

无波动、无自由参数、耗散的 隐式差分格式*

张 涵 信

(中国空气动力研究与发展中心, 1990年2月24日收到)

摘 要

本文建立了求解NS方程和Euler方程无波动、无自由参数、耗散的隐式差分格式。该格式是TVD的和无条件稳定的。其隐式部分在1, 2, 3维情况下仅分别依赖于3, 6, 9个点, 且系数矩阵是主对角占优的。计算例题表明, 该方法可获得和显式方法相同的精度, 能很好地捕捉激波和剪切层, 且计算时间比显式有较多的节省。

关键词 数值模拟 TVD格式 隐式差分方法 NND格式

一、引 言

文献[1]通过对一维NS方程的解析分析指出, 若适当控制差分方程的修正方程式三阶色散项的系数, 使其过正激波变号, 则差分解在激波前后的波动可以完全被压制。在此基础上, 文献[2]建立了半离散化的无波动、无自由参数、耗散的差分格式, 并且证明, 它是总变差减小(TVD)的。进一步通过对时间导数项的适当处理, 文献[2,3]给出了时间一阶、空间二阶精度的单步显式TVD格式、时间和空间二阶精度的单步TVD格式、二阶精度的两步显式TVD格式(也称修正的Maccormack格式)以及二阶精度的Runge-Kutta显式TVD格式。这些格式, 我们统称为NND显式格式。大量的数值结果表明, 这些格式均对捕捉激波、剪切层、旋涡等有较高的分辨率, 且计算工作量小, 能成功地计算各种复杂的流场。但是, 由于稳定性条件的限制, 这些格式推进求解的时间步长是有限的(例如, 时间为一阶精度的NND格式Courant数为2/3, 对于二阶的NND格式, Courant数为1), 因而对于类似于湍流问题需要小网格计算的流动, 取得稳定解的计算时间较长。为了解决这个不足, 进一步发展隐式TVD格式是必要的。文献中目前已提出不少隐式TVD格式, 然而, 在一、二、三维流场计算时, 这些格式一般分别依赖于5, 9, 13个点, 这会导至较繁的块矩阵求逆。为了避免这个困难, 发展依赖点数少的隐式TVD格式自然也是希望的。解决以上问题就是本文的目的。

本文第二节给出了隐式NND格式的建立过程。第三节介绍了格式的应用, 并作了简单的讨论。

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(I)论文。

二、隐式NND格式的建立

$$\text{研究一彻Euler方程} \quad \partial U / \partial t + \partial F / \partial x = 0 \quad (2.1)$$

这里 U 是向量函数, F 是 U 的函数. 根据文献[2]的结果, 半离散化的NND格式是:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i = -\frac{1}{\Delta x} (H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}) \quad (2.2)$$

$$\text{式中 } H_{j+\frac{1}{2}} = F_{j+\frac{1}{2}L}^+ + F_{j+\frac{1}{2}R}^-, \quad F_{j+\frac{1}{2}L}^+ = F_j^+ + 2^{-1} \min \text{mod}(\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+, \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}R}^- = F_{j+1}^- - 2^{-1} \min \text{mod}(\Delta F_{j+\frac{3}{2}}^-, \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^-)$$

F^+ , F^- 以及其他符号的意义见[2]. 由(2.2)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^n = -\frac{1}{\Delta x} (H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^{n+1} = -\frac{1}{\Delta x} (H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})$$

利用 Crank-Nicolson 方法, U_j^{n+1} 可表示为:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^n + \theta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^{n+1} \right] \Delta t$$

这个表达式在时间上为一阶精度($\theta=1$)和二阶精度($\theta=1/2$). 将上两式代入此式得:

$$U_j^{n+1} - U_j^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{H}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{H}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (2.3)$$

$$\text{式中 } \bar{H}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{H}_{j-\frac{1}{2}} = [(1-\theta)H_{j+\frac{1}{2}}^n + \theta H_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}] - [(1-\theta)H_{j-\frac{1}{2}}^n + \theta H_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}] \quad (2.4)$$

$$\text{引入} \quad \left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \min \text{mod} \left(\frac{\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+}{\Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+}, 1 \right), \quad k_2 = \frac{1}{2} \min \text{mod} \left(\frac{\Delta F_{j+\frac{3}{2}}^-}{\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^-}, 1 \right) \\ k_3 &= \frac{1}{2} \min \text{mod} \left(1, \frac{\Delta F_{j-\frac{3}{2}}^+}{\Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+} \right), \quad k_4 = \frac{1}{2} \min \text{mod} \left(1, \frac{\Delta F_{j-\frac{1}{2}}^-}{\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^-} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

