应用数学和力学，第12卷第2期（1991年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 变系数偏微分方程组一般解的构造*

张鸿庆　　杨　光

（大连理工大学，1990年2月27日收到）

**摘　要**

求解偏微分方程不仅有理论意义，而且有实用价值．本文利用共轭算子的性质给出构造偏微分方程组一般解的方法．

**关键词**　一般解　非交换环　解的构造　共轭算子

在数学物理，特别是在弹性力学的发展史上，偏微分方程的一般解起过重要的作用．对常系数偏微分方程，这个问题已有大量文献，但对变系数情形尚无系统的工作[1][2][3]．本文将给出变系数偏微分方程组一般解的构造．即使只限制于弹性力学，也包括各种类型的偏微分方程、积分方程和积微分方程，从而本文将考虑一般的算子方程组．

设$M$是线性空间，本文所考虑的算子都是从$M$到$M$的算子并且将零元素映射成零元素．我们假定所有从$M$到$M$的算子按通常意义的加法和乘法构成一个环，特别地，常系数偏微分算子的集合是一个可交换环，而变系数偏微分算子的集合是非交换环，因此偏微分算子是本文的特例．

**定理1**　如果$B$是线性算子并且对给定算子$A$和$B$有算子$C$和$D$使$AC=BD$，则$Au=Bv$满足条件$u\in CM$的一般解是$u=C\phi$，$v=D\phi+\psi$，其中$\phi\in M$，$\psi\in\mathrm{Ker}B$，$\mathrm{Ker}B=\{\psi|\psi\in M,B\psi=0\}$；如果$A$，$C$，$D$也是线性算子，并且$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$，则$Au=Bv$满足条件$u\in CM$的一般解是$u=C\phi$，$v=D\phi$，$\phi\in M$．

**证明**　只须证明最后一个结论．由于$u\in CM$，因此$\exists\,\phi_1\in M$，使$u=C\phi_1$，从而$AC\phi_1=Bv$．由于$AC=BD$及$B$是线性算子，则$B(v-D\phi_1)=0$，因此$v=D\phi_1+\psi$，其中$\psi\in\mathrm{Ker}B$．由于$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$，从而$\exists\,\phi_2\in\mathrm{Ker}C$使$\psi=D\phi_2$，由于$D$是线性算子，因此$v=D(\phi_1+\phi_2)$．由于$\phi_2\in\mathrm{Ker}C$，$C$是线性算子，从而$u=C(\phi_1+\phi_2)$，令$\phi=\phi_1+\phi_2$即得所证．

**注记1**　如果$C$是满射，条件$u\in CM$可以删掉．

**注记2**　如果$A$，$B$，$C$，$D$是线性算子，$AC=BD$并且$Au=Bv$的一般解是$u=C\phi$，$v=D\phi$，$\forall\phi\in M$，则$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$．

事实上，对任意$\psi\in\mathrm{Ker}B$及$\phi_1\in M$，$u=C\phi_1$，$v=D\phi_1+\psi$是$Au=Bv$的解，由注记假设有$\phi\in M$使$u=C\phi_1=C\phi$，$v=D\phi_1+\psi=D\phi$，因此$C(\phi-\phi_1)=0$，$\psi=D(\phi-\phi_1)$，则$D\mathrm{Ker}C\supseteq\mathrm{Ker}B$．反之，容易证明$D\mathrm{Ker}C\subseteq\mathrm{Ker}B$，证毕．

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文．

**推论1** 如果$AC=BD$，则对$\forall\phi\in\mathrm{Ker}D$，$u=C\phi$满足方程$Au=0$。如果$A$，$B$，$C$，$D$是线性算子，$C$是满射，$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$，则$Au=0$的一般解是$u=C\phi$，$\forall\phi\in\mathrm{Ker}D$。

**例1** 设

$$A=\begin{bmatrix}\partial_x^2+k_1\Delta & \partial_{xy}^2 & \partial_{xz}^2\\ \partial_{xy}^2 & \partial_y^2+k_1\Delta & \partial_{yz}^2\\ \partial_{xz}^2 & \partial_{yz}^2 & \partial_z^2+k_1\Delta\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+k_1-\frac{x}{2}\partial_x & -\frac{y}{2}\partial_x & -\frac{z}{2}\partial_x & -\frac{1}{2}\partial_x\\ -\frac{x}{2}\partial_y & \frac{1}{2}+k_1-\frac{y}{2}\partial_y & -\frac{z}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}\partial_y\\ -\frac{x}{2}\partial_z & -\frac{y}{2}\partial_z & \frac{1}{2}+k_1-\frac{z}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}\partial_z\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+k_1-\frac{x}{2}\partial_x & -\frac{y}{2}\partial_x & -\frac{z}{2}\partial_x & -\frac{1}{2}\partial_x\\ -\frac{x}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}+k_1-\frac{y}{2}\partial_y & -\frac{z}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}\partial_y\\ -\frac{x}{2}\partial_z & -\frac{y}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}+k_1-\frac{z}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}\partial_z\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}(1+k_1)\Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & (1+k_1)\Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1+k_1)\Delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1+k_1)\Delta\end{bmatrix}$$

