理1，[8]中定理5.4.5均为定理2的特例。

四、单值局部压缩映象的不动点定理

定理3 设(X, F, Δ)是ε-可链的、$\mathscr{T}$-完备的 Menger 空间，映象$T: X\to X$满足以下条件：存在$\delta\in(0, 1)$，对每一$\alpha\in(0, \delta)$有相应的满足条件(Φ)的函数$\Phi_\alpha(t)$，使得当$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$时有

$$F_{Tx,Ty}(\Phi_\alpha(t))\geqslant F_{x,y}(t) \tag{4.1}$$

则T在X中有唯一的不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，$T^n x_0 \xrightarrow{\mathscr{T}} x_*$。

证 对任一$x_0\in X$，不妨设$Tx_0\neq x_0$，因为(X, F, Δ)是ε-可链的，所以存在X中的有限点组：$x_0, x_1, \cdots, x_n=Tx_0$，使$F_{x_{i-1}, x_i}(\varepsilon)=1$，$i=1, 2, \cdots, n$。从而由定理条件知，

$$F_{Tx_{i-1}Tx_i}(\Phi_\alpha(\varepsilon))=1 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)\ \forall\alpha\in(0, \delta)$$

用数学归纳法易证，对任何$m\in Z^+$，

$$F_{T^m x_{i-1}, T^m x_i}(\Phi_\alpha^m(t))=1 \qquad (i=1, 2, \cdots, n),\ \forall\alpha\in(0, \delta)$$

从而，由命题1得

$$d_\alpha(T^m x_{i-1}T^m x_i)<\Phi_\alpha^m(t) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)\quad \forall\alpha\in(0, \delta)$$

记$z_m=T^m x_0 (m=1, 2, \cdots)$，对任何$i, j\in Z^+$，$i<j$，对任何$\alpha\in(0, \delta)$，由注1，存在$\lambda\in(0, \alpha]$使得

$$d_\alpha(z_i, z_j)\leqslant \sum_{m=i}^{j-1} d_\lambda(z_m, z_{m+1})$$

对上述的λ，存在$\mu\in(0, \lambda]$，使

$$d_\lambda(z_m, z_{m+1})=d_\lambda(T^m x_0, T^m x_n)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} d_\mu(T^m x_{i-1}, T^m x_i)<n\Phi_\mu^m(\varepsilon)$$

于是

$$d_\alpha(z_i, z_j)<n\sum_{m=i}^{j-1}\Phi_\beta^m(\varepsilon), \qquad \forall\alpha\in(0, \delta)$$

注意到级数$\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_\beta^m(\varepsilon)$收敛，故有$d_\alpha(z_i, z_j)\to 0(i\to\infty)$，$\forall\alpha\in(0, \delta)$。由命题 2 知 $\{z_m\}$ 是 $\mathscr{T}$-Cauchy列。因(X, F, Δ)是$\mathscr{T}$-完备的，故$z_m \xrightarrow{\mathscr{T}} x_*\in X$。

现在证明 x_*是T的不动点。

由$z_m \xrightarrow{\mathscr{T}} x_*$知，对任何$t>0$及$\alpha\in(0, \delta)$，当$m$充分大时，$F_{z_m,x_*}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{z_m,x_*}(t)>1-\alpha$，从而由定理条件得

$$F_{Tz_m,Tx_*}(\Phi_\alpha(t))\geqslant F_{z_m,x_*}(t)$$

由于 $\Phi_\alpha(t)<t$及 $F_{z_m,x_*}(t)\to 1(m\to\infty)$，故有

$$F_{Tz_m,Tx_*}(t)\to 1 \ (m\to\infty), \qquad \forall t>0$$

注意$\Delta(t, t)$在$t=1$处连续，所以

$$F_{x_*,Tx_*}(t)\geqslant\Delta(F_{x_*,z_m}(t/2), F_{z_m,Tx_*}(t/2))\to 1 \quad (m\to\infty)$$

即知$Tx_*=x_*$，x_*是T的不动点。

最后证唯一性。设另有$y_*\in X$，$Ty_*=y_*$。若$x_*\neq y_*$，因(X, F, Δ)是ε-可链的，故存在X中的有限点组：$x_*=y_0$，y_1，…，$y_p=y_*$，使$F_{y_{i-1},y_i}(\varepsilon)=1$，$i=1, 2, \cdots, p$。由(4.1)式，对任何$m\in Z^+$，有

$$F_{T^my_{i-1},T^my_i}(\Phi_\alpha^m(\varepsilon))=1 \qquad (i=1, 2, \cdots, p) \ \forall\alpha\in(0, \delta)$$

