

# 复合材料迭层板的非线性动力稳定性理论\*

周 承 倜

(大连大学工学院, 1990年2月24日收到)

## 摘 要

本文用 Hamilton 原理建立了复合材料迭层板动力稳定性的一般方程。用此方程可以考虑横向剪切变形、板的初始几何不完善性、纵向惯性力和转动惯性力、以及纤维的铺设角度等各种因素对于迭层板的动力稳定性的影响。所求得的基本方程的解表明迭层板的一些重要的动力失稳特征只有通过对这些因素的考虑和分析才能够得出。

**关键词** 复合材料 迭层板 动力稳定性

## 一、引 言

薄平板结构的动力失稳通常由两类载荷所引起。一类是平板承受面内高速压缩载荷(如冲击载荷)造成板的动力屈曲。另一类是平板承受与时间有关的面内边界位移或载荷(如定常或非定常的简谐变化载荷或随机载荷)造成板结构的动力失稳。结构受与时间有关载荷的动力稳定性问题首先是由 Hoff<sup>[1,2]</sup>, Бологин<sup>[3]</sup>, Vol'mir<sup>[4,5]</sup>等人研究的。冲击载荷下结构的动力屈曲是由 Ari-Gur, Babich, Brigadirov 等人研究的<sup>[6~8]</sup>。

复合材料迭层板的动力稳定性首先由 Birman 进行研究<sup>[9]</sup>。他分析了矩形迭层板在简支条件下的线性小挠度动力稳定性问题, 建议了一个确定非对称铺层的迭层板的不稳定区域的方法。此方法较简单但所考虑的因素太少, 所以结果是粗略的。Birman 等另一篇论文<sup>[10]</sup>考虑了横向剪切对动力稳定性的影响。Srinivasan 等<sup>[11]</sup>研究了复合材料平板的面内受参数振动载荷时的动力稳定性, 用样条有限元方法确定不稳定区域, 计算了几种不同铺设角的迭层板, 结果表明对称铺设的稳定性最优, 而当板的长宽比为某临界值时, 板有最小的动力稳定性。但是他们的基本方程是线性的, 所以没有涉及横向剪切变形和各种非线性因素的影响。

近期的论文集中于非线性因素和非定常情况的研究<sup>[12~16]</sup>。在[12]中 Birman 研究了具有初始缺陷的角铺设简支矩形迭层板, 在与时间有关的载荷作用下的动力稳定性问题。作为其特殊情况, 分析了“阶段”载荷(step load)的非定常情况。茅人杰<sup>[13]</sup>研究了定常情况下共振区的幅频曲线和非定常时激励频率穿越共振区的动力学性态。本文作者在[14]中分析了横向剪切、初始缺陷、纵向惯性力等各种因素对于角铺设迭层板的非线性动力稳定性的影

\* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(I)论文。

响。这一工作是论文[15]的继续。在[15]中研究了迭层板在压缩动力载荷下的参数共振，并确定了动力不稳定区域和定常参数振动的非线性大挠度解。本文将综合引述[14, 15]的工作，并采用Hamilton原理建立具有一般性的基本方程，方程中包括了横向剪切、初始缺陷、惯性力、阻尼、铺设角、几何非线性等各种因素，求得了基本方程的解。本文分析非线性动力稳定性的一般方法将可用于研究复合材料迭层板的动力屈曲性能中更为复杂的因素。

## 二、基本方程

复合材料迭层板为长宽为 $a \times b$ 厚度为 $h$ 的矩形板。直角坐标系 $xOy$ 位于板的参考面上<sup>[16]</sup>。在平板面内的外荷载为：

$$P_x = N_{0x} + N_{tx} \cos \theta_x t, \quad P_y = N_{0y} + N_{ty} \cos \theta_y t, \quad P_{xy} = N_{0xy} + N_{txy} \cos \theta_{xy} t \quad (2.1)$$

板内任意一点处的位移为：

$$\bar{u} = u + z \cdot \phi_x, \quad \bar{v} = v + z \cdot \phi_y, \quad \bar{w} = w \quad (2.2)$$

