

# 正交各向异性椭圆板的弹性失稳\*

程昌钧 宁建国

(兰州大学) (太原工业大学)

(薛大为推荐, 1990年4月26日收到)

## 摘 要

本文以 von Kármán 型方程为基础并利用一般分支理论讨论了正交各向异性椭圆板在面内边缘均布压力作用下的弹性失稳, 利用 Liapunov-Schmidt 过程证明了单特征值处分支解的存在性并利用小摄动展开得到了分支解的渐近表达式, 最后利用有限单元法计算了正交各向异性椭圆板的临界载荷并进行了板的过屈曲分析, 还考察了材料和几何参数对稳定性的影响。

**关键词:** 正交各向异性 椭圆板 弹性稳定性 临界载荷 摄动解 过屈曲性态

## 一、引 言

迄今, 已有一些工作<sup>[1~8]</sup>计算了各向同性椭圆板的临界载荷, 但作者尚未见到有关椭圆板的过屈曲分析的文章。本文以 von Kármán 型方程作为问题的控制方程, 但其中包含了更多的参数, 所以研究椭圆板的屈曲和过屈曲实际上是研究一个带多参数的非线性算子方程的分支解。本文利用 Sobolev 空间的知识 and Liapunov-Schmidt 过程, 证明了单特征值  $\lambda^*$  处分支解的存在性, 并利用小摄动展开得到了分支解的渐近表达式。我们看到, 在单特征值  $\lambda^*$  附近, 分支解是从特征值的右侧分叉出去的。利用这些表达式可以分析椭圆板的过屈曲行为。我们看到, 问题最后归结为求解一系列线性边值问题。利用有限单元法逐次求解这些边值问题, 可以得到椭圆板的临界载荷、过屈曲性态。文中最后还给出了屈曲椭圆板的挠度、弯矩和薄膜力随坐标  $x, y$  的变化曲线, 并考察了材料和几何参数对临界载荷和过屈曲性态的影响。

## 二、问题的数学描述

考察厚为  $h$ , 长短半轴分别为  $a, b$  的正交各向异性椭圆板, 设材料常数为  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$  和  $G$  并满足  $E_1/E_2 = \nu_1/\nu_2$ 。若设椭圆板的边界在横向是夹紧的并受面内均匀压力  $p$  的作用, 引入无量纲变量和参数

\* 国家教委博士点基金资助项目。

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi/b, \quad y = \eta/b, \quad l = a/b, \quad c = [12(1 - \nu_1 \nu_2)]^{1/2} \\ t^2 &= 2G/E_2, \quad \lambda = c^2 b^2 p/E_2 h^2 > 0, \quad \beta = 2(1/t^2 - \nu_1/k^2) \\ w &= cW/h, \quad f = c^2 \bar{F}/E_2 h^3, \quad k^2 = E_1/E_2 = \nu_1/\nu_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

则无量纲形式的控制方程为

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w = [f, w] \quad (2.2a)$$

在  $\Omega$  内

$$\tilde{\Delta}^2 f = -[w, w]/2; \quad (2.2b)$$

$$w = \partial w / \partial n = 0, \quad f = \partial f / \partial n = 0, \quad \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \quad (2.3a, b)$$

式中,  $\bar{F} = F - [-(p/2)(\xi^2 + \eta^2)]$ ,  $F, W$  为应力函数和挠度,  $\Omega = \{(x, y) | x^2/l^2 + y^2 \leq 1\}$ ,

$\partial \Omega$  是它的边界, 并且  $\tilde{\Delta}^2(\cdot), \tilde{\Delta}^2(\cdot), [f, w]$  定义为

$$\tilde{\Delta}^2 w \equiv k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left[ k^2 \nu_1 + t^2 \left( 1 - \frac{\nu_1^2}{k^2} \right) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$\tilde{\Delta}^2 f \equiv \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \left( \frac{1}{t^2} - \frac{\nu_1}{k^2} \right) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

$$[f, w] \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(2.2)~(2.3)便是我们要求的基本问题。今后为了分析的需要设  $\beta > 0$ 。显然对任何的  $\lambda$ ,  $(f, w, \lambda) = (0, 0, \lambda)$  是(2.2)~(2.3)的平凡解。