这里 $\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+ = F_{j+1}^+ - F_j^+$, $\min \text{mod}(a, b) = 2^{-1} [\text{sing} a + \text{sing} b] \cdot \min(|a|, |b|)$

再定义 $\delta F_j^{+n+1} = F_j^{+n+1} - F_j^{+n}$, $\delta F_j^{-n+1} = F_j^{-n+1} - F_j^{-n}$

由于 $k_i^{n+1} \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^{+n+1} = k_i^n \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^{+n+1} + O(\Delta x \Delta t)$

经过不复杂的运算易得:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{H}_{j-\frac{1}{2}} &= H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n + \theta(1+k_1^n - k_3^n)(\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{+n+1} - \delta F_{j-\frac{1}{2}}^{+n+1}) \\ &\quad + \theta(1-k_2^n + k_4^n)(\delta F_{j+\frac{1}{2}}^{-n+1} - \delta F_{j-\frac{1}{2}}^{-n+1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

由于 $\delta F_j^{+n+1} = A_j^{+n} \delta U_j^{n+1} + O(\Delta t^2)$, $\delta F_j^{-n+1} = A_j^{-n} \delta U_j^{n+1} + O(\Delta t^2)$

为此二式代入(2.6), 然后将所得结果代入(2.3), 经整理后可得:

$$\hat{A}_{j-1}^n \delta U_{j-1}^{n+1} + \hat{B}_j^n \delta U_j^{n+1} + \hat{C}_{j+1}^n \delta U_{j+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (2.7)$$

式中 $\delta U_j^{n+1} = U_j^{n+1} - U_j^n$, $\hat{A}_{j-1}^n = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (1+k_1^n - k_3^n) A_{j-1}^{+n}$

$$\delta F / \delta U = A^+ + A^- = A$$

$$\hat{B}_j^n = I + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + k_1^n - k_3^n) A_j^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - k_2^n + k_4^n) A_j^n$$

$$\hat{C}_{j+1}^n = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - k_2^n + k_4^n) A_{j+1}^n$$

(2.7)就是我们要建立的无波动、无自由参数、耗散的隐式格式，在空间它是二阶的，在时间上它是一阶($\theta=1$)或二阶($\theta=1/2$)的，且其隐式部分依赖于三个点，显式部分依赖于5个点，这显然比依赖于5点的隐式TVD格式减少了块矩阵求逆的工作量。由于该格式隐式部分的块矩阵是主对角占优的，其块矩阵求逆运算是稳定的。此外我们可以证明，该格式是总变差减小(TVD)的，如果冻结方程(2.1)的系数矩阵，还可证明，当 $\theta=1$ 时，格式是无条件稳定的。

如果我们研究一维NS方程，其粘性部分的通量可采用二阶中心隐式格式计算。对于三维NS方程，利用时间分裂法，可化为三个一维方程进行计算。

三、方法的应用及简单讨论

为了考查方法的可用性，我们计算了两个例题。第一个是超声速气流绕圆柱的运动，来流Mach数 $M_\infty=2.95$ ，以圆柱直径为特征长度的来流Reynolds数 $Re_{\infty D}=8 \times 10^5$ 。来流温度 $T_\infty=98^\circ K$ ，壁面假设绝热。气体是常比热完全气体。在周向和径向网格 29×41 为的情况下，利用激波捕捉法数值求解了层流NS方程。计算中采用了贴体网格技术。图1是计算给出的等压力和等Mach线分布。图2是计算得到的表面压力和对称轴上的压力分布。

