应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线弹性微孔材料广义变分原理的构造函数理论*

皮道华　金莉华

（华中理工大学，1989年12月18日收到）

摘　要

本文应用构造函数理论得到线弹性微孔材料的广义变分原理，得到构造函数与广义变分原理之间的对应关系．

关键词　构造函数　微孔　变分原理

微孔弹性材料的非线性理论由Nunziato和Cowin[1]建立的，在文献[2]中，Cowin和Nunziato建立了微孔材料的线弹性理论．在本文中，我们建立了构造函数理论和单值化条件，假如u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，φ，Φ_i，h_i，g全部独立变化，我们从构造函数得到广义变分原理的泛函表达式，给出了构造函数与广义变分原理之间的对应关系．构造函数方法与通常基于能量的广义变分原理的方法是不同的[3][4][5][6]．

一、基本方程和构造函数

令V为正则区域，∂B为其曲面，x_i（$i=1, 2, 3$）为直角坐标变量，对微孔线弹性材料静力学必须满足下列方程组

$$\left.\begin{aligned}
&g_1^i=\sigma_{ij,j}+F_i=0,\quad g_2^{ij}=\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2=0\\
&g_3=h_{i,i}+g+l=0,\quad g_4^i=\Phi_i-\varphi_{,i}=0\\
&g_5^{ij}=C_{ijrs}\varepsilon_{rs}+D_{ijs}\Phi_s+B_{ij}\varphi-\sigma_{ij}=0\\
&g_6^i=A_{ij}\Phi_j+D_{rsi}\varepsilon_{rs}+b_i\varphi-h_i=0\\
&g_7=\xi\varphi+B_{ij}\varepsilon_{ij}+b_i\Phi_i+g=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其基本变量为u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，φ，Φ_i，h_i，g，其材料常数C_{ijrs}，A_{ij}，B_{ij}和D_{ijr}满足下列条件：

$$C_{ijrs}=C_{rsij}=C_{jirs},\quad B_{ij}=B_{ji},\quad A_{ij}=A_{ji},\quad D_{ijr}=D_{jir}\tag{1.2}$$

边界条件为：

---

* 叶开沅推荐．

$$\left.\begin{array}{llll} u_i=\bar{u}_i & x\in S_u; & p_i=\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i & x\in S_p \\ \varphi=\bar{\varphi} & x\in S_\varphi; & h=h_in_i=\bar{h} & x\in S_h \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

令 $$L=L(u_i,u_{i,j},\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\sigma_{ij,m},\varphi,\Phi_i,\varphi_{,i},h_i,h_{i,m},g) \tag{1.4}$$

满足下列方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial L/\partial u_i-(\partial L/\partial u_{i,j})_{,j}=A_{11}^{ir}g_1^r+A_{12}^{irs}g_2^{rs}+A_{13}^{i}g_3+A_{14}^{ir}g_4^r\\
&\qquad +A_{15}^{irs}g_5^{rs}+A_{16}^{ir}g_6^r+A_{17}g_7\\
&\partial L/\partial\varepsilon_{ij}=A_{21}^{ijr}g_1^r+A_{22}^{ijrs}g_2^{rs}+A_{23}^{ij}g_3+A_{24}^{ijr}g_4^r+A_{25}^{ijrs}g_5^{rs}\\
&\qquad +A_{26}^{ijr}g_6^r+A_{27}^{ij}g_7\\
&\partial L/\partial\sigma_{ij}-(\partial L/\partial\sigma_{ij,m})_{,m}=A_{31}^{ijr}g_1^r+A_{32}^{ijrs}g_2^{rs}+A_{33}^{ij}g_3+A_{34}^{ijr}g_4^r\\
&\qquad +A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7\\
&\partial L/\partial\varphi-(\partial L/\partial\varphi_{,i})_{,i}=A_{41}^{i}g_1^i+A_{42}^{ij}g_2^{ij}+A_{43}g_3+A_{44}^{i}g_4^i\\
&\qquad +A_{45}^{ij}g_5^{ij}+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7\\
&\partial L/\partial\Phi_i=A_{51}^{ir}g_1^r+A_{52}^{irs}g_2^{rs}+A_{53}^{i}g_3+A_{54}^{ir}g_4^r+A_{55}^{irs}g_5^{rs}\\
&\qquad +A_{56}^{ir}g_6^r+A_{57}^{i}g_7\\
&\partial L/\partial h_i-(\partial L/\partial h_{i,m})_{,m}=A_{61}^{ir}g_1^r+A_{62}^{irs}g_2^{rs}+A_{63}^{i}g_3+A_{64}^{ir}g_4^r\\
&\qquad +A_{65}^{irs}g_5^{rs}+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7\\
&\partial L/\partial g=A_{71}^{i}g_1^i+A_{72}^{ij}g_2^{ij}+A_{73}g_3+A_{74}^{i}g_4^i+A_{75}^{ij}g_5^{ij}\\
&\qquad +A_{76}^{i}g_6^i+A_{77}g_7
\end{aligned}\right\} \tag{1.5a～g}$$