令集合  $M \equiv \{\varphi | \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \varphi|_{\partial \Omega} = \partial \varphi / \partial n|_{\partial \Omega} = 0\}$ , 并令  $X$  为  $M$  在 Sobolev 空间  $H_2(\Omega)$  中的闭包, 于是  $X$  是一个 Hilbert 空间。由 Sobolev 嵌入定理<sup>[7]</sup>, 当  $\varphi \in X$  时, 必有  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ , 并满足条件  $\varphi|_{\partial \Omega} = \partial \varphi / \partial n|_{\partial \Omega} = 0$ 。根据[7]和 Hölder 不等式, 我们不难证明引理1。

**引理1** 存在常数  $N_1, N_2$  和  $N_3, N_4$ , 使得对任意的  $\varphi \in X$ , 有

$$\left. \begin{aligned} N_1 \|\varphi\|_{2,2}^2 &\leq \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 \varphi) \cdot \varphi dx dy \leq N_2 \|\varphi\|_{2,2}^2 \\ N_3 \|\varphi\|_{2,2}^2 &\leq \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 \varphi) \cdot \varphi dx dy \leq N_4 \|\varphi\|_{2,2}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中  $\|\cdot\|_{2,2}$  为  $H_2(\Omega)$  中的范数。

根据引理1, 我们可在  $X$  中引入两个等价内积

$$\left. \begin{aligned} (u, v)_{\langle 1 \rangle} &\equiv \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 u) \cdot v dx dy = \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 v) \cdot u dx dy \\ (u, v)_{\langle 2 \rangle} &\equiv \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 u) \cdot v dx dy = \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 v) \cdot u dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

利用内积的定义, 容易证明(2.2)和(2.3)的古典解  $(f, w)$  必满足

$$\left. \begin{aligned} (w, \varphi)_{\langle 1 \rangle} &= \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 w) \cdot \varphi dx dy = b_1(f, w; \varphi) + \lambda b_2(w; \varphi) \\ (f, \psi)_{\langle 2 \rangle} &= \iint_{\Omega} (\tilde{\Delta}^2 f) \cdot \psi dx dy = -\frac{1}{2} b_1(w, w; \psi) \end{aligned} \right\} \quad \forall \varphi, \psi \in X \quad (2.6)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} b_1(u, v; \varphi) &\equiv \iint_{\Omega} \{ (u_x v_y - u_y v_x) \varphi_x + (u_x v_x - u_{xx} v_y) \varphi_y \} dx dy \\ b_2(w; \varphi) &\equiv \iint_{\Omega} (w_x \varphi_x + w_y \varphi_y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

若一对函数  $(f, w) \in X \times X$ , 对一切的  $\varphi, \psi \in X$  满足(2.6)式, 则称  $(f, w)$  为(2.2)~(2.3)的广义解. 因此看到古典解必满足(2.6), 因而是广义解, 反之也能证明<sup>[4, 5]</sup>广义解亦是古典解.

利用 Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式以及 Reisz 表现定理, 我们可将(2.6)进一步化成如下算子方程

$$w - \lambda L(w) - B_1(f, w) = 0, \quad f = -B_2(w, w)/2 \quad (2.8)$$

或等价地有

$$w - \lambda L(w) + C(w) = 0 \quad (2.9)$$

式中  $C(w) = (1/2)B_1(B_2(w, w), w): X \rightarrow X$  的齐三次算子, 而  $B_1(u, v), B_2(u, v)$  是  $X$  中的有界双线性算子,  $L(u)$  是  $X$  中的有界的自共轭全连续线性算子. 对于固定的  $u, v \in X$ , 它们由下式定义

$$\left. \begin{aligned} b_2(u; \varphi) &= (L(u), \varphi)_{\langle 1 \rangle} \\ b_1(u, v; \varphi) &= (B_1(u, v), \varphi)_{\langle 1 \rangle} \\ b_1(u, v; \varphi) &= (B_2(u, v), \varphi)_{\langle 2 \rangle} \end{aligned} \quad \forall \varphi \in X \right\} \quad (2.10)$$

关于(2.9)的详细推导及有关算子性质的证明可参考[4, 5].

