应用数学和力学，第12卷第5期（1991年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

双参数弹性地基上圆底扁球壳的非线性弯曲*

林家骥　惠兴中　曹爱群

（西安冶金建筑学院，1990年3月27日收到）

摘　　要

本文从 Kármán 型非线性基本微分方程出发，提出了将修正迭代法和伽辽金法联合应用，分析了Pasternak弹性地基上周边固定凹圆底扁球壳在均匀压力作用下的非线性弯曲问题，给出了荷载与挠度间的数学表达式，其所得结果与已有文献结果吻合较好，且简明、计算量小。

关键词　扁球壳/弹性地基　非线性弯曲　修正迭代法　伽辽金法

一、前　　言

弹性地基上的圆底扁球壳在现代工程结构中有其广泛的应用。如大型容器、水池、储油罐和建筑物地下壳体基础结构等。而这些结构在实际使用时发生大变形的可能性非常大，对于分析它们的非线性问题已为人们所关注。Sinha[1,2]和Datta[3]用Berger假定分别解决了弹性地基上圆底扁球壳及圆板的大挠度问题，但由于Berger假定有一定的局限性[4]，因此有必要寻求新的方法解决这一问题。叶开沅、刘人怀等[5,6,7]用修正迭代法解决了圆底扁球壳的非线性稳定问题。Datta[8]用Galerkin 法解决了弹性地基上各向异性椭圆板的大挠度问题。对于弹性地基上的扁球壳问题，修正迭代法会遇到一定困难，而Galerkin法又存在着求解非线性方程组的问题。本文研究结果表明，采用修正迭代法和Galerkin法的联合法很好地解决了这一问题。

二、基本方程及其求解

对于弹性地基上扁球壳的非线性问题，Kármán型非线性基本微分方程组如下：

$$D\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}-G_M\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}+K_p rw$$

$$=\frac{d}{dr}\left[rN_r\left(\frac{dw}{dr}-rK_r\right)\right]+qr \tag{2.1}$$

---

* 徐次达推荐。

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2N_r)=-\frac{Eh}{2r}\left[-2K_r r\frac{dw}{dr}+\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right] \tag{2.2}$$

其中　D为抗弯刚度，E为弹性模量，w为挠度，N_r为中曲面径向力，K_r为曲率，K_P、G_M为地基参数，h为扁球壳厚度，q为荷载。

下面考虑边界条件，设扁球壳的底面半径为a：

$$r=0,\quad \frac{dw}{dr}=0,\quad N_r\text{有限} \tag{2.3}$$

$$r=a,\quad u=0,\quad w=0,\quad \frac{dw}{dr}=0 \tag{2.4}$$

其中　u为径向位移。

为了简化计算，将基本微分方程组无量纲化，下面引进无量纲量：

$x=r/a$；　$y=w\sqrt{12(1-\mu^2)}/h$；

$G=a^2G_M/D$；$K=a^4K_P/D$；

$Q=qa^4\sqrt{12(1-\mu^2)}/Dh$；$S=a^2xN_r/D$；

$K_1=a^2\sqrt{12(1-\mu^2)}/Rh=K_ra^2\sqrt{12(1-\mu^2)}/h$

此时(2.1)、(2.2)变为：

$$\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{dy}{dx}-G\frac{d}{dx}x\frac{dy}{dx}+Kxy$$

$$=\frac{d}{dx}\left[S\left(\frac{dy}{dx}-K_1x\right)\right]+Qx \tag{2.5}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xS)=K_1x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{2.6}$$

相应的边界条件为

$$x=1,\quad y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0,\quad x\frac{dS}{dx}-\mu S=0 \tag{2.7}$$

$$x=0,\quad \frac{dy}{dx}=0,\quad S=0 \tag{2.8}$$

因此本问题就是在边界条件(2.7)、(2.8)下求方程(2.5)和(2.6)的解。

文中选取壳体中心的无量纲挠度$y_0=wh^{-1}\sqrt{12(1-\mu^2)}\,|_{r=0}$作为迭代参数，用修正迭代法和Galerkin法联合求解。取迭代格式如下：

$$\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{dy_n}{dx}-G\frac{d}{dx}x\frac{dy_n}{dx}+Kxy_n$$

$$=\frac{d}{dx}\left[S_{n-1}\left(\frac{dy_n}{dx}-K_1x\right)\right]+Qx \tag{2.9}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xS_n)=K_1x\frac{dy_n}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 \tag{2.10}$$