则L称为构造函数[7]。

其中 A_{11}^{ir}, A_{32}^{ijrs}, A_{43}, A_{64}^{ir}为常数，其余系数A满足条件:（而且 A_{11}^{ir} 不全为零，A_{43}不为零）

$$A_{mn}^{irs}=A_{mn}^{isr},\quad A_{mn}^{ijrs}=A_{mn}^{rsij}=A_{mn}^{rsji} \tag{1.6}$$

而且矩阵 (A_{25}^{ijrs}), (A_{26}^{ijr}), (A_{27}^{ij}), (A_{55}^{irs}), (A_{56}^{ir}), (A_{57}^{i}), (A_{75}^{ij}), (A_{76}^{i}), (A_{77}) 构成行列式满足下式:

$$\begin{vmatrix} (A_{25}^{ijrs}) & (A_{26}^{ijr}) & (A_{27}^{ij}) \\ (A_{55}^{irs}) & (A_{56}^{ir}) & (A_{57}^{i}) \\ (A_{75}^{ij}) & (A_{76}^{i}) & (A_{77}) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad x\in V \tag{1.7}$$

引理 若 $L=L(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 定义在函数空间 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 上有二阶连续偏导数，而且:

$$\partial L/\partial y_i=\varphi_i(y_1,y_2,\cdots,y_n) \tag{1.8}$$

则L在空间上单值的必要充分条件为:

$$\partial\varphi_i/\partial y_j=\partial\varphi_j/\partial y_i \tag{1.9}$$

由（1.5）式的(a)，(c)，(d)，(f)式可作分解式:

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial u_i=&A_{11}^{ir}F_r+A_{12}^{irs}g_2^{rs}+A_{13}^{i}g_3+A_{14}^{ir}g_4^r+A_{15}^{irs}g_5^{rs}\\&+A_{16}^{ir}g_6^r+A_{17}g_7\\\partial L/\partial u_{i,j}=&-A_{11}^{ir}\sigma_{rj}\end{aligned}\right\}\tag{1.10a,b}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial\sigma_{ij}=&A_{31}^{ijr}g_1^r+A_{32}^{ijrs}\varepsilon_{rs}+A_{33}^{ij}g_3+A_{34}^{ijr}g_4^r+A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}\\&+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7\\\partial L/\partial\sigma_{ij,m}=&A_{32}^{ijrm}u_r\end{aligned}\right\}\tag{1.11a,b}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial\varphi=&A_{41}^{i}g_1^i+A_{42}^{ij}g_2^{ij}+A_{43}(g+l)+A_{44}^{i}g_4^i+A_{45}^{ij}g_5^{ij}\\&+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7\\\partial L/\partial\varphi_{,i}=&-A_{43}h_i\end{aligned}\right\}\tag{1.12a,b}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial h_i=&A_{61}^{ir}g_1^r+A_{62}^{irs}g_2^{rs}+A_{63}^{i}g_3+A_{64}^{ir}\Phi_r+A_{65}^{irs}g_5^{rs}\\&+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7\\\partial L/\partial h_{i,m}=&A_{64}^{im}\varphi\end{aligned}\right\}\tag{1.13a,b}$$