### 三、线性化问题和特征值以及分支解

因为  $L$  是全连续自共轭线性算子, 因此根据一般分支理论, 使(2.9)的平凡解  $(w, \lambda) = (0, \lambda)$  发生分支的  $\lambda$  必使下面的算子方程

$$\bar{w} - \lambda L(\bar{w}) = 0 \quad (3.1)$$

有非零解, 等价的微分方程和边界条件为

$$\Delta^2 \bar{w} + \lambda \Delta \bar{w} = 0; \quad \bar{w} = \partial \bar{w} / \partial n = 0 \quad \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \quad (3.2)$$

因为(3.2)中的微分方程是椭圆型的, 所以当  $\lambda = 0$  时(3.2)只有零解, 因此  $\lambda = 0$  不是  $L$  的特征值. 利用反证法还可以证明, 对一切的  $\lambda: 0 < \lambda < \lambda_1$ , (2.9)只有零解, 其中  $\lambda_1$  为  $L$  的第一特征值.

现在设  $\lambda^* > 0$  是  $L$  的一个单特征值, 即  $X_1 = \text{null}(\lambda^* I - L) = \text{span}\{v_1\}$ , 并令  $X_2 = \text{rang}(\lambda^* I - L) = X_1^\perp$ , 因此  $X = X_1 \oplus X_2$ . 对任何的  $w \in X$ , 我们有  $w = (w, v_1)_{\langle 1 \rangle} v_1 + v$ , 其中  $v \in X_2$ . 将  $w$  的分解式代入(2.9), 并令  $Q: X \rightarrow X_1$  的正投影算子, 于是  $P \equiv I - Q: X \rightarrow X_2$  的正投影算子, 并得到

$$\left. \begin{aligned} F(v, \xi, \eta) &\equiv (I - \lambda^* L)v - \eta \lambda^* Lv + PC(\xi v_1 + v) = 0 \\ -\eta \xi + (C(\xi v_1 + v), v_1)_{\langle 1 \rangle} &= 0, \quad \eta = (\lambda - \lambda^*) / \lambda^* \end{aligned} \right\} \quad (3.3a, b, c)$$

式中,  $\xi = (w, v_1)_{\langle 1 \rangle}$ . 注意到  $F(0, 0, 0) = 0$ ,  $F'_v(0, 0, 0) = I - \lambda^* L: X_2 \rightarrow X_2$  的线性同胚, 所以由隐函数定理知, 在  $(v, \xi, \eta) = (0, 0, 0)$  的邻域内, 由  $F(v, \xi, \eta) = 0$  可唯一地解出  $v = v(\xi, \eta)$ , 当  $|\xi| \leq \xi^0, |\eta| \leq \eta^0$  时, 将  $v(\xi, \eta)$  代入(3.3b), 得到一维分支方程

$$-\eta \xi + (C(\xi v_1 + v(\xi, \eta)), v_1)_{\langle 1 \rangle} = 0 \quad (3.4)$$

因为  $v_2(0,0)=0$ ,  $v(0,\eta)=0$ , 故  $v(\xi,\eta)\equiv\xi\bar{v}(\xi,\eta)$  且  $\bar{v}(0,0)=0$ , 从而(3.4)可写成

$$\bar{f}(\xi,\eta)\equiv-\eta+\xi^2(C(\bar{v}(\xi,\eta)+v_1), v_1)_{\Omega} = 0 \quad (3.4)'$$

并且  $\bar{f}(0,0)=0$ ,  $\bar{f}'_{\eta}(0,0)=-1$ . 因而由(3.4)'可唯一地解出  $\eta=\eta(\xi)$ ,  $|\xi|\leq\xi^0$ , 且  $\eta'(0)=0$ ,  $\eta''(0)=2(C(v_1), v_1)_{\Omega} > 0$ .

这样我们已证明了下面的分支定理.

