应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶 Melnikov 方法*

郭友中　刘曾荣

（上海市应用数学和力学研究所）（中国科学院力学研究所LNM开放实验室）

江霞妹　韩志斌

（武汉工业与应用数学研究所）

摘　要

本文把原有Melnikov方法推广到高阶情况．找到了二阶次谐Melnikov 函数表达式，并且证明了在一定条件下可以用二阶次谐Melnikov函数来判定系统的次谐或超次谐的存在．

关键词　Meinikov方法　次谐分叉　超次谐分叉

一、引　言

Melnikov方法最早由Melnikov提出[1]．八十年代初由Holmes等学者加以发展成为一个系统的解析方法[2~4]，用此方法成功地分析了一类平面 Hamilton 系统在周期扰动下的马蹄与次谐分叉，对于连续的非线性动力系统性质研究起了推动作用．

我们也应该看到在用 Melnikov 方法对一些经典系统的处理中往往只能判定次谐分叉的存在，而无法判定超次谐分叉的存在，比如对负线性刚度的Duffing系统[2]，软弹簧Duffing系统[5]．以及Josephson结模型[6]的研究都出现这样情况．[2]中特别提出这一个尚未解决问题．事实上，这类系统的超次谐是存在的[7,8]，因而有必要改进Melnikov方法，使其能够用来处理非线性系统中广泛存在的这类现象．

原来 Melnikov 函数从几何上讲是距离函数渐近展开的首项，如果我们考虑渐近展开的高阶项，就有可能得到高阶Melnikov函数，利用高阶Melnikov 函数就有可能对超次谐现象作出判断．

考虑平面非自治系统

$$\dot{u}=f(u,t),\qquad u\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\qquad(t\in R)\tag{1.1}$$

其中 $f\equiv\begin{pmatrix}f_1\\f_1\end{pmatrix}$ $(f_1,f_2\in C^r,r\geqslant 3)$．

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文，1989年11月30日收到．国家自项目然科学基金资助

定义1.1 1）(1.1)的解$(x(t),y(t))$称为O型周期解，如果存在$T^*>0$，使$(x(t+T^*),y(t+T^*))=(x(t),y(t))$对一切$t\in R$成立；

2）(1.1)的解$(x(t),y(t))$称为R型周期解，如果存在$T^*>0$，使得$(x(t+T^*),y(t+T^*))=(x(t)+2\pi,y(t))$对一切$t\in R$成立。

如果进一步假定(1.1)是一个平面Hamilton系统，并附加上一个以T为周期的小扰动。

定义1.2 如果定义1.1中周期解的周期$T^*=\frac{m}{n}T$，m和n为互质正整数，则称(1.1)的周期解在$n=1$时为(1.1)的次谐解，在$n>1$时为(1.1)的超次谐解。

下面就以R型周期解为例证明有关高阶Melnikov方法的结果，自然这些结果也能推广到O型周期解。

二、假设以及主要结果

讨论如下系统

$$\dot{u}=f(u),\ u\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2 \tag{2.1}$$

其中 $f(u)\equiv\begin{pmatrix}f_1(u)\\f_2(u)\end{pmatrix}\in C^r(r\geqslant 3)$.假设(2.1)为一Hamilton系统，即存在函数$H(x,y)$，使得$f_1=\partial H/\partial y,f_2=-\partial H/\partial x$,且要求$f(x+2\pi,y)=f(x,y)(\forall(x,y)\in R^2)$成立。

对(2.1)作进一步假设：

H_1）存在曲线l_1和l_2，$l_i=\{(x,y^i(x)|x\in R.\ y^i(x)\in C(R).\ i=1、2,\}$ 且 $y^1(x)<y^2(x)$. $\forall x\in R$，使得l_1和l_2所夹区域B是(2.1)不变区域，其中$f_1(x,y)\neq 0$；

H_2）B中存在(2.1)一族连续周期轨线$q^a(t),a\in J\subset R$.且可表为$q^a(t)=\{(x,y^a(x)|x\in R,y^a(x)\in C^2(R),\ y^a(-\pi)=y^a(\pi)\}$；

H_3）设$h_a=H(q^a(t))$，h_a是$a\in J$上严格单调连续函数；

H_4）设轨线$q^a(t)$上一点$(-\pi,y^a(-\pi))$到$(\pi,y^a(\pi))$处所用时间为T_a，且$dT_a/da\neq 0$ $(\forall a\in J)$。