显然，满足分解式（1.10)～(1.13）式的方程组也满足方程组（1.5）式，即函数 L 也是构造函数。

若L为单值的构造函数，有如下的定理。

定理1 若L为单值的构造函数，满足方程(1.5)式和分解式(1.10)、(1.11)、(1.12)、(1.13)，则分解式（1.10)、(1.11）不能同时成立，(1.12)、(1.13）不能同时成立。

证明 根据 L 的定义，A_{11}^{ir} 不全为零，A_{43} 不为零，由于L为单值，由（1.10b）式和（1.11a）式，利用引理（1.9）式有：

$$\frac{\partial^2L}{\partial u_{i,j}\partial\sigma_{pq}}=-A_{11}^{ir}\sigma_{rj}^{pq}=\frac{\partial^2L}{\partial\sigma_{pq}\partial u_{i,j}}=0\tag{1.14}$$

由上式得到$A_{11}^{ir}=0$，而且对任意i,r都成立，这与A_{11}^{ir}不全为零相矛盾．由此证明了分解式（1.10）和（1.11）不能同时成立。

若（1.12)、(1.13）分解式同时成立，利用引理有：

$$\frac{\partial^2L}{\partial\varphi_{,i}\partial h_m}=-A_{43}\delta_i^m=\frac{\partial^2L}{\partial h_m\partial\varphi_{,i}}=0\tag{1.15}$$

由上式得到$A_{43}=0$，这与假设$A_{43}\neq0$矛盾．定理证毕。

以后我们只讨论有分解式的构造函数，由定理1得到的构造函数只有四类：

（1） 有分解式（1.10)、(1.12)，而且：

$$\left.\begin{aligned}&L=L(u_i,u_{i,j},\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\varphi,\varphi_{,i},\Phi_i,h_i,g)\\&\partial L/\partial\sigma_{ij,m}=0,\ \partial L/\partial h_{i,m}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.16a～c}$$

（2） 有分解式（1.11)，(1.12)，而且：

$$\left.\begin{aligned}&L=L(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\sigma_{ij,m},\varphi,\varphi_{,i},\Phi_i,h_i,g)\\&\partial L/\partial u_{i,j}=0,\ \partial L/\partial h_{i,m}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.17a～c}$$

（3） 有分解式（1.10)，(1.13)，而且：

$$\left.\begin{array}{l}L=L(u_i,u_{i,j},\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\varphi,\Phi_i,h_i,h_{i,m},g)\\ \partial L/\partial\sigma_{ij,m}=0,\ \partial L/\partial\varphi_{,i}=0\end{array}\right\}\qquad(1.18\text{a}\sim\text{c})$$

（4） 有分解式(1.11)、(1.13)，而且：

$$\left.\begin{array}{l}L=L(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\sigma_{ij,m},\varphi,\Phi_i,h_i,h_{i,m},g)\\ \partial L/\partial u_{i,j}=0,\ \partial L/\partial\varphi_{,i}=0\end{array}\right\}\qquad(1.19\text{a}\sim\text{c})$$

二、单值构造函数的方程组

定理2 若L为第一类单值构造函数，则L满足下列方程：

$$\left.\begin{array}{l}\partial L/\partial u_i=aF_i,\ \partial L/\partial u_{i,j}=-a\sigma_{ij}\\ \partial L/\partial\varepsilon_{ij}=A_{25}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{26}^{ijr}g_6^r+A_{27}^{ij}g_7\\ \partial L/\partial\sigma_{ij}=A_{32}^{ijrs}g_2^{rs}+A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7\end{array}\right\}\qquad(2.1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\partial L/\partial\varphi=A_{43}(g+l)+A_{45}^{ij}g_5^{ij}+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7\\ \partial L/\partial\varphi_{,i}=-A_{43}h_i\\ \partial L/\partial\Phi_i=A_{55}^{irs}g_5^{rs}+A_{56}^{ir}g_6^r+A_{57}^{i}g_7\\ \partial L/\partial h_i=A_{64}^{ir}g_4^r+A_{65}^{irs}g_5^{rs}+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7\end{array}\right\}\qquad(2.2)$$

$$\partial L/\partial g=A_{75}^{ij}g_5^{ij}+A_{76}^{i}g_6^i+A_{77}g_7\qquad(2.3)$$