**定理** 若  $\lambda^*$  是  $L$  的单特征值, 则(2.9)的平凡解  $(w,\lambda)=(0,\lambda)$  在  $\lambda^*$  处必发生分支, 且分支解有形式

$$\left. \begin{aligned} w &= \xi v_1 + v(\xi, \eta(\xi)) = \xi v_1 + O(|\xi|^3) \\ f &= -B_2(w, w)/2 = -\xi^2 B_2(v_1, v_1)/2 + O(|\xi|^5) \quad |\xi| \leq \xi^0 \\ \lambda(\xi) &= \lambda^* + \lambda^* \eta(\xi) = \lambda^* + (1/2)(C(v_1), v_1)_{\Omega} \lambda^* \xi^2 + O(|\xi|^3) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

注意到  $\eta(0)=\eta'(0)=0$ ,  $\eta''(0)>0$ , 所以  $\lambda(\xi) > \lambda^*$  当  $|\xi| \leq \xi^0$  时, 这表示在  $(0, \lambda^*)$  邻域内, (2.9)的非平凡解支是从  $\lambda^*$  的右侧分叉出去的.

在现们我寻求  $\lambda = \lambda^*$  附近分支解的渐近表达式. 设将  $w, f, \lambda$  展成  $\epsilon$  的幂级数

$$\left. \begin{aligned} w &= \epsilon \bar{w} + \epsilon^2 w_{11} + \epsilon^3 w_{12} + O(\epsilon^4) \\ f &= \epsilon^2 f_{11} + \epsilon^3 f_{12} + O(\epsilon^4) \\ \lambda &= \lambda^* + \epsilon \lambda_{11} + \epsilon^2 \lambda_{12} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中  $\lambda^*$  为  $L$  的单特征值,  $\bar{w}$  为相应的特征向量,  $\epsilon$  为小参数, 定义为

$$\epsilon = \frac{\iint_{\Omega} w \bar{w} dx dy}{\iint_{\Omega} \bar{w}^2 dx dy} \quad (3.7)$$

将(3.6)代入(2.2)、(2.3)和(3.7)并比较  $\epsilon$  的同次幂的系数, 我们得到关于  $w_{11}, w_{12}, f_{11}, f_{12}$  以及  $\lambda_{11}, \lambda_{12}$  满足的线性方程和条件, 逐次求解这些线性边值问题得到

$$w_{11} = f_{12} \equiv 0, \quad \lambda_{11} = 0 \quad (3.8)$$

而  $f_{11}, w_{12}$  和  $\lambda_{12}$  满足如下方程和条件

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 f_{11} &= -[w, \bar{w}]/2, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ f_{11} &= \partial f_{11} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 w_{12} + \lambda^* \Delta w_{12} + \lambda_{12} \Delta \bar{w} &= [w, f_{11}], & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ w_{12} &= \partial w_{12} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3.10a, b)$$

$$\iint_{\Omega} w_{12} \bar{w} dx dy = 0 \quad (3.11)$$

用  $\bar{w}$  乘(3.10a)的两端并在  $\Omega$  上积分, 得到

$$\lambda_{12} = \frac{\iint_{\Omega} [w, f_{11}] \bar{w} dx dy}{\iint_{\Omega} \Delta \bar{w} \cdot \bar{w} dx dy} \quad (3.12)$$

与(3.5)相比较可知  $\lambda_{12} > 0$ . 因此, 我们得到  $\lambda^*$  附近分支解的渐近表达式

$$\left. \begin{aligned} w(x, y; \epsilon) &= \epsilon \bar{w}(x, y) + \epsilon^3 w_{12}(x, y) + O(\epsilon^4) \\ f(x, y; \epsilon) &= \epsilon^2 f_{11}(x, y) + O(\epsilon^4) \\ \lambda(\epsilon) &= \lambda^* + \lambda_{12} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

#### 四、数值计算与结果

由表达式(3.13)我们看到在单特征值  $\lambda^*$  附近, 分析椭圆板的过屈曲行为归结为求解关于

特征值 $\lambda^*$ 和相应的边值问题(3.2), 求解 $f_{11}$ 的边值问题(3.9)以及 $w_{12}$ 的边值问题(3.10), 其中 $\lambda_{12}$ 由(3.12)计算. 下面, 我们用有限单元法逐次对上述边值问题进行计算.