显然$\forall a\in J$，$q^a(t)$是(2.1)的R型周期解，且$T^*=T_a$。

考虑(2.1)在周期小扰动下的形式

$$\dot{u}=f(u)+\varepsilon g(u,t)+\varepsilon^2 h(u,t) \tag{2.2}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$，$u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\ (t\in R)$，$g=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$和 $h=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\in C^r\ (r\geqslant 2)$；$g$，$h$对$t$是以$T$为周期函数$(\forall(x,y)\in R^2)$，并且$g$，$h$关于$x$是以$2\pi$为周期函数；$f$，$g$，$h$在有界集上有界。

(2.2)的等价扭扩系统为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{u}=f(u)+\varepsilon g(u,\theta)+\varepsilon^2 h(u,\theta)\\&\dot{\theta}=1\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

其中 $(u,\theta)\in R^2\times S^1$，$S^1=R/T$是以$T$为周长的圆.在$t_0\in[0,T]$处取截面$\Sigma^{t_0}=\{(u,\theta)\in R^2\times S^1|\theta=t_0\in[0,T]\}$，并定义(2.3)的Poincare′映射：$P_\varepsilon^{t_0}:\Sigma^{t_0}\to\Sigma^{t_0}$，通过对$P_\varepsilon^{t_0}$的研究来讨论(2.3)的性质。

利用正则摄动法和Growall估计式，类似于[2]中引理4.6.1可得到

引理2.1 设$q^{\alpha}(t-t_0)$是(2.1)经过$q^{\alpha}(0)$的周期轨，则存在(2.2)一条轨道$q^{\alpha}_{\varepsilon}(t,t_0)$，不一定是周期的，对充分小的$\varepsilon$和$\alpha\in J$，有

$$q^{\alpha}_{\varepsilon}(t,t_0)=q^{\alpha}(t-t_0)+\varepsilon q^{\alpha}_1(t,t_0)+\varepsilon^2 q^{\alpha}_2(t,t_0)+O(\varepsilon^3)\qquad (t\in[t_0,t_0+T])\tag{2.4}$$

将(2.4)代入(2.2)发现q^{α}_1和q^{α}_2分别满足方程：

$$\dot{q}^{\alpha}_1(t,t_0)=Df(q^{\alpha}(t-t_0))q^{\alpha}_1(t,t_0)+g(q^{\alpha}(t-t_0),t)\tag{2.5}$$

$$\dot{q}^{\alpha}_2(t,t_0)=Df(q^{\alpha}(t-t_0))q^{\alpha}_2(t,t_0)+\frac{1}{2}D^2f(q^{\alpha}(t-t_0))(q^{\alpha}_1(t,t_0))^2 + Dg(q^{\alpha}(t-t_0),t)q^{\alpha}_1(t,t_0)+h(q^{\alpha}(t-t_0),t)\tag{2.6}$$

现在考虑$T_{\alpha_0}=\frac{m}{n}T$的$R$型周期轨，利用[2]中方法类似定义距离函数

$$d(t_0)\equiv \frac{f(q_{m/n}(0))}{|f(q_{m/n}(0))|}\wedge\{\varepsilon[q^{\alpha_0}_1(t_0+mT,t_0)-q^{\alpha_0}_1(t_0,t_0)] + \varepsilon^2[q^{\alpha_0}_2(t_0+mT,t_0)-q^{\alpha_0}_2(t_0,t_0)]\}\tag{2.7}$$

其中$\wedge$表示外积，$q_{m/n}(t)=q^{\alpha_0}(t)$。

(2.7)中第一项就是[1]中定义的Melnikov函数，这儿称为一阶Melnikov次谐函数，其表达式为：

$$M^{m/n}_1(t_0)\equiv\int_0^{mT}f(q_{m/n}(t))\wedge g(q_{m/n}(t),t+t_0)dt\tag{2.8}$$

定义(2.7)中第二项为二阶次谐Melnikov函数，记为：

$$M^{m/n}_2(t_0)\equiv f(q_{m/n}(0))\wedge[q^{\alpha_0}_2(t_0+mT,t_0)-q^{\alpha_0}_2(t_0,t_0)]\tag{2.9}$$

为推导$M^{m/n}_2(t_0)$表达式，记

$$\varDelta(t,t_0)\equiv f(q_{m/n}(t-t_0))\wedge q^{\alpha_0}_2(t,t_0)\tag{2.10}$$

求导后，得到

$$\frac{d\varDelta}{dt}=\mathrm{trace}\ Df(q_{m/n}(t-t_0))\cdot\varDelta+f(q_{m/n}(t-t_0))\wedge\Big[\frac{1}{2}D^2f(q_{m/n}(t-t_0)) \times(q^{\alpha_0}_1(t,t_0))^2+Dg(q_{m/n}(t-t_0),t)q^{\alpha_0}_1(t,t_0)+h(q_{m/n}(t-t_0),t)\Big].$$