其中系数A满足下列方程：

$$\left.\begin{array}{l}A_{32}^{ijrs}=a\delta_{rs}^{ij},\quad A_{64}^{ir}=A_{43}\delta_r^i,\quad A_{36}^{ijr}-A_{65}^{rij}=0\\ A_{37}^{ij}+A_{75}^{ij}=0,\quad A_{67}^{i}+A_{76}^{i}=0\end{array}\right\}\qquad(2.4)$$

$$\left.\begin{array}{l}A_{32}^{pqij}+A_{35}^{pqrs}C_{rsij}+A_{36}^{pqr}D_{ijr}+A_{37}^{pq}B_{ij}+A_{25}^{ijpq}=0\\ A_{35}^{ijrs}B_{rs}+A_{36}^{ijr}b_r+A_{37}^{ij}\xi+A_{45}^{ij}=0\\ A_{34}^{ijm}+A_{35}^{ijrs}D_{rsm}+A_{36}^{ijr}A_{rm}+A_{37}^{ij}b_m+A_{55}^{mij}=0\\ A_{45}^{ij}D_{ijm}+A_{46}^{i}A_{im}+A_{47}b_m-A_{55}^{mrs}B_{rs}-A_{56}^{mr}b_r-A_{57}^{m}\xi=0\\ -A_{25}^{ijrs}B_{rs}-A_{26}^{ijr}b_r-A_{27}^{ij}\xi+A_{45}^{rs}C_{rsij}+A_{46}^{r}D_{ijr}+A_{47}B_{ij}=0\\ -A_{25}^{ijrs}D_{rsm}-A_{26}^{ijr}A_{rm}-A_{27}^{ij}b_m+A_{55}^{mrs}C_{rsij}+A_{56}^{mr}D_{ijr}+A_{57}^{m}B_{ij}=0\\ A_{26}^{ijm}+A_{65}^{mrs}C_{rsij}+A_{66}^{mr}D_{ijr}+A_{67}^{m}B_{ij}=0\\ A_{46}^{m}+A_{65}^{mrs}B_{rs}+A_{66}^{mr}b_r+A_{67}^{m}\xi=0\\ A_{56}^{im}+A_{64}^{mi}+A_{65}^{mrs}D_{rsi}+A_{66}^{mr}A_{ri}+A_{67}^{m}b_i=0\\ A_{26}^{ijrs}C_{rspq}+A_{26}^{ijr}D_{pqr}+A_{27}^{ij}B_{pq}=A_{25}^{pqrs}C_{rsij}+A_{26}^{pqr}D_{ijr}+A_{27}^{pq}B_{ij}\\ -A_{27}^{ij}+A_{76}^{rs}C_{rsij}+A_{76}^{r}D_{ijr}+A_{77}B_{ij}=0\\ -A_{43}-A_{47}+A_{75}^{ij}B_{ij}+A_{76}^{i}b_i+A_{77}\xi=0\end{array}\right\}\qquad(2.5)$$

$$\left.\begin{aligned}&-A^{i}_{57}+A^{rs}_{75}D_{rsi}+A^{r}_{76}A_{ri}+A_{77}b_i=0\\&A^{irs}_{55}D_{rsm}+A^{ir}_{56}A_{rm}+A^{i}_{57}b_m=A^{mrs}_{55}D_{rsi}+A^{mr}_{56}A_{ri}+A^{m}_{57}b_i\end{aligned}\right\}$$

证明 由L的单值性，满足引理的（1.9）式，取（1.16a）和（1.5b）有：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\sigma_{pq,m}}=A^{ijr}_{21}\ \delta^{pq}_{rm}=\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_{pq,m}\partial\varepsilon_{ij}}=0$$

则有 $A^{ijr}_{21}=0$ (2.6)

利用相同的方法，可得到：

$$A^{ijr}_{31}=A^{i}_{41}=A^{ir}_{51}=A^{ir}_{61}=A^{i}_{71}=0 \tag{2.7}$$

取（1.16b）式和（1.10a）式，利用引理：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_i\partial h_{p,m}}=A^{i}_{13}\delta^{pm}_{mm}=\frac{\partial^2 L}{\partial h_{p,m}\partial u_i}=0$$

