应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

连续时间LQ控制主要本征对的算法*

钟万勰　杨再石

（大连理工大学）（高等教育出版社）

摘　要

本文首先提出了离散时间LQ控制的本征值方程当 $\Delta t\to 0$时怎样退化成为连续时间LQ控制的本征值方程．在建立了分离出的 n 阶连续时间的本征值方程，并保证了其本征值必定都在左半平面后，本文提出计算其最靠近于虚轴的若干个本征对，可以通过$A_e=e^A$的矩阵变换．A_e的本征值全在单位圆之内．本征向量不变，至于本征值则只要做一次对数运算就可以求得原阵的本征值．A_e阵的最接近于单位圆的若干个本征对的算法，可以通过共轭子空间迭代解解决之．

关键词　LQ控制　本征值　本征向量　本征对

一、引　言

线性二次型控制问题的发展是控制理论方面当前最为人们关切的问题．在[1，2]中，分别对于离散时间及连续时间LQ控制推导了反向时间的代数里卡提方程．并分别建立了其正则变换矩阵，通过该矩阵的相似变换，将状态空间的传递矩阵分块对角化．这样就将原有的$2n$空间分离，建立了两个各为 n 维空间的本征值问题的方程，分别相应于正向及逆向时间．在[1，2]中还指出，这两个本征值问题是互相关连的，只要求出其中一个问题，则另一个本征值问题的解决就可以通过基本代数运算求得．

在此基础上，以下的问题是要求解这套本征值问题的方程，并利用本征向量进行展开，以求解瞬态过程问题．这方面的关键是求解本征值与本征向量，即本征对的问题．由于现在是不对称矩阵，因此要求连同左、右本征向量同时求解．

对于维数不大的情形，可以采用同时求解其全部本征对的算法．这可以从[3]中找到．当维数 n 比较大时，求解全部本征对就有困难了，而且看来也无此必要．只要能求出其主要的一部分本征对就可以了．在离散时间的课题中，利用共轭子空间迭代法[4]，已经可求出最接近于单位圆的若干个本征对，并且连同左本征向量也同时求出．但是对于连续时间的情况，其本征值全部处于虚轴的一侧，如何推求其最接近虚轴的本征值及其相应的左、右本征向量若干组，还要进一步探讨．

在理论上，这个问题是已经解决的．设有本征方程

$$AX=\lambda X \tag{1.1}$$

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文．1990年1月15日收到．

其中 A为$n\times n$的实不对称矩阵，并且已知其本征值全都在虚轴左侧．则取矩阵

$$A_e=e^A \tag{1.2}$$

则A_e阵的本征值全都在单位圆之内[5]．本征方程为

$$A_eX=\mu X(=e^{\lambda}X) \tag{1.3}$$

只要按(1.2)式计算出矩阵A_e，则对于该矩阵求解(1.3)，利用共轭子空间迭代法[4]，就可以将主要的本征对求解出来．至于(1.1)的本征值，则只要作一个对数运算，就可以求得

$$\lambda=\ln(\mu) \tag{1.4}$$

本征向量(1.1)与(1.3)式是相同的．所以(1.2)式的运算是极其重要的．

对于常系数微分方程组来说，(1.2)式也是极其重要的．

在文献[6]中，我们将离散时间LQ控制的代数里卡提方程作了$\Delta t\to 0$时的取极限的推导，并据此建立了连续时间的两个代数里卡提方程．发展了一套连续时间的两个代数里卡提方程的迭代解法．本文也要弄清楚离散LQ控制的本征值方程怎样对$\Delta t\to 0$时取极限，成为连续时间LQ控制的本征方程．这样就理解得更为深刻．然后对于(1.2)式的计算提出有效的算法，使得离散与连续时间的计算问题结合得更为密切．于是也就可以调用共轭子空间迭代法[4]来求解最重要的若干个本征对了．

二、本征方程由离散向连续时间的退化

离散时间LQ问题的正、逆向时间的本征方程已在文[1]中建立．正向时间的本征方程为（矩阵符号请见[1]）

$$\mu^d(I+G^dS)X=\Phi X \tag{2.1}$$

或

$$(S-Q^d)X=\mu^d\Phi^tX \tag*{(2.1)$'$}$$

反向时间的本征方程为

$$(I+Q^dT)\lambda=\mu^d\Phi^t\lambda \tag{2.2}$$

或

$$\mu^d(G^d-T)\lambda=-\Phi T\lambda \tag*{(2.2)$'$}$$

式中为了区分起见，离散情况的矩阵加了上标“d”．在[6]中，对于连续时间LQ控制方程作了恰当的离散化，相应的矩阵有以下关系

$$\begin{array}{lll} G^d & \text{相应于} & G\times\Delta t \\ \Phi & \text{相应于} & I+F\times\Delta t \\ Q^d & \text{相应于} & Q\times\Delta t \end{array} \tag{2.3}$$