对于Hamilton矢量场，trace $Df(q_{m/n}(t-t_0))=0$，

$$\frac{d\varDelta}{dt}=f(q_{m/n}(t-t_0))\wedge\Big[\frac{1}{2}D^2f(q_{m/n}(t-t_0))(q^{\alpha_0}_1(t,t_0))^2 +Dg(q_{m/n}(t-t_0),t)\cdot q^{\alpha_0}_1(t,t_0)+h(q_{m/n}(t+t_0),t)\Big],$$

把上式两边由t_0到t_0+mT积分，注意到$q_{m/n}(t-t_0)$的周期性以及(2.10)式，可得到二阶次谐Melnikov函数的表达式为

$$M^{m/n}_2(t_0)=\int_{t_0}^{t_0+mT}f(q_{m/n}(t-t_0))\wedge\Big[\frac{1}{2}D^2(q_{m/n}(t-t_0))(q^{\alpha_0}_1(t,t_0))^2$$

$$+Dg(q_{m/n}(t-t_0),t)g_1^{\alpha_0}(t,t_0)+h(q_{m/n}(t-t_0),t)]dt \tag{2.11}$$

此时，距离函数可表为

$$d(t_0)=\varepsilon\frac{M_1^{m/n}(t_0)}{|f(q_{m/n}(0))|}+\varepsilon^2\frac{M_2^{m/n}(t_0)}{|f(q_{m/n}(0)|}+O(\varepsilon^3) \tag{2.12}$$

进而可以得到本文两个主要结果。

定理2.1 若$M_1^{m/n}(t_0)$存在不依赖ε的简单零点，则对充分小的$\varepsilon>0$，Poincaré映射$P_\varepsilon^{t_0}$存在周期为m的轨道，即(2.2)存在周期为mT的次谐轨道或$\frac{m}{n}T$超次谐轨道。

定理2.2 若$M_1^{m/n}(t_0)\equiv0$时，若$M_2^{m/n}(t_0)$有不依赖于ε的简单零点，Poincaré映射$P_\varepsilon^{t_0}$存在周期为m的轨道，即(2.2)存在周期为mT的次谐轨道或$\frac{m}{n}T$超次谐轨道。

这两个定理的证明将放在最后两节。

三、$q_1^{\alpha_0}(t,t_1)$的可解性

$M_2^{m/n}(t_0)$中含有$q_1^{\alpha_0}(t,t_0)$，如果$q_1^{\alpha_0}(t,t_0)$不能由$q_{m/n}(t)$解出，上述定理也就失去其应用价值，故在这一节我们先讨论$q_1^{\alpha_0}(t,t_0)$的可解性。

$q_1^{\alpha_0}(t,t_0)$满足方程(2.5)，其分量形式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1^{\alpha_0}(t,t_0)&=D_xf_1(x_{m/n},y_{m/n})x_1^{\alpha_0}(t,t_0)+D_yf_1(x_{m/n},y_{m/n})y_1^{\alpha_0}(t,t_0)\\&\quad+g_1(x_{m/n},y_{m/n},t)\\\dot{y}_1^{\alpha_0}(t,t_0)&=D_xf_2(x_{m/n},y_{m/n})x_1^{\alpha_0}(t,t_0)+D_yf_2(x_{m/n},y_{m/n})y_1^{\alpha_0}(t,t_0)\\&\quad+g_2(x_{m/n},y_{m/n},t).\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

(3.1)为线性非齐次方程组，其对应齐次方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_H&=D_xf_1(x_{m/n},y_{m/n})x_H+D_yf_1(x_{m/n},y_{m/n})y_H\\\dot{y}_H&=D_xf_2(x_{m/n},y_{m/n})x_H+D_yf_2(x_{m/n},y_{m/n})y_H\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

引理3.1 如果$q^{\alpha_0}=(x^{\alpha_0};y^{\alpha_0})=(x_{m/n},y_{m/n})$关于$\alpha,t$有二阶连续偏导数，则(3.2)有两组线性无关解

$$\left.\begin{aligned}x_{H1}&=\frac{dx^\alpha}{dt}\Big|_{\alpha=\alpha_0},\quad y_{H1}=\frac{dy^\alpha}{dt}\Big|_{\alpha=\alpha_0}\\x_{H2}&=\frac{dx^\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0},\quad y_{H2}=\frac{dy^\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