在引入初始缺陷因子： $\lambda = 1 + 2w_0/w$ 后<sup>[17]</sup>，几何方程为： $(w_0$ 为初始挠度)

$$\left. \begin{aligned} \{e\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \lambda(w_{,x})^2/2 \\ v_{,y} + \lambda(w_{,y})^2/2 \\ u_{,y} + v_{,x} + \lambda w_{,x} w_{,y} \\ \phi_{x,z} \end{Bmatrix} \\ \{k\} &= \begin{Bmatrix} k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} \{\gamma_{zx}\} &= \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中 $\phi_x$ 和 $\phi_y$ 为板的中面法线分别在 $x, y$ 方向的转角。物理方程为<sup>[16]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

外力势能 $V$ 和应变能 $U$ 为：

$$V = -P_x \int_0^a \int_0^b u_{,x} dx dy - P_y \int_0^a \int_0^b v_{,y} dx dy - P_{xy} \int_0^a \int_0^b (u_{,y} + v_{,x}) dx dy \quad (2.5)$$

$$U = \int_0^a \int_0^b (\{e\}^T [A] \{e\} + 2\{e\}^T [B] \{k\} + \{k\}^T [D] \{k\}) dx dy \quad (2.6)$$

板的动能 $T$ 为：（设 $\rho$ 为密度）

$$T = \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \rho [(\bar{u}_{,t})^2 + (\bar{v}_{,t})^2 + (\bar{w}_{,t})^2] dx dy \quad (2.7)$$

板的总势能为 $\Pi = V + U$ 。由Hamilton原理知：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0 \quad (2.8)$$

将上式分别对  $u, v, w, \phi_x, \phi_y$  进行变分, 得到迭层板的动力稳定性的一般方程:

$$\left. \begin{aligned} &-(\rho h^3/12)\phi_{x,tt} - Q_x + M_{x,z} + M_{xy,y} = 0 \\ &-(\rho h^3/12)\phi_{y,tt} - Q_y + M_{xy,x} + M_{y,y} = 0 \\ &N_{x,z} + N_{xy,y} - \rho h u_{,tt} = 0, \quad N_{xy,z} + N_{y,y} - \rho h v_{,tt} = 0 \\ &\lambda(N_x w_{,xz} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) + Q_{x,z} + Q_{y,y} + P_x \lambda w_{,xz} \\ &\quad + 2P_{xy} \lambda w_{,xy} + P_y \lambda w_{,yy} + \lambda(N_{x,z} w_{,xz} + N_{xy,z} w_{,xz} + N_{xy,y} w_{,y} \\ &\quad + N_{y,y} w_{,y}) - \rho h w_{,tt} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

### 1. 仅考虑初始几何缺陷的非线性动力稳定性方程

以四边简支正交对称铺设的迭层板为例, 其边界条件为:

$$x=0, w=M_x=u=N_{xy}=0; \quad y=0, b, w=M_y=v=N_{xy}=0 \quad (2.10)$$

$$x=a, w=M_x=N_{xy}=0, \quad \int_0^b N_x dy = -(N_0 + N_t \cos \theta t) b \quad (2.11)$$

略去纵向和转动惯性力及横向剪切效应, 可取<sup>[17]</sup>

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.12)$$

将上式代入基本方程 (2.10), 用伽辽金变分得到仅考虑初始几何缺陷的非线性动力稳定性方程:

$$\begin{aligned} f''(t) + \Omega^2(1 - 2\mu\phi\cos\theta t)f(t) + 2\gamma f_0^2 \cdot f(t) + 3\gamma f_0 f^2(t) + \gamma f^3(t) \\ = (\omega^2/N_{cr})(N_0 + N_t \cos\theta t)f_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

式中,  $\Omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{N_0}{N_{cr}}\right), \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{N_t}{N_{cr} - N_0}, \quad m = \rho h, \quad \alpha = a/b$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{m a^4} [D_{11} + \alpha^4 D_{22} + 2\alpha^2 (D_{12} + 2D_{66})]$$

$$\omega^2/N_{cr} = (\pi^2/m a^2)(1 + \alpha^2(A_{12}/A_{11}))$$

$$\gamma = (\pi^4/16 m a^4)(A_{11} + 3\alpha^2 A_{22}) \cdot (1 - (A_{12}^2/A_{11} A_{22}))$$