上式是就LQ控制方程而言的．对于本征方程还有本征值也有退化问题．当$\Delta t\to 0$时，离散时间LQ控制问题的本征值都会趋于1，这是零次近似，考虑到Δt的一阶小量，有

$$\mu^d\approx 1+\mu\cdot\Delta t \tag{2.4}$$

这个μ其实就是连续时间下本征方程的本征值了．这里就来证明．将(2.3)、(2.4)代入(2.1)式，有

$$(1+\mu\times\Delta t)(I+GS\times\Delta t)X=(I+F\times\Delta t)X$$

展开之，有

$$X+(\mu X+GSX)\Delta t=X+FX\times\Delta t+O((\Delta t)^2)$$

X互相抵消，剩下的当$\Delta t\to 0$时，有

$$(F-GS)X=\mu X \tag{2.5}$$

这与[2]中的正向时间本征方程相同。将(2.3)及(2.4)代入(2.2)式，经相同的推导，得

$$(F^t-QT)\lambda+\mu\lambda=0 \tag{2.6}$$

与[2]中推出的反向时间本征方程相同。

这个退化的推导给我们提供一个相互关系。尤其是(2.4)式说明了所谓左半平面，实际上是单位圆在1这个边界点临近小区域放大而成的。离散时间控制保证(2.1)式的本征值一定在单位圆之内，所以邻域的放大就是左半平面。它也说明了，将Δt取得很小，由方程(2.1)硬算本征值，必定会造成高度病态。因此还是应当由(2.5)或(2.6)式来进行计算。

三、e^A的计算

在文献[7]中给出了一个例题，说明e^A的计算必须十分小心。该例题说明级数展开之法并不总是可靠的。当然例题所述是比较严重的情况，如果采用公式

$$e^A=[e^{(A/n)}]^n \tag{3.1}$$

先将A阵缩小n倍，再做级数展开，然后再算n次幂，就不致于发生很严重的误差了。

先看普通的指数函数e^X的计算，e^X的定义为

$$e^X=\lim_{n\to\infty}(1+X/n)^n \tag{3.2}$$

数值计算就可以由此进行，式中n可以选为

$$n=2^N \tag{3.3}$$

这样，可以利用公式

$$(1+X/n)^{(2^N)}=[(1+X/n)^{(2^{N-1})}]^2 \tag{3.4}$$

例如，选用$N=15$，$2^N=32768$。当$X=1$时就可以计算得相当精确了。但只需作$N=15$次乘法。

现在要考虑当n选得较大时，是否发生病态，或者发生严重舍入误差的可能。问题发生在开始进行乘法之时。因为X/n是很小的数

$$(1+X/n)^2=1+2(X/n)+(X/n)^2 \tag{3.5}$$

将X/n与1相加就会消失掉精确度，因为计算机是在有限位有效数值之下执行的。因此实际上应当寄存的只是

$$d=2(X/n)+(X/n)^2=(X/n)\times(2+X/n) \tag{3.6}$$

这个量。因此算法应当是

```
if X<0 then begin X:=-X;NE:=True end else NE:=False;
d:=X/n;              (注:n=2^N)
for i:=1 to N do d:=d×(2+d);
if NE then e^X:=1+d else e^X:=1/(1+d);                (3.7)
```

采用以上算法就免除了在d很小时就与1相加而致损失精度的可能。不怕n选得很大了。由于选用(3.3)、(3.4)，因此当n从32768加大到1048576时，只是再多做5次乘法。注意$(1+1/n)^n$是n的上升函数，因此算得的是下界。利用(3.2)式计算e，为

$n=$	1024	32768	1048576
$e\approx$	2.71696	2.71824	2.718280

计算是用Real×4在IBM-PC上做的，约7位十进制有效数字。

这个算法是否可以再改良些呢？请从(3.1)式来看。利用展开式

$$e^X=[e^{X/n}]^n=[1+(X/n)+(X/n)^2/2!+\cdots]^n$$
$$\approx[1+(X/n)+(X/n)^2/2]^n \tag{3.8}$$

此式比(3.2)式多了一项。其算法当$X>0$时为

$d:=(X/n)\times(1+X/(2n))$ （注：$n=2^N$）

for $i:=1$ to N do $d:=d\times(2+d)$;

$e^X:=1+d$ (3.9)

精度就好得多。令$X=1$，计算e，有

$n=64$	256	1024
$e\approx2.71817$	2.718275	2.718282

这个算法就怕e^{-X}，当X负得多时就不行了。但$e^{-X}=1/e^X$。这在(3.7)式中已表述过了。

从这个例可以想见，e^A的计算也可以沿用(3.8)、(3.9)。不过这里应当用A代替X。设A阵有不同的本征值

$$AX=X\lceil\lambda\rfloor,\quad X^{-1}AX=\lceil\lambda\rfloor \tag{3.10}$$

故有

$$e^A=X(X^{-1}e^AX)X^{-1}=Xe^{X^{-1}AX}X^{-1}=Xe^{\lceil\lambda\rfloor}X^{-1}=X\lceil e^{\lambda}\rfloor X^{-1} \tag{3.11}$$