其中$\Delta$是三维 Laplace 算子，$k_1$是常数。显然 $AC=BD$，由此我们可以得到均匀各向同性体弹性力学方程组的 Boussinesq-Papkovich-Neuber 解。

**推论2** 如果$AC=BD$，$F(C\phi,\ D\phi)=f$，则$u=C\phi$，$v=D\phi$满足方程

$$Au=Bv,\quad F(u,\ v)=f \tag{1}$$

其中$F$是从$M\times M$到$M$的任意算子。如果$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$并且$A$，$B$，$C$，$D$是线性算子，$C$是满射，则(1)的一般解为$u=C\phi$，$v=D\phi$，其中$\phi$满足方程

$$F(C\phi,\ D\phi)=f \tag{2}$$

推论 2 表明方程组(1)等价于单个方程(2)，而推论 1 表明方程 $Au=0$ 经变换 $u=C\phi$变成另一个方程。

我们定义$(A/B)u=f$的解是$Au=Bf$的解，则有下述的

**推论3** 如果$A$，$B$，$C$，$D$是线性算子，$C$是满射，$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$，则$(A/B)u=f$的解是$u=C\phi$，其中$\phi$满足方程$D\phi=f$。

**推论4** 如果$A$，$B$是线性算子，$AB=BA$，并且满足$A\mathrm{Ker}B=\mathrm{Ker}B$，则$Au=Bv$满足条件$u\in BM$的一般解为$u=B\phi$，$v=A\phi$。

按照上述定理，只要求出两个算子$C$和$D$满足$AC=BD$，就可以得到$Au=Bv$的解，下面我们针对线性偏微分算子的情形研究前述定理中的条件$AC=BD$。

设$A$是系数充分光滑的线性偏微分算子，可以将$A$写成

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha(x)D^\alpha$$

其中$x=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$是多重指标，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$，

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_k^{\alpha_k}} \qquad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

记

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!, \qquad \binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_k}{\beta_k}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i}=\frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!} \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

用$E^k$表示$k$维坐标空间，设$\Omega$是$E^k$中的区域，$C^m(\Omega)$表示在$\Omega$上$m$次连续可微函数的集合，

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

假定函数$\phi\in C^m(\bar{\Omega})$，并在边界$\partial\Omega$附近为0，则有

$$\int_\Omega Au\cdot\phi d\Omega=\int_\Omega uA^*\phi d\Omega$$

其中
$$A^*=\sum_{|\alpha|\leqslant n}(-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta a_\alpha D^{\alpha-\beta}$$

$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$，$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$，$\alpha\geqslant\beta$表示对每个$i$，$\alpha_i\geqslant\beta_i$，称$A^*$为$A$的形式**共轭算子**.

由共轭算子定义我们可以给出构造$C$和$D$满足$AC=BD$的方法. 首先对给定的算子$A$和$B$，求出它们的共轭算子$A^*$和$B^*$，其次由公式$C^*A^*=D^*B^*$求出$C^*$和$D^*$，最后由共轭算子定义求出$C$和$D$.

现在我们的目标是按公式$C^*A^*=D^*B^*$求出$C^*$和$D^*$.设

$$A^*=\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha^*(x)D^\alpha, \quad B^*=\sum_{|\alpha|\leqslant n} b_\alpha^*(x)D^\alpha$$

其中$a_\alpha^*(x)$，$b_\alpha^*(x)$，$|\alpha|\leqslant n$是充分光滑的函数，假定

$$C^*=\sum_{|\beta|\leqslant m} c_\beta^*(x)D^\beta, \qquad D^*=\sum_{|\beta|\leqslant m} d_\beta^*(x)D^\beta$$

则

$$C^*A^*=\sum_{|\beta|\leqslant m} c_\beta^*\sum_{|\alpha|\leqslant n}\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}a_\alpha^*D^{\alpha+\gamma}$$

$$=\sum_{|l|\leqslant m+n}\left\{\sum_{|\beta|\leqslant m} c_\beta^*\sum_{\substack{\alpha+\gamma=l\\ \gamma\leqslant\beta\\ |\alpha|\leqslant n}}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}a_\alpha^*\right\}D^l$$

类似地

$$D^*B^*=\sum_{|l|\leqslant m+n}\left\{\sum_{|\beta|\leqslant m} d_\beta^*\sum_{\substack{\alpha+\gamma=l\\ \gamma\leqslant\beta\\ |\alpha|\leqslant n}}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}b_\alpha^*\right\}D^l$$