### 2. 考虑横向剪切变形的非线性动力稳定性方程

仍用边界条件 (2.11), 略去转动惯性力, 按 [11] 的方法考虑纵向惯性力, 并计及阻尼系数影响, 引入阻尼项  $(2\epsilon f'(t))$  和  $[2\epsilon_L f(t)(f'(t))^2]$ <sup>[31]</sup>, 得到考虑横向剪切效应的动力稳定性方程:

$$\begin{aligned} f''(t) + \Omega^2(1 - 2\mu\phi\cos\theta t) \cdot f(t) + 2k[f(t)f'(t) + (f'(t))^2] \cdot f(t) \\ + \gamma f^3(t) + 2\epsilon f'(t) + 2\epsilon_L f(t)[f'(t)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

式中,  $\Omega = \omega \sqrt{1 - N_0/N_{cr}}, \quad \omega^2 = \frac{\pi}{\rho h} \left[ \frac{A_{55}}{a} \left(\phi_1 + \frac{\pi}{a}\right) + \frac{A_{44}}{b} \left(\psi_1 + \frac{\pi}{b}\right) \right]$

$$N_{cr} = \frac{A_{11} b^2}{A_{12} \lambda \pi} \left[ \frac{A_{55}}{a} \left(\phi_1 + \frac{\pi}{a}\right) + \frac{A_{44}}{b} \left(\psi_1 + \frac{\pi}{b}\right) \right]$$

$$\gamma = \frac{\pi^4 \lambda^2}{16 \rho h} (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) \left( \frac{1}{\alpha^4 A_{22}} + \frac{3}{b^4 A_{11}} \right)$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{\beta} \left[ \frac{A_{55}}{a} \left( A_{44} + \frac{\pi^2}{b^2} D_{22} + \frac{\pi^2}{a^2} D_{66} \right) - \frac{A_{44}}{b} \left( \frac{\pi^2}{ab} D_{12} + \frac{\pi^2}{a^2} D_{66} \right) \right]$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{\beta} \left[ \frac{A_{44}}{b} \left( A_{55} + \frac{\pi^2}{a^2} D_{11} + \frac{\pi^2}{b^2} D_{66} \right) - \frac{A_{55}}{a} \frac{\pi^2}{ab} (D_{12} + D_{66}) \right]$$

$$k = - \frac{\pi^2 \lambda^2}{32} \left[ \frac{3A_{12}}{A_{11}b^2} + \frac{A_{12}}{A_{22}a^2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{3}{2b^2} \right]$$

$$\beta = \frac{\pi^4}{a^2 b^2} (D_{12} + D_{66})^2 - \left( A_{55} + \frac{\pi^2}{a^2} D_{11} + \frac{\pi^2}{b^2} D_{66} \right) \cdot \left( A_{44} + \frac{\pi^2}{b^2} D_{22} + \frac{\pi^2}{a^2} D_{66} \right)$$

$$\phi = \text{tg} \frac{\pi\theta}{2\omega_L} \left[ \frac{8\pi\omega_L}{\theta a^2} \left( 1 + \frac{b^2 A_{11}}{a^2 A_{12}} \right) - \rho h \frac{4\theta b^2 \omega_L}{\pi a^2 A_{12}} \right] / \left[ \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{\pi\theta}{2\omega_L a} \right)^2 \right] - \frac{b^2 A_{11}}{a^2 A_{12}}$$

$$\omega_L = \frac{\pi}{2a} \sqrt{A_{11}/\rho h}, \quad \mu = \frac{N_t}{2(N_{or} - N_0)}$$

这里,  $\phi_1$  和  $\psi_1$  表示横向剪切效应,  $\phi$  为纵向共振影响函数.