式中 X是由本征向量构成的阵，当然可以认为X是规格化的。

注意现在应当执行的是

$$e^A\approx[I+(A/n)+(A/n)^2/2]^n$$
$$(=X\lceil(1+\lambda/n+(\lambda/n)^2/2)^n\rfloor X^{-1}) \tag{3.12}$$

从精确度的角度，要求λ/n是很小的量。这要求对于A阵本征值模的上界要有一个估值。对此，可以用盖锡高林圆来作估计[8]。至于

$$\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant0 \tag{3.13}$$

的要求，则对于LQ控制问题，只要将(2.5)式换一个负号即可解决，即选用矩阵

$$A=GS-F \tag{3.14}$$

就可以了。

四、数　例

正如上文所述，A的运算是极其重要的。为表达清楚起见，这里举一个4维矩阵的数例。原始的A阵为

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & 1.9 & 0.8 & 1.2\\ -0.6 & 3.0 & 2.1 & 0.8\\ 0.0 & -0.8 & 2.4 & 0.6\\ 0.4 & -0.8 & 0.2 & 5.6\end{bmatrix}$$

选用$N=16$，计算得到的阵e^A为

$$e^A=\begin{bmatrix}11.1727 & -13.4207 & 13.7063 & 103.3792\\ 5.1307 & -11.1023 & 16.8386 & 78.3592\\ 5.1128 & -14.2579 & 1.3819 & 30.7035\\ 29.6308 & -55.6509 & -10.3997 & 260.8278\end{bmatrix}$$

而该阵的本征对为

(1)本征值 $\mu=254.6780$ $(\ln\mu=5.54002)$

本征向量 (0.413776 0.309918 0.112123 1.0)

(2，3)本征值 $\mu=1.795835\pm12.49489i(\ln\mu=2.5355430\pm1.4280483i)$

本征向量 {0.870379 1.0 −0.014688 0.110769

±(−0.479443i) 0.0i 0.512271i 0.080767i}

(4)本征值 $\mu=4.010486$ $(\ln\mu=1.388912)$

本征向量 (1.0 0.173725 0.179292 −0.070499)

而原阵A的本征值与本征向量为

(1)本征值 $\lambda=5.540002$

本征向量 (0.413777 0.309919 0.112123 1.0)

(2,3)本征值 $\lambda=2.535544\pm1.428049i$

本征向量 {0.870379 1.0 −0.014688 0.110769

±(−0.479444i) 0.0i 0.512271i 0.080767i

(4)本征值 $\lambda=1.388913$

本征向量 (1.0 0.173725 0.179292 −0.070499)

计算精度可以满意。如果用$N=20$，还可以更精确些。

计算是在IBM-PC上完成的。实数说明全部是Real×4，用的是 MS-Pascal语言3.20版本。实型数大体上是7位十进有效数字。

参 考 文 献

[1] 钟万勰，离散LQ控制问题的本征解，计算结构力学与应用，2 (1990).

[2] 钟万勰，连续时间 LQ 调节器的两个代数里卡提方程及本征值问题，大连理工大学学报，1 (1990).

[3] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch, *Linear Algebra*, Springer-Verlag (1971).

[4] 钟万勰，林家浩，不对称实矩阵的本征对共轭子空间迭代法，即将在《计算结构力学与应用》中发表.

[5] Wybourne, B. G., *Classical Groups of Physicists*, John Wiley and Sons (1974); 中译本：《典型群及其在物理学中的应用》，科学出版社，北京 (1982).

[6] 钟万勰，连续时间定常 LQ 控制问题的代数里卡提方程的迭代求解，大连理工大学工程力学研究所研究报告，60—3005.

[7] Laub, A. J., Numerical linear algebra aspects of control design computations, *IEEE Trans, Automat. Contr.*, **AC-30**, 2 (1985).

[8] Franklin, J. N., *Matrix Theory*, Prentice-Hall (1968).

On the Computation of the Main Eigen-Pairs of the Continuous-Time Linear Quadratic Control Problem

Zhong Wan-xie

(*Dalian University of Technology, Dalian*)

Yang Zai-shi

(*Higher Education Press, Beijing*)

Abstract

The degeneration of the eigenvalue equation of the discrete-time linear quadratic control problem to the continuous-time one when $\Delta t \to 0$ is given first. When the continuous-time n-dimensional eigenvalue equation, which has all the eigenvalues located in the left half plane, has been reduced from the original $2n$-dimensional one, the present paper proposes that several of the eigenvalues nearest to the imaginary axis be obtained by the matrix transformation $A_e = e^A$. All the eigenvalues of A_e are in the unit circle, with the eigenvectors unchanged and the original eigenvalues can be obtained by a logarithm operation. And several of the eigenvalues of A_e nearest to the circle can be calculated by the dual subspace iteration method.

Key words linear quadratic control, eigenvalue, eigenvector, eigen-pairs