证明 把(3.3)代入(3.2)验证，发现(3.3)确为(3.2)的解。现证明此两组解为线性无关，为此计算朗斯基行列式

$$\begin{vmatrix} x_{H1} & y_{H1} \\ x_{H2} & y_{H2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{dy^a}{dt}\frac{dx^a}{da}+\frac{dx^a}{dt}\frac{dy^a}{da}\right)\Big|_{a=a_0}$$

$$= -f_2(x^{a_0},y^{a_0})\frac{dx^a}{da}\Big|_{a=a_0}+f_1(x^{a_0},y^{a_0})\frac{dy^a}{da}\Big|_{a=a_0}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx^a}{da}+\frac{\partial H}{dy}\frac{dy^a}{da}\right)\Big|_{a=a_0}=\frac{dH}{da}\Big|_{a=a_0}$$

$$= \frac{dh_a}{da}\Big|_{a=a_0} \neq 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

由于$(x_{H1},y_{H1})(x_{H2},y_{H2})$组成（3.2）的一基本解组，因而用常数变易法可以写出（3.1）解的一般表达式，即 $q_1^{a_0}(t,t_0)$是可解的。

四、定理2.1的证明

作变换：

$$\left.\begin{array}{l} \varphi=x \\ I=H(x,y) \end{array}\right\} \quad (x,y)\in B \tag{4.1}$$

引理4.1 对$(x,y)\in B$，变换(4.1)可逆，其逆变换$x=\varphi$，$y=\tilde{H}(\varphi,I)$也是连续可微。

证明 只需计算变换(4.1)的Jacobi行列式。

在变换(4.1)下，方程(2.1)和(2.2)化为

$$\left.\begin{array}{l} \dot\varphi=f_1(\varphi,\tilde{H}(\varphi,I))\triangleq f_1(\varphi,I) \\ \dot I=0 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

和

$$\left.\begin{array}{l} \dot\varphi=f_1(\varphi,I)+\varepsilon g_1(\varphi,I,t)+\varepsilon^2 h_1(\varphi,I,t) \\ \dot I=f(\varphi,I)\wedge[\varepsilon g(\varphi,I,t)+\varepsilon^2 h(\varphi,I,t)] \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

其中 $f(\varphi,I)=f(\varphi,\tilde{H}(\varphi,I))$，$g(\varphi,I,t)=g(\varphi,\tilde{H}(\varphi,I),t)$，$h(\varphi,I,t)=h(\varphi,\tilde{H}(\varphi,I),t)$。

由于(4.2)和(4.3)关于φ是2π周期的，因而在讨论R型次谐解时，可将初值取在$B_0=B\cap\{(x,y)|y\in R,x\in[-\pi,\pi]\}$。取一闭域$B_1$使得$B_0\cap q_{m/n}(t-t_0)\subset B_1\subset B_0$。

由变换(4.1)知，$q_{m/n}(t-t_0)$参数方程为

$$\left.\begin{array}{l} \varphi=\varphi_{m/n}(t-t_0) \\ I=I_{m/n}(t-t_0) \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

使$(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\in B_0$。取$(\varphi,I)\in U(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\subset B_1$，其中$U$表示$(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$的一个邻域。设$(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0)$，$I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))$和$(\varphi_0(t,\varphi,I,t_0)$，$I_0(t,\varphi,I,t_0))$为（4.3）和（4.2)满足$t=t_0$取值$(\varphi,I)$的解。对应的Poincaré映射为：

$$P_\varepsilon^{t_0}:(\varphi_\varepsilon,I_\varepsilon)\to(\varphi_\varepsilon(t_0+T,\varphi_\varepsilon,I_\varepsilon,t_0),I_\varepsilon(t_0+T,\varphi_\varepsilon,I_\varepsilon,t_0)).$$

引理4.2 $(P_0^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi+2n\pi+\omega(\varphi,I)\\ I\end{pmatrix}$,

其中 $\omega(\varphi,I)\equiv\int_0^{mT}[f_1(\varphi_{\alpha_1}(t),I_{\alpha_1}(t))-f_1(\varphi_{m/n}(t),I_{m/n}(t))]dt \qquad (\alpha_1\in J)$.

证明 参见文献[9].

引理4.3 上引理中的$\omega(\varphi,I)$满足

$$\omega(\varphi,I)\Big|_{(\varphi=\varphi_{m/n}(0),\,I=I_{m/n}(0))}=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\Big|_{(\varphi=\varphi_{m/n}(0),\,I=I_{m/n}(0))}=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial I}\Big|_{(\varphi=\varphi_{m/n}(0),\,I=I_{m/n}(0))}=-nf_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\frac{dT_a}{dh_a}\Big|_{h_a=h_{m/n}}\neq 0.$$

证明 参见文献[9].