从而

$$d_\alpha(T^my_{i-1}, T^my_i)<\Phi_\alpha^m(\varepsilon) \qquad (i=1, 2, \cdots, p) \quad \forall\alpha\in(0, \delta)$$

对任一$\alpha\in(0, \delta)$，存在$\lambda\in(0, \alpha]$使

$$\begin{aligned}d_\alpha(x_*, y_*)&=d_\alpha(T^mx_*, T^my_*)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{p}d_\lambda(T^my_{i-1}T^my_i)<\sum_{i=1}^{p}\Phi_\lambda^m(\varepsilon)\to 0 \quad (m\to\infty)\end{aligned}$$

故$d_\alpha(x_*, y_*)=0$，$\forall\alpha\in(0, \delta)$。从而 $x_*=y_*$，矛盾！因此T的不动点是唯一的。

推论2 设(X, F, Δ)是ε-可链的、$\mathscr{T}$-完备的 Menger 空间，T是X上的自映象，若存在$\delta\in(0, 1)$，对每个$\alpha\in(0, \delta)$有相应的正数$k_\alpha\in(0,1)$使得当$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$时，有

$$F_{Tx,Ty}(k_\alpha t)\geqslant F_{x,y}(t) \tag{4.2}$$

则T在X中有唯一的不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，$T^nx_0 \xrightarrow{\mathscr{T}} x_*$。

定理4 设(X, d)是ε-可链的、完备的度量空间，T是X上的自映象，若存在满足条件(Φ)的函数$\Phi(t)$，使得

$$d(Tx, Ty)\leqslant\Phi(d(x,y)), \qquad 当d(x, y)<\varepsilon时 \tag{4.3}$$

则T在X中有唯一不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，$T^nx_0 \xrightarrow{d} x_*$。

证 设$(X, F, \min)$为(X, d)导出的 Menger 空间，则$(X, F, \min)$是ε-可链的且$\mathscr{T}$-完备的。任取$\delta\in(0, 1)$，对任一$\alpha\in(0, \delta)$，令$\Phi_\alpha(t)=\Phi(t)$。设$F_{x,y}(\varepsilon)\neq 0$且$F_{x,y}(t)>1-\alpha$。由(3.5)式知，$d(x, y)<\varepsilon$且$d(x, y)<t$。于是，由(4.3)式得

$$d(Tx, Ty)\leqslant\Phi_\alpha(d(x, y))<\Phi_\alpha(t)$$

故有$F_{Tx,Ty}(\Phi_\alpha(t))=1\geqslant F_{x,y}(t)$，定理3的条件都满足，因此定理得证。

注4 [3]中给出的局部压缩映象的不动点定理是定理4的特例。

参 考 文 献

[1] Sehgal, V. M. and A. T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces, *Math. Systems Theory*, **6** (1972), 97—102.

[2] Cain, G. L., Jr.and R. H. Kasriel, Fixed and periodic points of local contraction mappings on probabilistic metric spaces, ibid., **9** (1975), 289—297.

[3] Edelstein, M., An extension of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 7—10.

[4] Kuhfittig, Peter K. F., Fixed points of locally contractive and nonexpansive set-valued mappings, *Pacific J. Math.*, **65**, 2 (1976), 399—403.

[5] Menger, K., Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **28** (1942), 535—537.

[6] Zhang Shi-sheng, Fixed point theorems of mappings on probabilistic metric spaces with applications, *Scientia Sinica* (Series A), **26**, 11 (1983), 1144—1155.

[7] Zhang Shi-sheng, On the theory of probabilistic metric spaces with applications, *Acta Math. Sinica*, New Series, 1,4 (1985), 366—377.

[8] 张石生,《不动点理论及应用》, 重庆出版社 (1984).

[9] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 673—675.

[10] 方锦暄, Menger 空间上多值映象的不动点定理, 南京师大学报(自然科学版), 11, 4 (1988), 1—6.

[11] 方锦暄, 概率度量空间中ϕ-压缩映象的不动点定理, 新疆大学学报(自然科学版), 5, 3 (1988), 21—28.

[12] Nadler, S. B., Multi-valued contraction mapping, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 475—487.

Fixed Point Theorems of Local Contraction Mappings on Menger Spaces

Fang Jin-xuan

(*Depatment of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, we introduce the concept of ε-chainable PM-space, and give several fixed point theorems of one-valued and multivalued local contraction mappings on the kind of spaces.

Key words probabilistic metric space, Menger space, ε-chainable, local contraction mapping, fixed point