1. 特征值和特征向量的计算 求 $\lambda$ 使(3.2)有非零解, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 w + \lambda \Delta w &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ w = \partial w / \partial n &= 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

容易得到与(4.1)相应的泛函 $\Pi_1$ 为

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T dx dy \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T dx dy \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $D$ 为弹性矩阵,

$$D = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = 2 \left[ k^2 \nu_1 + t^2 \left( 1 - \frac{\nu_1^2}{k^2} \right) \right] \quad (4.3)$$

我们将椭圆板作三角形单元剖分, 共划分成242个单元, 177个结点. 在每个结点 $i$ 上, 赋予一个函数值 $w_i$ 和两个一阶导数值 $(\partial w / \partial x)_i, (\partial w / \partial y)_i$ . 利用插值方法可得到由单元结点位移表示的形函数. 然后对泛函 $\Pi_1$ 离散, 得到 $\Pi_1 = \sum_i \Pi_i^e$ , 对 $\Pi_1$ 求极值得到结点位移满足的线代数方程组. 适当处理边界条件之后, 求此方程组的非零解, 这将导致求解其系数矩阵行列式 $J(\lambda) = 0$ 的函数方程. 求出此函数方程的最小正根, 即得到椭圆板的最小临界载荷 $\lambda^*$ . 将 $\lambda^*$ 再代入结点位移满足的代数方程组, 并利用特征向量 $w$ 满足的法化条件

$$\iint_{\Omega} w^2 dx dy = 1$$

即得到特征向量 $w$ 的数值解. 详细的推导过程可参考有关有限单元法的论著, 例如[9].

在某些给定的材料和几何参数下, 我们计算了正交各向异性椭圆板的前四个特征值并列于表1~3中.

表1 前四个特征值 (当 $k=1, \nu_1=0.3, \beta=2$ )

$l=a/b$	$\lambda_n$			
	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	$\lambda_3^*$	$\lambda_4^*$
1.0	14.37	25.80	25.80	39.22
1.2	12.17	19.76	23.50	30.49
1.25	11.84	18.78	23.18	28.83
1.5	10.73	15.39	22.05	22.67
2.0	9.699	12.19	16.59	20.93

表2 前四个特征值 (当 $k=1.5, \nu_1=0.3, \beta=2$ )

$l=a/b$	$\lambda_n$			
	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	$\lambda_3^*$	$\lambda_4^*$
1.0	20.05	28.52	42.98	45.34
1.2	15.64	25.19	31.16	39.97

表3 前四个特征值 (当 $k=1.5, \nu_1=0.3, \beta=1$ )

$l=a/b$	$\lambda_n$			
	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	$\lambda_3^*$	$\lambda_4^*$
1.0	23.43	34.18	49.79	51.47
1.2	18.37	29.53	36.77	45.80

在表1~3中,  $l=a/b$ 是椭圆板的长短半轴之比,  $l=1$ 时为圆板;  $k^2 = E_1/E_2 = \nu_1/\nu_2$ , 当 $k=1$ 时为各向同性材料;  $\beta = 2(1/t^2 - \nu_1/k^2) > 0$ 为材料参数之间必须满足的一个约束条件. 从表1看到, 各向同性圆板的最小特征值为14.37, 而精确值(由贝塞尔函数 $J_1(\lambda)$ 的第一个零点算得)为14.68, 误差为2.1%, 由表1~3, 我们还看到, 随着 $l=a/b$ 的增加, 最小特征

值 $\lambda_1^*$ 将减小,而且均低于圆板的最小特征值.这表示在同样的材料参数下,椭圆板比圆板更容易丧失稳定性.