引理4.4 $(P_\varepsilon^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t_0+mT,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(t_0+mT,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix}$.

证明 设(4.3)以(φ,I)为初值的解为$\psi(t,\varphi,I)$，只要证$\forall t$, $\psi(t+T,\varphi,I)=\psi(t,\psi(T,\varphi,I))$ $\left(只要注意\ \psi(T,\varphi,I)=P_\varepsilon^{t_0}\begin{pmatrix}\varphi\\ I\end{pmatrix}\right)$,

$$\psi(t+T,\varphi,I)=\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix},$$

代入(4.3)的左端，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix}&=\frac{d}{d(t+T)}\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix}\\ &=\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}f_1(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0))+\varepsilon g_1(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),\\ f(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0))\wedge[\varepsilon g(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),\\ I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon^2h_1(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),t)\\ I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon^2h(\varphi_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(s,\varphi,I,t_0),t)]\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

令$s\equiv t+T$，并注意到f,g,h对t以T为周期，则上式等于

$$\begin{pmatrix}f_1(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0))+\varepsilon g_1(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),\\ f(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0))\wedge[\varepsilon g_1(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon^2h_1(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),t)\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon^2h(\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0),t)]\end{pmatrix}.$$

因此

$$\psi(t+T,\varphi,I)=\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\\ I_\varepsilon(t+T,\varphi,I,t_0)\end{pmatrix},$$

也是方程(4.3)的解，其初值为$\psi(t+T,\varphi,I)|_{t=0}=\psi(T,\varphi,I)$. 由解的唯一性，就有

$$\psi(t+T,\varphi,I)=\psi(t,\psi(T,\varphi,I)).$$

从而有

$$(P_\varepsilon^{t_0})^2\binom{\varphi}{I}\equiv P_\varepsilon^{t_0}\left(P_\varepsilon^{t_0}\binom{\varphi}{I}\right)=\psi\left(T,P_\varepsilon^{t_0}\binom{\varphi}{I}\right)$$

$$=\psi(T,\psi(T,I,\varphi))=\psi(2T,\varphi,I). \qquad \text{Q.E.D.}$$

以此类推，则引理成立。

引理4.5 存在$F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)$和$G(\varphi,I,t_0,\varepsilon)$，使得

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m\binom{\varphi}{I}=\begin{pmatrix}\varphi+2n\pi+\omega(\varphi,I)+F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)\\ I+G(\varphi,I,t_0,\varepsilon)\end{pmatrix}$$

满足 $\left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_{\varepsilon=0}=0,\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{\varepsilon=0}=0,$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\varphi}\right|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}=\frac{1}{f_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}\frac{dM_1^{m/n}(t_0)}{dt_0}.$$

证明 由引理4.4，得

$$\varphi_\varepsilon(t_0+mT,\varphi,I,t_0)-\varphi_\varepsilon(t_0,\varphi,I,t)$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+mT}[f_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))+\varepsilon g_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t),$$

$$I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon^2h_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),t)]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+mT}f_1(\varphi_{m/n}(t-t_0),\ I_{m/n}(t-t_0))dt+\int_{t_0}^{t_0+mT}[f_1\varphi_0(t,\varphi,J,t_0),I_0(t,\varphi,I,t_0))$$

$$-f_1(\varphi_{m/n}(t-t_0),\ I_{m/n}(t-t_0)]dt+F(\varphi,I,t_0,\varepsilon),$$

其中
$$F(\varphi,I,t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_0+mT}[f_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))$$

$$-f_1(\varphi_0(t,\varphi,I,t_0),\ I_0(t,\varphi,I,t_0))]dt$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+mT}[g_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))]dt$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_0+mT}[h_1(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))]dt$$

因此，
$$\left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_{\varepsilon=0}=0,\quad\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{\varepsilon=0}=0.$$

又有，

$$I_\varepsilon(t_0+mT,\varphi,I,t_0)-I_\varepsilon(t_0,\varphi,I,t_0)$$

$$=\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+mT}f(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0))\wedge[g(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),$$

$$I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),t)+\varepsilon h(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),\ I_\varepsilon(t,\varphi,I,t_0),t)]dt$$

$$=\varepsilon G(\varphi,I,t_0,\varepsilon).$$

显然有

$$G\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}=M_1^{m/n}(t_0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}=\frac{d}{dt_0}M_1^{m/n}(t_0)\cdot\frac{dt_0}{d\varphi}$$

$$=\frac{d}{dt_0}M_1^{m/n}(t_0)/f_1(\varphi_{m/n}(0),\ I_{m/n}(0)).\qquad \text{Q.E.D.}$$

引理4.6　若$M_1^{m/n}(t_0)$有简单零点，则存在$\varepsilon_0>0$，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，在$(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$附近存在点$(\varphi^*,I^*)$满足$(P_\varepsilon^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi^*\\I^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi^*+2n\pi\\I^*\end{pmatrix}$.若$M_1^{m/n}(t_0)\neq 0$（$\forall t_0\in[0,T]$），则不存在不动点$(\varphi^*,I^*)$.