### 3. 角铺设迭层板的非线性动力稳定方程

以斜角对称铺设迭层板为例, 分析铺设角对动力稳定性能影响. 边界条件:

$$x=0, a; \quad w = M_x = \int_0^b v dy = 0, \quad \int_0^b N_x dy = -(N_{0x} + N_t \cos\theta t) b$$

$$y=0, b; \quad w = M_y = \int_0^a u dx = 0, \quad \int_0^a N_y dx = -(c_0 N_{0x} + c_t N_t \cos\theta t) a$$

略去转动惯性力和横向剪切效应, 将(2.12)代入基本方程(2.9)得到:

$$f''(t) + \Omega^2 (1 - 2\mu\phi \cos\theta t) f(t) + 2kf(t)[f(t)f''(t) + (f'(t))^2] + \gamma(f(t))^3 + 2\epsilon f'(t) + 2\epsilon_L f(t)[f'(t)]^2 = 0 \quad (2.15)$$

式中,  $\Omega = \omega \sqrt{1 - N_0/N_{or}}, \quad \mu = N_t/2(N_{or} - N_0)$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 ab}{8k_2} \left[ \frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right]$$

$$N_{or} = \frac{\pi^2 ab}{\lambda(b/a + c_0 a/b)} \left[ \frac{D_{11}}{a^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right]$$

$$\gamma = \frac{\lambda^2 \pi^4}{128 k_2} \left[ \frac{b}{a_{11} a^3} + \frac{a}{a_{22} b^3} \right]$$

$$k_1 = \frac{\pi^2 \lambda^2}{128} \rho h \left[ \frac{b^3 (a_{12}^2 + a_{16}^2)}{2a_{11}^2 a^3} + \frac{a^3 (a_{12}^2 + a_{26}^2)}{2a_{22}^2 b^3} - \frac{a_{12} a}{a_{22} b} - \frac{a_{12} b}{a_{11} a} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{5}{4}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \frac{13\pi^2}{3}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \Big] \\
 k &= k_1/2k_2, \quad k_2 = (\rho h/8) [((\pi h)^2/12)(b/a + a/b) + ab] \\
 k_3 &= \frac{\lambda \rho h}{16} \left[ \left( a_{12} - \frac{a_{16}a_{26}}{a_{66}} \right) (a_{12}b^3 + ab - \frac{13}{3}\pi^2 ab) \right. \\
 & \quad \left. + \left( a_{11} - \frac{a_{16}^2}{a_{66}} \right) (a_{12}a^3 + ab - \frac{13}{3}\pi^2 ab) \right] \cdot N_i \theta \\
 k_4 &= \frac{\lambda \rho h}{16} \left[ \left( a_{22} - \frac{a_{26}^2}{a_{66}} \right) (a_{12}b^3 + ab - \frac{13}{3}\pi^2 ab) \right. \\
 & \quad \left. + \left( a_{12} - \frac{a_{16}a_{26}}{a_{66}} \right) (a_{12}a^3 + ab - \frac{13}{3}\pi^2 ab) \right] c_i N_i \theta
 \end{aligned}$$

其中,  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) 为刚度阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$  的诸元素.

### 三、非线性动力稳定性方程的解

#### 1. 具有初始缺陷的非线性稳定方程的解

方程(2.13)是强迫振动方程, 只能有周期为  $T$  的解. 取解为

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right)$$

代入方程式 (2.13), 利用 Liapounof 原理, 并略去不稳定解, 即得到:

$$\left. \begin{aligned}
 (1 + \frac{2\gamma}{\Omega^2} f_0^2) b_0 - \mu A + \frac{3\gamma}{2\Omega^2} (f_0 + b_0) A^2 &= N_{cr} \frac{N_0}{N_0} f_0 \\
 -2\mu b_0 + \frac{\theta\gamma}{\Omega^2} f_0 b_0 A + (1 - 4n^2 + \frac{2\gamma}{\Omega^2} f_0^2 + \frac{3\gamma}{4\Omega^2} A^2) A &= 2\mu f_0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

根据以上的方程 (3.1), 可以得出  $A \sim (\theta/\Omega)$ ,  $A \sim f_0$ ,  $(b_0 + f_0) \sim f_0$  等曲线<sup>[14]</sup>. 图 1 示出了  $A \sim (\theta/\Omega)$  曲线; 从图中可以看出, 当  $\theta$  增大到某一数值时, 振幅  $A$  迅速增大. 当初始缺陷挠度  $f_0$  增大时, 动力挠度也增大. 当干扰频率的数值较大时, 微小的初始缺陷影响可以忽略不计.