则有 $A^{i}_{13}=0$ (2.8)

同理可证：

$$A^{ij}_{23}=A^{ij}_{33}=A^{i}_{53}=A^{i}_{63}=A_{73}=0 \tag{2.9}$$

取（1.10b）式和（1.10a）式有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_i\partial u_{p,q}}=-A^{irs}_{12}\ \delta^{pq}_{rs}=\frac{\partial^2 L}{\partial u_{p,q}\partial u_i}=0$$

则有 $A^{irs}_{12}=0$ (2.10)

利用（1.10b）式，同样可得到：

$$A^{ijrs}_{22}=A^{ij}_{42}=A^{irs}_{52}=A^{irs}_{62}=A^{ij}_{72}=0 \tag{2.11}$$

但是 $A^{ijrs}_{32}\neq 0$

取分解式（1.12b）式和（1.10a）式则有：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_i\partial\varphi_{,m}}=-A^{ir}_{14}\ \delta^{m}_{r}=\frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_{,m}\partial u_i}=0$$

则有 $A^{ir}_{14}=0$ (2.12)

利用（1.12b）式和同样方法得到：

$$A^{ijr}_{24}=A^{ijr}_{34}=A^{i}_{44}=A^{ir}_{54}=A^{i}_{74}=0 \tag{2.13}$$

但是，A^{ir}_{64}不为零。利用（1.12b）式和（1.5f）式有：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_{,i}\partial h_m}=-A_{43}\delta^{m}_{i}=\frac{\partial^2 L}{\partial h_m\partial\varphi_{,i}}=-A^{mr}_{64}\delta^{i}_{r}$$

则有

$$A^{mi}_{64}=A_{43}\delta^{m}_{i} \tag{2.14}$$

取（1.10b）式和（1.5c）式有：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_{i,j}\partial\sigma_{pq}}=-A^{ir}_{11}\ \delta^{pq}_{rj}=\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma_{pq}\partial u_{i,j}}=-A^{pqrs}_{32}\delta^{ij}_{rs}$$

则有 $A^{pqij}_{32}=A^{ir}_{11}\delta^{pq}_{rj}$ (2.15)

利用（1.6）式，容易证明上式可得出

$$A_{11}^{ir}=a\delta_r^i \tag{2.16}$$

和
$$A_{32}^{ijrs}=a\delta_{rs}^{ij} \tag{2.17}$$

对系数A满足的余下的方程组，只要重复利用引理的（1.9）式，容易得到（2.4）和(2.5)式，此处不再重复。由此，前述定理证毕。

对第二类构造函数，容易得到如下定理：

定理3 若L为第二类单值构造函数，则L满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned}&\partial L/\partial u_i=ag_1^i\\&\partial L/\partial\varepsilon_{ij}=A_{25}^{ijrs}g_2^{rs}+A_{26}^{ijr}g_6^r+A_{27}^{ij}g_7\\&\partial L/\partial\sigma_{ij}=A_{32}^{ijrs}\varepsilon_{rs}+A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7\\&\partial L/\partial\sigma_{ij,m}=A_{32}^{ijrm}u_r\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

和方程组（2.2）、(2.3）式，而且系数A满足方程组（2.4）、(2.5）式。

定理4 若L为第三类单值构造函数，则L满足方程（2.1）、(2.3）式和下列式子：

$$\left.\begin{aligned}&\partial L/\partial\varphi=A_{43}g_3+A_{45}^{ij}g_5^{ij}+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7\\&\partial L/\partial\Phi_i=A_{55}^{irs}g_5^{rs}+A_{56}^{ir}g_6^r+A_{57}^{i}g_7\\&\partial L/\partial h_i=A_{64}^{ir}\Phi_r+A_{65}^{irs}g_5^{rs}+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7\\&\partial L/\partial h_{i,m}=A_{64}^{im}\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