证明　由引理4.5，只要考虑下列方程的可解性

$$\left.\begin{aligned}&\omega(\varphi,I)+F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)=0\\&G(\varphi,I,t_0,\varepsilon)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

将$(\varphi,I,t_0,\varepsilon)=(\varphi_{m/n}(0),\ I_{m/n}(0),\ t_0,\ 0)$代入(4.5)，根据引理4.3和引理4.5，得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial(\omega+F)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial(\omega+F)}{\partial I}\\ \dfrac{\partial G}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial G}{\partial I}\end{bmatrix}\Bigg|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -nf_1(\varphi_{m/n}(0),\ I_{m/n}(0))\dfrac{dT_a}{dh_a}\Big|_{h_a=h_{m/n}}\\ \dfrac{1}{f_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}\dfrac{d}{dt_0}M_1^{m/n}(t_0) & \dfrac{\partial G}{\partial I}\end{bmatrix}.$$

其行列式值为$n\dfrac{d}{dt_0}M_1^{m/n}(t_0)\cdot\dfrac{dT_a}{dh_a}\Big|_{h_a=h_{m/n}}$.

因隐函数定理，若$M_1^{m/n}(t_0)$有简单零点，则存在$\varepsilon_0>0$，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，(4.5)有解$(\varphi^*,\ I^*)$且对$\varepsilon$为$C^r$连续可微，并在$(\varphi_{m/n}(0),\ I_{m/n}(0))$的一个邻域内是唯一的.　Q.E.D.

到此为止，我们已经证明(4.3)的解在$(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$附近有不动点$(\varphi^*,I^*)$，由变换(4.1)的可逆性，可得出(2.3)在$q_{m/n}(0)$附近有不动点，即在三维流形$R^2\times S^1$上轨道封闭，即(2.2)的 Poincaré映射有周期m的轨道，也就是说(2.2)存在周期为m/n的次谐轨道或超次谐轨道.

五、定理2.2的证明

由于证明中有一些与定理2.1中相类似，故本节仅将不同之处加以证明.

作变换

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=x\\&I=H(x_0,y_0)+D(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in B\tag{5.1}$$

其中 $(x_0(t-t_0),\ y_0(t-t_0))$是(2.1)的解.

引理5.1 对$(x,y)\in B$，变换(5.1)可逆，且逆变换$x=\varphi$，$y=\hat{H}(\varphi,I)$也是连续可微的。

证明 只要计算(5.1)的 Jacobi 行列式。 Q.E.D

在变换(5.1)下，方程(2.1)可化为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=f_1(\varphi,\hat{H}(\varphi,I))\triangleq f_1(\varphi,I)\\&\dot{I}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.2)$$

(2.2)可化为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=f_1(\varphi,I)+\varepsilon g_1(\varphi,I,t)+\varepsilon^2h_1(\varphi,I,t)\\&\dot{I}=\frac{\partial H}{\partial x_0}\cdot\dot{x}_0+\frac{\partial H}{\partial y_0}\dot{y}_0+\frac{\partial}{\partial t}f(x_0,y_0)\wedge\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\&\quad+f(x_0,y_0)\wedge\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(5.3)$$

由于(x_0,y_0)为(2.1)的解，必存在轨道$q_\beta(t-t_0)$，$\beta\in J$与它对应，故(5.3)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=f_1(\varphi,I)+\varepsilon g_1(\varphi,I,t)+\varepsilon^2h_1(\varphi,I,t)\\&\dot{I}=\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi_\beta,I_\beta)\wedge\begin{pmatrix}\varphi-\varphi_\beta\\\hat{H}(\varphi,I)-\hat{H}(\varphi_\beta-I_\beta)\end{pmatrix}\\&\quad+f(\varphi_\beta,I_\beta)\wedge[f(\varphi,I)-f(\varphi_\beta,I_\beta)+\varepsilon g(\varphi,I,t)\\&\quad+\varepsilon^2h(\varphi,I,t)]\end{aligned}\right\}\qquad(5.4)$$