#### 2. 考虑横向剪切效应的非线性动力稳定性方程的解

由于引入初始缺陷, 方程 (2.14) 不是参数共振方程. 现将初始缺陷作为与主要参数共振具有相同振型的初振型; 即  $\lambda = \text{const}$ , 这时方程 (2.14) 可以作为一个参数振动方程, 此

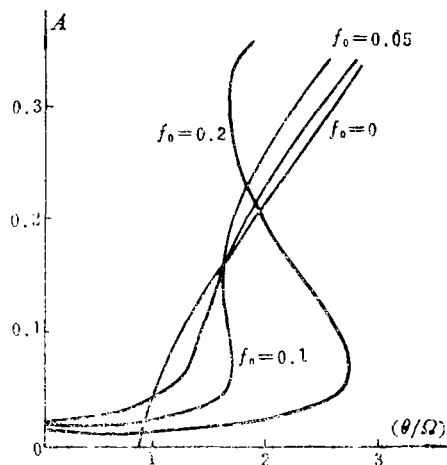


图 1

方程的解只可能是主要参数振动解，也即周期为 $2T$ 的解：

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right)$$

代入方程 (2.14) 中，略去各谐波项可得到一组关于系数 $a_1$ 和 $b_1$ 的代数方程组：

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu\phi - n^2)a_1 - \frac{n\Delta}{\pi} b_1 + \left( \frac{3\gamma}{4\Omega^2} a_1 - \frac{n\Delta_L}{\pi} b_1 - kn^2 a_1 \right) A^2 &= 0 \\ (1 - \mu\phi - n^2)b_1 + \frac{n\Delta}{\pi} a_1 + \left( \frac{3\gamma}{4\Omega^2} b_1 + \frac{n\Delta_L}{\pi} a_1 - kn^2 b_1 \right) A^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

上式中， $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}$ ， $\Delta_L = \frac{2\pi\varepsilon_L}{\Omega}$ ， $A^2 = a_1^2 + b_1^2$

方程组 (3.2) 的线性近似式决定了它的主要动力不稳定性区域，其数值解在图 2 中示出。主参数振动的振幅解为：

$$A = \left\{ \left[ p(1-n^2) - \frac{n^2}{\pi^2} \Delta \Delta_L \right. \right. \\ \left. \left. \pm \sqrt{\mu^2 \phi^2 \left( p^2 + \frac{n^2}{\pi^2} \Delta_L^2 \right) - \frac{n^2}{\pi^2} (p\Delta + \Delta_L + \Delta_L n^2)^2} \right] / \left( p^2 + \frac{n^2}{\pi^2} \Delta_L^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

式中， $p = kn^2 - (3\gamma/4\Omega^2)$ 。由图 2 中可知，横向剪切效应使纵向共振区域更加远离参数共振区域，减少了这二个振动区域的迭加程度。因为横剪效应使板变柔，因而 $N_{cr}$ 和 $\omega$ 降低，从而导致 $\Omega$ 降低而纵向共振频率 $n_L = \omega_L/2\Omega$ 增大。在此意义上，横向剪切效应增加了迭层板的动力稳定性能。但是另一方面， $N_{cr}$ 降低使激发系数 $\mu^*$ 增大，从而使不稳定区域变宽，这是横剪效应对动力稳定性的不利因素。因此需要进行综合分析。