2. 应力函数 $f_{11}$ 的计算  $f_{11}$ 满足边值问题(3.9),即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}^2 f_{11} &= -[\bar{w}, \bar{w}]/2, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ f_{11} &= \partial f_{11} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

令

$$P = [\bar{w}, \bar{w}]/2$$

则(4.4)化为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}^2 f_{11} + P &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ f_{11} &= \partial f_{11} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

与之相应的泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\Omega} [\tilde{\Delta}^2 f_{11} + 2P] f_{11} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x \partial y} \right] \bar{D} \left[ \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial x \partial y} \right]^T dx dy \\ &\quad + 2 \iint_{\Omega} P f_{11} dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中,  $\bar{D}$ 为与材料性质有关的矩阵,

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \beta = 2 \left( \frac{1}{t^2} - \frac{\nu_1}{k^2} \right)$$

采用与计算特征值和特征向量相同的三角形单元剖分.在每个结点 $i$ 上,赋予一个函数值 $(f_{11})_i$ 和两个一阶导数值 $(\partial f_{11} / \partial x)_i$ ,  $(\partial f_{11} / \partial y)_i$ .采用同样的插值函数和离散化过程,我们最后可以得到每个结点上的函数值 $(f_{11})_i$ 和两个一阶导数值 $(\partial f_{11} / \partial x)_i$ ,  $(\partial f_{11} / \partial y)_i$ 以及 $\lambda_{12}$ 的值.

3. 挠度函数 $w_{12}$ 的计算  $w_{12}$ 满足的边值问题为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}^2 w_{12} + \lambda^* w_{12} + \lambda_{12} \Delta \bar{w} &= [\bar{w}, f_{11}], & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ w_{12} &= \partial w_{12} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

同时还有约束条件

$$\iint_{\Omega} w_{12} \bar{w} dx dy = 0 \quad (4.8)$$

在(4.7)、(4.8)中,仅有 $w_{12}$ 是未知量,其余均为已知量.

令

$$Q = [\bar{w}, f_{11}] - \lambda_{12} \Delta \bar{w} \quad (4.9)$$

则(4.7)可写成

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}^2 w_{12} + \lambda^* \Delta w_{12} &= Q, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ w_{12} &= \partial w_{12} / \partial n = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

利用拉氏乘子法,引入乘子 $\alpha$ ,可以证明在条件(4.8)下;与(4.10)相应的泛函 $\Pi_3$ 为

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \tilde{\Delta}^2 w_{12} \cdot w_{12} dx dy + \frac{\lambda^*}{2} \iint_{\Omega} \Delta w_{12} \cdot w_{12} dx dy$$

$$-\iint_{\Omega} Q \cdot w_{12} dx dy + \alpha \iint_{\Omega} w_{12} \cdot \bar{w} dx dy \quad (4.11)$$

利用内积  $(u, v)_{\langle 2 \rangle}$  的定义, 上式可化成

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x \partial y} \right] D \left[ \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x \partial y} \right]^T dx dy \\ & - \frac{\lambda^*}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial w_{12}}{\partial x}, \frac{\partial w_{12}}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial w_{12}}{\partial x}, \frac{\partial w_{12}}{\partial y} \right]^T dx dy \\ & - \iint_{\Omega} Q w_{12} dx dy + \alpha \iint_{\Omega} w_{12} \bar{w} dx dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

仍然采用与前述相同的三角形单元剖分和离散化过程。我们可求得各结点  $i$  上的  $(w_{12})_i$ ,  $(\partial w_{12} / \partial x)_i$  和  $(\partial w_{12} / \partial y)_i$  值。

综上所述, 通过求解关于  $w$ ,  $\lambda^*$ ,  $f_{11}, \lambda_{12}$  以及  $w_{12}$  满足的三个线性边值问题, 我们已得到在特征值  $\lambda^*$  附近, 分支解的有限单元法的数值结果。表 4 中给出了不同几何参数和材料参数下, 最小特征值  $\lambda^*$  以及由 (3.12) 算得的  $\lambda_{12}$ 。

图 1~3 中给出了屈曲后的椭圆板在不同材料参数和几何参数时挠度沿坐标  $x$  和  $y$  的变化曲线。从这些图中可以看到参数对椭圆板的稳定性的影响。

表 4  $\lambda^*$  和  $\lambda_{12}$  的值 ( $\nu_1 = 0.3$ )