(5.3)也可写成

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=f_1(\varphi,I)+\varepsilon g_1(\varphi,I,t)+\varepsilon^2h_1(\varphi,I,t)\\&\dot{I}=\varepsilon f(x_0,y_0)\wedge g(x_0,y_0,t)+\varepsilon^2f(x_0,y_0)\wedge\\&\quad\Big[\frac{1}{2}(x_1,y_1)D^2f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+Dg(x_0,y_0,t)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\\&\quad+h(x_0,y_0,t)\Big]\end{aligned}\right\}\qquad(5.5)$$

同样，用$\begin{pmatrix}\varphi\\I\end{pmatrix}$表示(5.2)和(5.4)两条轨道在初始时刻$t_0$的初始位置，成立如下

引理5.2 $(P_0^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi\\I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi+2n\pi+\omega(\varphi,I)\\I\end{pmatrix}$，其中

$$\omega(\varphi,I)=\int_0^{mT}[f_1(\varphi_\alpha(t),\ I_\alpha(t))-f_1(\varphi_{m/n}(t),\ I_{m/n}(t))]\,dt,$$

$$(\alpha\in J).$$

引理5.3 与引理5.2中的$\omega(\varphi,I)$满足条件：

$$\omega\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial I}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}=-nf_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\cdot\frac{dT_\beta}{dh_\beta}\Big|_{h_\beta=h_{m/n}}\neq0.$$

引理5.4 $(P_\varepsilon^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon\\ I_\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_\varepsilon(t_0+mT,\ \varphi,\ I,\ t_0)\\ I_\varepsilon(t_0+mT,\ \varphi,\ I,\ t_0)\end{pmatrix}$.

以上三个引理证明类同于定理2.1的证明，这儿也就不重复了.

引理5.5 存在$F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)$和$G(\varphi,I,t_0)$，$N(\varphi,I,t_0)$使得

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m\begin{pmatrix}\varphi\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi+2n\pi+\omega(\varphi,I)+F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)\\ I+\varepsilon G(\varphi,I,t_0)+\varepsilon^2N(\varphi,I,t_0)\end{pmatrix},$$

且满足：

$$\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}=0,$$

$$G\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\varphi}\right|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial N}{\partial\varphi}\right|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=\frac{1}{f_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}\frac{dM_2^{m/n}(t_0)}{dt_0}.$$

证明 前两个等式由引理4.5即知成立. 又因

$$\begin{aligned}
&I_\varepsilon(t_0+mT,\ \varphi,\ I,\ t_0)-I_\varepsilon(t_0,\varphi,I,t_0)\\
&=\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+mT}f(x_0,y_0)\wedge g(x_0,y_0,t)dt\\
&\quad+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_0+mT}f(x_0,y_0)\wedge\Big[\frac{1}{2}(x_1,y_1)D^2f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\\
&\quad+Dg(x_0,y_0,t)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+h(x_0,y_0,t)\Big]dt\\
&=\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+mT}f(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,t_0))\\
&\quad\wedge g(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,t_0),t)dt\\
&\quad+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_0+mT}f(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,t_0))\\
&\quad\wedge\Big[\frac{1}{2}(x_1,y_1)D^2f(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,\ t_0),\ t)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\\
&\quad+Dg(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ t)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\\
&\quad+h(\varphi_\beta(t,\varphi,I,t_0),\ I_\beta(t,\varphi,I,t_0),t)\Big]dt\\
&=\varepsilon G(\varphi,I,t_0)+\varepsilon^2N(\varphi,I,t_0),
\end{aligned}$$

其中(x_1,y_1)由第三节解出，也为(φ_β,I_β)函数．由定理2.2的假设条件

$$G\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=M_1^{m/n}(t_0)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=0.$$

又：

$$N\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=M_2^{m/n}(t_0),$$

$$\frac{\partial N}{\partial\varphi}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}=\frac{dM_2^{m/n}(t_0)}{dt_0}\Big/\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t_0}\Big|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)}$$

$$=\frac{1}{f_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}\frac{dM_2^{m/n}(t_0)}{dt_0}\qquad \text{Q.E.D.}$$

引理5.6 当$M_1^{m/n}(t_0)\equiv 0$，对扰动参数$\varepsilon>0$，存在$U_0(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\subset B_0$，使得$(\varphi,I)\in U_0$，对$\forall t_0\in[0,T]$，$G(\varphi,I,t_0)=O(\varepsilon^2)$．