使$C^*A^*$和$D^*B^*$相同阶项的系数相等，我们有

$$\sum_{|\beta|\leqslant m}\left\{\sum_{\substack{\alpha+\gamma=l\\ \gamma\leqslant\beta\\ |\alpha|\leqslant n}}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}a^*_\alpha\right\}c^*_\beta=\sum_{|\beta|\leqslant m}\left\{\sum_{\substack{\alpha+\gamma=l\\ \gamma\leqslant\beta\\ |\alpha|\leqslant n}}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}b^*_\alpha\right\}d^*_\beta,\ |l|\leqslant m+n \tag{3}$$

(3)的方程数目依赖于$m$，$n$和$E^k$的维数$k$，算子$A^*$或$B^*$的项数最多是$\binom{n+k}{k}$，$C^*$或$D^*$的项数是$\binom{m+k}{k}$，由于$C^*A^*$或$D^*B^*$的最高阶是$m+n$，从而(3)的方程数目为$\binom{n+m+k}{k}$.

设$A$是矩阵$(a_{ij})$，$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$，其中$a_{ij}$是实数，$1\leqslant i,\ j\leqslant k$，由线性代数理论我们有

**引理1**　设（向量形式）

$$AX=0 \tag{4}$$

是齐次线性代数方程组，则方程组有非平凡解，当且仅当矩阵$A$的秩小于未知数的个数.

由于未知函数的个数是$2\binom{m+k}{k}$，(3)的方程个数是$\binom{n+m+k}{k}$，我们可以选择$m$使$2\binom{m+k}{k}>\binom{n+m+k}{k}$，由引理1，在某个固定点我们可以得到(3)的非平凡解. 由于在某个固定点，方程组(3)可以写成方程组(4)，因此在这个点处我们可以仅考虑方程组(4).

设$a_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant k)$是关于$x$的充分光滑的函数，则存在点$P$使在此点矩阵有最大秩$r$，不失一般性，设

$$\Delta=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1r}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2r}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{r1} & a_{r2}\cdots a_{rr}\end{bmatrix}$$

是在点$P$处使$\det(\Delta)\neq 0$的子矩阵，由引理1，在此点未知函数$x_1,\ \cdots,\ x_r$可以用其它函数$x_{r+1},\cdots,x_k$表示，这里$x_{r+1},\cdots,x_k$可以任意选择，设$x_{r+1}=u_{r+1}\det(\Delta),\cdots,\ x_k=u_k\det(\Delta)$，其中$u_{r+1},\ \cdots,\ u_k$是任意充分光滑的函数，则

$$x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_r & a_{r2} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix},\ \cdots,\ x_r=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,r-1} & b_1\\ a_{21} & \cdots & a_{2\,r-1} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{r\,r-1} & b_r\end{vmatrix} \tag{5}$$

其中
$$b_i=-\sum_{s=r+1}^{k}a_{is}u_s\qquad (i=1,\ \cdots,\ r)$$

在$P$点，公式(5)是(4)的解，在域$\Omega$的其它点，公式(5)仍是(4)的解，从而可以将这个解扩展到整个域，因此我们得到整个域上的非平凡算子$C^*$和$D^*$.

综合上述结果得到如下的定理:

**定理2**　设$A$，$B$是系数充分光滑的线性偏微分算子，则存在系数充分光滑的线性偏微分算子$C$和$D$满足$AC=BD$，$C$和$D$的求法如上面所述.

**例2** 设

$$A=y\partial_x^2, \qquad B=x\partial_y^2$$

则

$$A^*=y\partial_x^2, \qquad B^*=x\partial_y^2$$

我们得到

$$C^*A^*=D^*B^*$$

$$C^*=x^3y^2\partial_y^2-2x^3y\partial_y+2x^3, \qquad D^*=x^2y^3\partial_x^2-2xy^3\partial_x+2y^3$$

则

$$C=x^3y^2\partial_y^2+6x^3y\partial_y+6x^3, \qquad D=x^2y^3\partial_x^2+6xy^3\partial_x+6y^3$$

条件$D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$及本文结果的应用将另外讨论。

## 参 考 文 献


[1] 张鸿庆，弹性力学方程组一般解的统一理论，大连工学院学报，3 (1978)，23—47.

[2] 张鸿庆，变系数弹性力学方程组的一般解，《第三次近代数学与力学讨论会论文集》(1989)，56—60.

[3] 王敏中，弹性通解和应力函数研究概况，力学进展，19，1 (1989)，65—72.


# Constructions of the General Solution for a System of Partial Differential Equations with Variable Coefficients


Zhang Hong-qing    Yang Guang

*(Dalian University of Technology, Dalian)*



**Abstract**

Solving partial differential equations has not only theoretical significance, but also practical value. In this paper, by the property of conjugate operator, we give a method to construct the general solutions of a system of partial differential equations.



**Key words** general solution, noncommutative ring, construction of solution, conjugate operator