### 3. 角铺设迭层板的非线性动力稳定方程的解

采用 $\lambda = \text{const}$ 的方法处理初始缺陷，方程(2.15)只有主要参数振动的解，其代数方程的形式与式(3.2)相同，由此可以作出 $\mu^* \sim \alpha$ ， $A_{\max} \sim \alpha$ ， $L_{\max} \sim \alpha$ 的关系曲线如图 3, 4, 5 所示。 $\mu^*$ 为临界激发系数， $A_{\max}$ 为最大振幅， $L_{\max}$ 为主要参数振动的最大牵引深度， $\alpha$ 为铺设角。由图知临界激发系数越大动力稳定性能越好，所以 $\alpha = 0^\circ$ 最好。在 $\alpha = 45^\circ$ 时， $A_{\max}$ 最大，对动力稳定性能最不利，同时 $L_{\max}$ 最小，对动力稳定性能却是有利的。综合分析以上因素，纤维铺设方向越接近受力方向 $\alpha \approx 0^\circ$ ，迭层板的动力稳定性的性能越好。图 2 所用材料列于表 1，图 3, 4, 5 所用材料列于表 2。

表 1 炭/环氧树脂材料常数 (用于图 2)

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{31}$ (GPa)	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$\mu_{12}$	$\alpha$ (mm)	$b$ (mm)	$h$ (mm)
206	10.3	6.2	4.13	6.2	1.6	0.28	150	100	2

表 2 玻璃环氧树脂材料常数 (用于图 3, 4, 5)

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$\mu_{12}$	$\nu_f$	$\alpha$ (mm)	$b$ (mm)	$h$ (mm)
$0.35 \times 10^5$	$0.102 \times 10^5$	$0.45 \times 10^4$	1.86	0.33	0.50	150	100	1.2