证明 由G定义，$G(\varphi,I,t_0)$关于φ,I连续，$\forall t_0\in[0,T]$，故$\forall\delta>0$，存在$\eta>0$，当$|\varphi-\varphi_{m/n}(0)|<\eta$，$|I-I_{m/n}(0)|<\eta$时，有$|G(\varphi,I,t_0)-G(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)|<\delta$，而$G(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0)\equiv 0$，故有$|G(\varphi,I,t)|<\delta$只要取$\delta<\varepsilon^2$，$U_0=\{(\varphi,I)\,|\,|\varphi-\varphi_{m/n}(0)|<\eta,\ |I-I_{m/n}(I-I_{m/n}(0)|<\eta\}\cap B^0$，引理结果就成立． Q.E.D.

引理5.7 在$M_1^{m/n}(t_0)\equiv 0$情况下，若$M_2^{m/n}(t_0)$有简单零点，则存在$\varepsilon_1>0$，当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，在$U_0(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$内，存在点$(\varphi^*,I^*)$，使得

$$\left(P_\varepsilon^{t_0}\right)^m\begin{pmatrix}\varphi^*\\I^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi^*+2n\pi\\I^*\end{pmatrix};$$

若$M_2^{m/n}(t_0)\neq 0$，$\forall t_0\in[0,T]$，则不存在这种不动点．

证明 在$U_0(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$内考虑

$$\left.\begin{aligned}&\omega(\varphi,I)+F(\varphi,I,t_0,\varepsilon)=0\\&N(\varphi,I,t_0)+O(\varepsilon)=0\end{aligned}\right\}\qquad(5.6)$$

将$(\varphi,I,t_0,\varepsilon)=(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)$代入(5.6)，得

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial(\omega+F)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(\omega+F)}{\partial I}\\ \frac{\partial N}{\partial\varphi} & \frac{\partial N}{\partial I}\end{bmatrix}\Bigg|_{(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0),t_0,0)}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -nf_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))\frac{dT_\beta}{dh_\beta}\Big|_{h_\beta=h_{m/n}}\\ \frac{1}{f_1(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))}\frac{dM_2^{m/n}(t_0)}{dt_0} & \frac{\partial N}{\partial I}\end{bmatrix}$$

行列式的值为 $\dfrac{dM_2(t_0)}{dt_0}\dfrac{dT_\beta}{dh_\beta}\Big|_{h_\beta=h_{m/n}}\neq 0$，

根据隐函数定理，存在$\varepsilon_1>0$，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，(5.6)有解$(\varphi^*,I^*)\in U_0(\varphi_{m/n}(0),I_{m/n}(0))$，且唯一． Q.E.D.

由于同样的理由，我们就完成了定理2.2的证明。

附注 本文的结果主要是为了解决非线性系统的超次谐分叉而建立；利用本文结果作者们已经比较好地解决了一系列问题的超次谐解，限于篇幅，有关的结果将在其他文章中加以报道.

参 考 文 献

[1] Melnikov, V. K. *Trans. Moscov. Math. Soc.*, **12** (1963), 1—56.

[2] Guckenheimer, J. and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vectar Fields*, Springer-Verlag, (1983).

[3] Chow, S. N. J. K. Hale, and J. Mallet-Paret, *J. Diff. Eq.*, **37**, 3 (1980), 351—373.

[4] Keener, J. P., *Study in Appl. Math*, **67**, 1 (1982), 25—44.

[5] 刘曾荣、姚伟国、朱照宣，应用数学和力学，**7**，2 (1986)，103—108.

[6] 钱敏、潘涛、刘曾荣，物理学报，**36**，2 (1987)，149—156.

[7] Bareone A. and G. Paterno, *Physics and Application of the Jorsephson Effect*, *Interscience Publication* (1982).

[8] Stoker, J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, *Interscince*, New York (1950)

[9] 钱敏、潘涛、沈文仙，平面 Hamilton 系统在周期小扰动下次调和解的存在性和稳定性，数学学报（待发表）.

Higher-Order Melnikov Method

Guo You-zhong

(*Shanghai Institute ofr Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Liou Zeng-rong

(*LNM Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Jiang Xia-mei Han Zhi-bin

(*Wuhan Institute for Industrial and Applied Mathematics, Wuhan*)

Abstract

In this paper the Melnikov method has been generalized to the case of higher-order by finding an explicit expression for second-order subharmonic Melnikov function, and it has been proved that the existence of subharmonic or hyper-subharmonic of a system can be proved under certain conditions by use of second-order Melnikov function.

Kd/ words Melnikov method, subharmonic bifurcation, hyper-subharmonic bifurcation