系数A满足方程组（2.4）和（2.5）式。

定理5 若L为第四类单值构造函数，则L满足方程（2.18）、(2.19）、(2.3）式，系数A满足方程（2.4）和（2.5）式。

三、构造函数对应的广义变分原理

定理6 当L_1为第一类单值构造函数，若u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，φ，Φ_i，h_i，g为有独立变分的自变函数，当泛函

$$\begin{aligned}\Pi_1=&\int_V L_1(u_i,\ u_{i,j},\ \varepsilon_{ij},\ \sigma_{ij},\ \varphi,\ \Phi_i,\ \varphi_{,i},\ h_i,\ g)dV\\&+\int_{S_u}a(u_i-\bar{u}_i)p_idS+\int_{S_p}a\bar{p}_iu_idS\\&+\int_{S_\varphi}A_{43}(\varphi-\bar{\varphi})hdS+\int_{S_h}A_{43}\bar{h}\varphi dS\end{aligned} \tag{3.1}$$

在点（u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，φ，Φ_i，h_i，g）上取驻值时，则u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，φ，Φ_i，h_i，g为微孔线弹性材料混合问题的解。

证明 由于Π_1取驻值，则有$\delta\Pi_1=0$，即

$$\begin{aligned}\delta\Pi_1=\int_V\Big[&\frac{\partial L_1}{\partial u_i}\delta u_i+\frac{\partial L_1}{\partial u_{i,j}}\delta u_{i,j}+\frac{\partial L_1}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+\frac{\partial L_1}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\\&+\frac{\partial L_1}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial L_1}{\partial\varphi_{,i}}\delta\varphi_{,i}+\frac{\partial L_1}{\partial\Phi_i}\delta\Phi_i+\frac{\partial L_1}{\partial h_i}\delta h_i+\frac{\partial L_1}{\partial g}\delta g\Big]dV\end{aligned}$$

$$+\int_{S_u}[a(u_i-\bar{u}_i)\delta p_i+ap_i\delta u_i]dS+\int_{S_p}a\bar{p}_i\delta u_i dS$$

$$+\int_{S_\varphi}[A_{43}(\varphi-\bar{\varphi})\delta h+A_{43}h\delta\varphi]dS+\int_{S_h}A_{43}\bar{h}\delta\varphi dS=0 \tag{3.2}$$

由于

$$\int_V\frac{\partial L_1}{\partial u_{i,j}}\delta u_{i,j}dV=\int_{\partial B}\frac{\partial L_1}{\partial u_{i,j}}n_j\delta u_i dS-\int_V\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_{i,j}}\right)_{,j}\delta u_i dV \tag{3.3}$$

$$\int_V\frac{\partial L_1}{\partial\varphi_{,i}}\delta\varphi_{,i}dV=\int_{\partial B}\frac{\partial L_1}{\partial\varphi_{,i}}n_i\delta\varphi dS-\int_V\left(\frac{\partial L_1}{\partial\varphi_{,i}}\right)_{,i}\delta\varphi dV \tag{3.4}$$

将 (3.3)、(3.4) 式代入 (3.2) 式，利用 (2.1)、(2.2)、(2.3) 式得到：

$$\begin{aligned}\delta\Pi_1=&\int_V[ag_1^i\delta u_i+(A_{25}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{26}^{ijr}g_6^r+A_{27}^{ij}g_7)\delta\varepsilon_{ij}\\&+(A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7+A_{32}^{ijrs}g_2^{rs})\delta\sigma_{ij}\\&+(A_{43}g_3+A_{45}^{ij}g_5^{ij}+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7)\delta\varphi\\&+(A_{55}^{irs}g_5^{rs}+A_{56}^{ir}g_6^r+A_{57}^{i}g_7)\delta\Phi_i\\&+(A_{64}^{ir}g_4^r+A_{65}^{irs}g_5^{rs}+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7)\delta h_i\\&+(A_{75}^{ij}g_5^{ij}+A_{76}^{i}g_6^i+A_{77}g_7)\delta g]dV\\&+\int_{S_u}a(u_i-\bar{u}_i)\delta p_i dS-\int_{S_p}a(p_i-\bar{p}_i)\delta u_i dS\\&+\int_{S_\varphi}A_{43}(\varphi-\bar{\varphi})\delta h dS-\int_{S_h}A_{43}(h-\bar{h})\delta\varphi dS=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