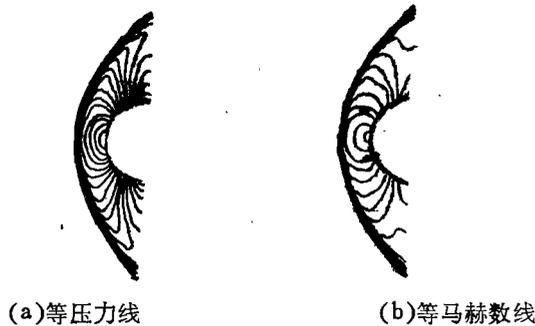


图1 圆柱超声速绕流的等压力和等马赫数线

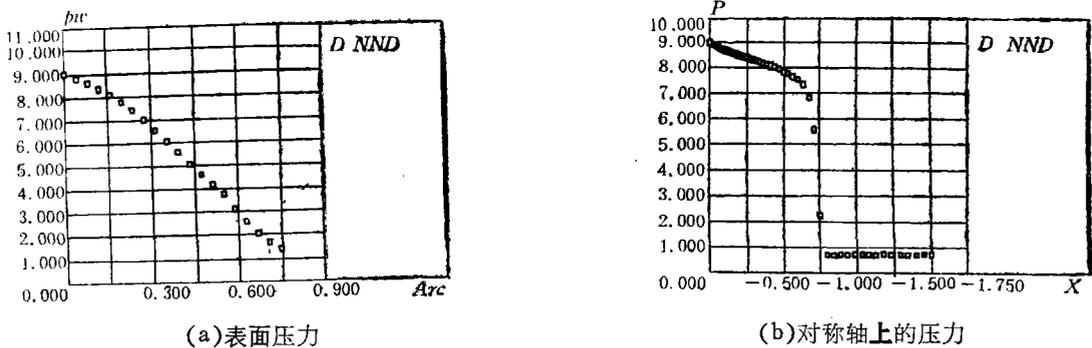
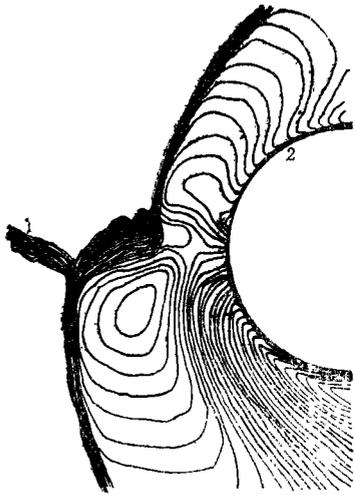


图2 圆柱超声速绕流的表面压力和对称轴上的压力分布



1—入射激 2—波圆柱
图3 圆柱上激波-激波粘性干扰的等Mach数分布

第二个是入射激波与圆柱超声速绕流的干扰。入射激波角为 22.75° ，其位置见图3。它属于文献[4]所述的第五类干扰情况。来流 $M_\infty = 5.94$ ， $Re_{\infty D} = 10^6$ ， $T_\infty = 98^\circ\text{K}$ ，壁面是绝热的。气体是常比热完全气体。采用激波捕捉法求解层流NS方程。周向和径向网格取 61×91 。图3是计算给出的等Mach线分布。

通过以上计算，可以看出隐式NND格式对求解NS方程是适用的。如果和显式NND的结果比较（图中没有画出），它们是很一致的。同显式情况一样，隐式格式可很好的捕捉激波。由于隐式格式能取较大的计算时间步长，节省计算时间的优点是明显的。

作者感谢邓小刚、毛枚良和刘伟同志，他们利用本文方法作了大量计算，本文引用了他们部分结果。

参 考 文 献

- [1] 张涵信, 空气动力学学报, 2, 1, (1984).
- [2] 张涵信, 空气动力学学报, 6, 2, (1987).
- [3] 张涵信, CARDC报告, 89-1001, (1989).
- [4] Edney, B.E., FFA, Rept. 116, Feb. (1986).

Implicit, Non-Oscillatory Containing No Free Parameters and Dissipative (INND) Scheme

Zhang Han-xin

(China Aerodynamic Research and Development Center, Mianyang)

Abstract

An implicit, non-oscillatory containing no free parameters and dissipative (INND) scheme solving Navier Stokes equations is developed. This scheme is one of total variation diminishing (TVD) algorithms. The results show that this scheme is applicable for solving Navier Stokes equations, and that the shock-capturing capability and the convergence rate are satisfactory.

Key words numerical simulations, TVD schemes, NND schemes, implicit NND schemes