这样就把问题的基本微分方程和边界条件构成的非线性边值问题化为一系列线性边值问题。

对于方程(2.9)难以直接积分，因此本文采用伽辽金法用幂级数进行近似求解。

在一次近似中，有下列边值问题：

$$\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{dy_1}{dx}-G\frac{d}{dx}x\frac{dy_1}{dx}+Kxy_1=Qx \tag{2.11}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xS_1)=K_1x\frac{dy_1}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \tag{2.12}$$

边界条件为:

$$x=1,\ y=0,\ \frac{dy_1}{dx}=0,\ \frac{dS_1}{dx}-\mu S_1=0 \tag{2.13}$$

$$x=0,\ y_1=y_0,\ \frac{dy_1}{dx}=0,\ S_1=0 \tag{2.14}$$

假定y_1的形式为:

$$y_1=a_0(1-2x^2+x^4)+a_2(x^2-2x^4+x^6) \tag{2.15}$$

将(2.15)式代入(2.11)式并进行Galerkin积分，同时整理得y_1的形式为:

$$y_1=y_0[(1-2x^2+x^4)+a_{21}(x^2-x^4+x^6)] \tag{2.16}$$

其中 $a_{21}=\dfrac{2G+K/6}{72+G+K/84}$

将(2.16)代入(2.12)进行积分，同时考虑边界条件可得S_1的表达式:

$$\begin{aligned}S_1=K_1y_0&\left[\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)+a_{21}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{8}x^7\right)+V_1x\right]\\&-y_0^2\left[\left(1-a_{21}+\frac{1}{4}a_{21}^2\right)x^3+\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}a_{21}-\frac{2}{3}a_{21}^2\right)x^5\right.\\&+\left(\frac{1}{6}-\frac{7}{6}a_{21}+\frac{11}{12}a_{21}^2\right)x^7+\left(\frac{3}{10}a_{21}-\frac{3}{5}a_{21}^2\right)x^9\\&\left.+\frac{3}{20}a_{21}^2x^{11}+V_2x\right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $V_1=\left[\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\mu+a_{21}\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{24}\mu\right)\right]\Big/(1-\mu)$

$$V_2=\left[-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\mu+a_{21}\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{5}\mu\right)-a_{21}^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\mu\right)\right]\Big/(1-\mu)$$

在二次近似中，有下列边值问题:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{dy_2}{dx}-G\frac{d}{dx}x\frac{dy_2}{dx}+Kxy_2\\&=\frac{d}{dx}\left[S_1\left(\frac{dy_1}{dx}-K_1x\right)\right]+Qx\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xS_2)=K_1x\frac{dy_2}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 \tag{2.19}$$

边界条件为 $x_1=0,\ y_2=0,\ \dfrac{dy_2}{dx}=0,\ \dfrac{dS_2}{dx}-\mu S_2=0$ (2.20)

$$x=0,\ y_2=y_0,\ \frac{dy_2}{dx}=0,\ S_2=0 \tag{2.21}$$

设y_2的形式为 $y_2=(1-x^2)^2\sum\limits_{i=0,2}^{10}b_ix^i$ (2.22)

将(2.22)式代入(2.18)式并进行Galerkin 积分，可得以 b_i 为未知量的代数方程组的矩阵形式如下:

$$
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\
C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\
C_{13} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\
C_{14} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\
C_{15} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\
C_{16} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_6 \\ b_8 \\ b_{10} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_8 \\ C_{10} \end{Bmatrix}
\tag{2.23}
$$

其中 $C_{ij}(i,j=1,2,\cdots,6)$ 均为K、G的函数；$C_m(0,2,\cdots,10)$为Q、K_1、y_0、a_{21}的函数。