$l, k, \beta$			$\lambda^*$	$\lambda_{12}$
$l=1,$	$k=1,$	$\beta=2$	14.37	0.2450
$l=1.2,$	$k=1,$	$\beta=2$	12.17	0.2248
$l=1,$	$k=1.5,$	$\beta=3$	20.05	0.1968
$l=1.2,$	$k=1.5,$	$\beta=3$	15.64	0.2028
$l=1,$	$k=1.5,$	$\beta=1$	23.43	0.2317
$l=1.2,$	$k=1.5,$	$\beta=1$	18.37	0.2425

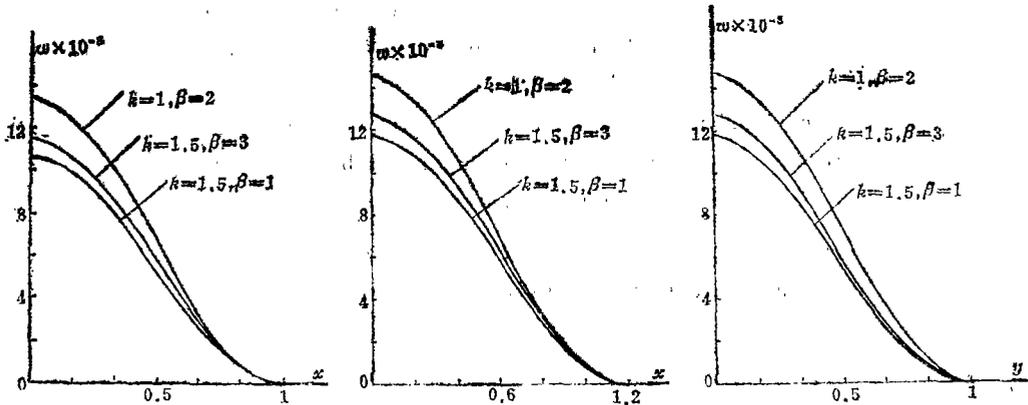


图 1 挠度  $w$  沿  $x$  轴的变化 ( $l=1$ ) 图 2 挠度  $w$  沿  $x$  轴的变化 ( $l=1.2$ ) 图 3 挠度  $w$  沿  $y$  轴的变化 ( $l=1.2$ )

参 考 文 献

[1] Voinovsky-Krieger, S., The stability of a clamped elliptic plate under uniform compression, *J. Appl. Mech.*, 4 (1937), 177.  
 [2] Shibaoka, Yoshiv., On the buckling of an elliptic plate with clamped edge I, *Journal of the Physical Society of Japan*, 11, 10 (1956), 1038.  
 [3] Shibaoka, Yoshiv., On the buckling of an elliptic plate with clamped edge II, *Journal of the Physical Society of Japan*, 12, 5 (1957), 529.  
 [4] Berger, M., On von Karman equation and the buckling of a thin elastic plate I, The clamped plate, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 687.

- [ 5 ] Berger, M. and P. Fife, On von Kármán equation and the buckling of a thin elastic plate I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1968), 227.
- [ 6 ] 程昌钧, 《杆与板的分叉与屈曲》, 兰州大学力学系讲义 (1986).
- [ 7 ] Adams, R. A., 《索伯列夫空间》, 叶其孝等译, 人民教育出版社 (1983).
- [ 8 ] Rektorys, Karel, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company (1975).
- [ 9 ] Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill (1967).

## Elastic Instability of an Orthotropic Elliptic Plate

Cheng Chang-jun

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ning Jian-guo

(Taiyuan Polytechnic Institute, Taiyuan)

### Abstract

On the basis of von Kármán equations and using the general bifurcation theory, the elastic instability of an orthotropic elliptic plate whose edge is subjected to a uniform plane compression is discussed. Following the well-known Liapunov-Schmidt process the existence of bifurcation solution at a simple eigenvalue is shown and the asymptotic expression is obtained by means of the perturbation expansion with a small parameter. Finally, by using the finite element method, the critical loads of the plate are computed and the post-buckling behaviour is analysed. And also the effect of material and geometric parameters on the stability is studied.

**Key words** orthotropic, elliptic plate, elastic instability, critical load, bifurcation solution, post-buckling behavior