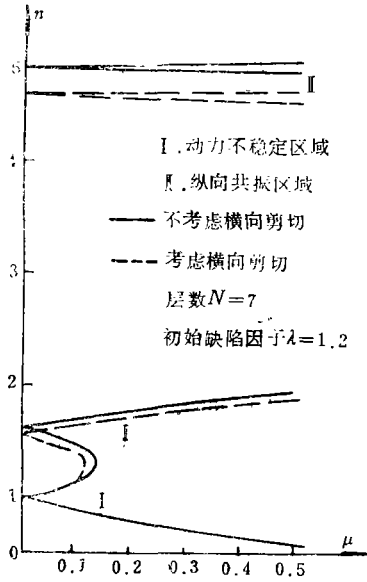


图 2

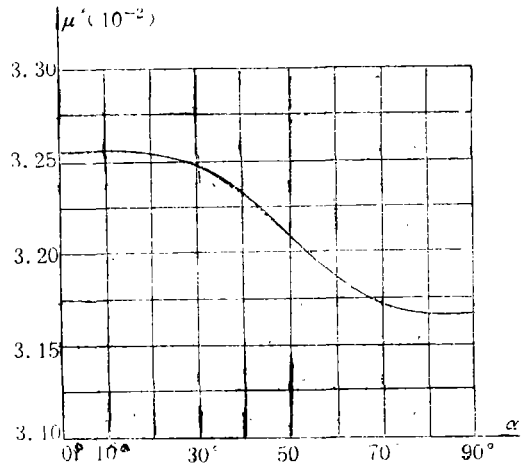


图 3

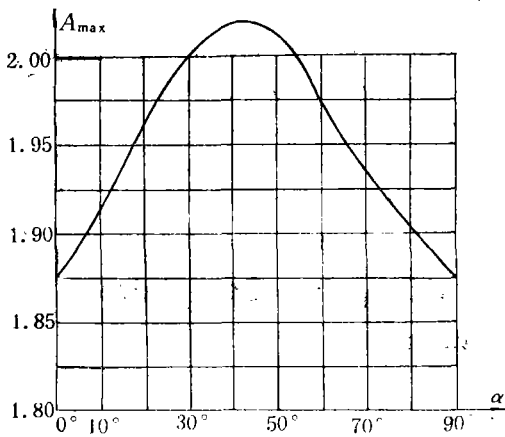


图 4

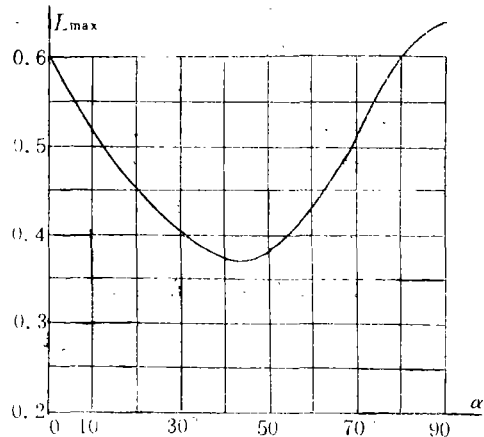


图 5

参 考 文 献

[1] Hoff, N. J., The dynamics of the buckling of elastic columns, *ASME J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 68—74.

[2] Hoff, N. J., Dynamic stability of structures, *Dynamic Stability of Structures*, Ed. G. Hermann, Pergamon Press, Oxford (1967), 7—64.

[3] Болотин В. В., *Динамическая Устойчивость Упругих Систем*, Государственное Издательство Техничко-Теоретической Литературы (1956). 鲍洛金著, 《弹性体系的动力稳定性》, 林砚田译, 高等教育出版社 (1960).

[4] Vol'mir, A. S., *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*, Nauka, Moscow (1967).

[5] Vol'mir, A. S., *Stability of Deformable Systems*, Nauka, Moscow (1967).

[6] Ari-Gur, J., T. Weller and J. Singer, Experimental and theoretical studies of columns under axial impact, *Int. J. Solids Struct.*, 18 (1982), 619—641.

- [ 7 ] Babich, D. V. and L. P. Khoroshun, Dynamic loss of stability of an instantaneously compressed layered cylindrical shells, *Soviet Appl. Mech.*, **16** (1981), 568—590.
- [ 8 ] Brigadirov, G. V. and L. A. Tolokonnikov, Impact of a cylindrical shell against a rigid barrier, *Mech. Solids*, **18** (1983), 179—181.
- [ 9 ] Birman, V., Dynamic stability of unsymmetrically laminated rectangular plates, *Mechanics Research Communication*, **12** (1985), 81—86.
- [10] Bert, C. W. and V. Birman, Dynamic instability of shear deformable antisymmetric angle-ply plates, *Int. J. Solids Structures*, **23**, 7 (1987), 1053—1061.
- [11] Srinivasan, R. S. and P. Chellapandi, Dynamic stability of rectangular laminated composite plates, *Computers and Structures*, **24**, 2 (1986), 233—238.
- [12] Birman, V., Problems of dynamic buckling of antisymmetric rectangular laminates, *Composite Structures*, **12** (1989), 1—15.
- [13] Mao Ren-jie, Dynamic stability of shear deformable orthotropic rectangular plates, *Proceedings of ICCM-VII*, **3** (1989).
- [14] Zhou Cheng-ti, Wang Li-tung and Jia Hong-yu, The influence of transverse shear and rotational inertia on the dynamic instability of laminated composite plates, *Proceedings of ICCM-VII*, **3** (1989).
- [15] Zhou Cheng-ti and Wang Li-tung, An analysis of dynamic instability on laminated composite plates, *4th Intern. Conf. of Composite Structures (ICCS-4)*, Paisley Institute of Technology, Scotland, July 27—29 (1987).
- [16] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill (1975).
- [17] 周承倜, 《薄壳弹塑性稳定性理论》, 国防工业出版社 (1979).

## Theory of Nonlinear Dynamic Stability for Composite Laminated Plates

Zhou Cheng-ti

(Institute of Technology, Dalian University, Dalian)

### Abstract

In this paper, the general equations of dynamic stability for composite laminated plates are derived by Hamilton principle. These general equations can be used to consider those different factors that affect the dynamic stability of laminated plates. The factors are transverse shear deformation, initial imperfections, longitudinal and rotational inertia, and ply-angle of the fiber, etc. The solutions of the fundamental equations show that some important characteristics of the dynamic instability can only be got by the consideration and analysis of those factors.

**Key words** composite materials, laminated plates, dynamic stability