利用变分学基本引理，得到方程组：

$$\left.\begin{aligned}&A_{25}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{26}^{ijr}g_6^r+A_{27}^{ij}g_7=0\\&A_{55}^{irs}g_5^{rs}+A_{56}^{ir}g_6^r+A_{57}^{i}g_7=0\\&A_{75}^{ij}g_5^{ij}+A_{76}^{i}g_6^i+A_{77}g_7=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&ag_1^i=0\\&A_{32}^{ijrs}g_2^{rs}+A_{35}^{ijrs}g_5^{rs}+A_{36}^{ijr}g_6^r+A_{37}^{ij}g_7=0\\&A_{43}g_3+A_{45}^{ij}g_5^{ij}+A_{46}^{i}g_6^i+A_{47}g_7=0\\&A_{64}^{ir}g_4^r+A_{65}^{irs}g_5^{rs}+A_{66}^{ir}g_6^r+A_{67}^{i}g_7=0\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

由条件 (1.7) 和 (3.6)、(3.7) 式得到：

$$g_1^i=g_2^{rs}=g_3=g_4^i=g_5^{ij}=g_6^i=g_7=0 \tag{3.8}$$

由 (3.5) 式得到：

$$\left.\begin{aligned}&a(u_i-\bar{u}_i)=0,\quad a(p_i-\bar{p}_i)=0\\&A_{43}(\varphi-\bar{\varphi})=0,\quad A_{43}(h-\bar{h})=0\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

显然得到边界条件．定理证毕．

定理7 若L_2，L_3，L_4分别为第二类，第三类，第四类单值构造函数，令u_i，ε_{ij}，σ_{ij}，

φ, Φ_i, h_i, g为有独立变分的自变函数，当泛函

$$\Pi_2=\int_V L_2 dV-\int_{S_u} a\bar{u}_i p_i dS-\int_{S_p} a(p_i-\bar{p}_i)u_i dS$$

$$+\int_{S_\varphi} A_{43}(\varphi-\bar{\varphi})h dS+\int_{S_h} A_{43}\bar{h}\varphi dS \qquad (3.10)$$

$$\Pi_3=\int_V L_3 dV+\int_{S_u} a(u_i-\bar{u}_i)p_i dS+\int_{S_p} a\bar{p}_i u_i dS$$

$$-\int_{S_\varphi} A_{43}\bar{\varphi}h dS-\int_{S_h} A_{43}(h-\bar{h})\varphi dS \qquad (3.11)$$

$$\Pi_4=\int_V L_4 dV-\int_{S_u} a\bar{u}_i p_i dS-\int_{S_p} a(p_i-\bar{p}_i)u_i dS$$

$$-\int_{S_\varphi} A_{43}\bar{\varphi}h dS-\int_{S_h} A_{43}(h-\bar{h})\varphi dS \qquad (3.12)$$

在点（u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, φ, Φ_i, h_i, g）上取驻值，则u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, φ, Φ_i, h_i, g为微孔线弹性材料混合问题的解。

由于证明与定理 6 的方法相同，从略。

四、构造函数的表达式

利用方程组(2.1)、(2.2)、(2.3) 式在函数空间上积分，由于积分与路径无关（单值性），可直接积分，由于方程组(2.4)、(2.5)式的解相当复杂，我们希望有一个简单的表达式，为此，令：

$$\left.\begin{array}{l}
A_{25}^{ijrs}=-a\delta_{rs}^{ij},\quad A_{26}^{ijr}=0,\quad A_{27}^{ij}=\lambda B_{ij}\\
A_{32}^{ijrs}=a\delta_{rs}^{ij},\quad A_{35}^{ijrs}=A_{36}^{ijr}=A_{37}^{ij}=0,\quad A_{34}^{ijrs}=0\\
A_{43}=a,\quad A_{45}^{ij}=A_{46}^{ij}=0,\quad A_{47}=-a+\lambda\xi\\
A_{55}^{irs}=0,\quad A_{56}^{ir}=-a\delta_r^i,\quad A_{57}^{i}=\lambda b_i\\
A_{64}^{ir}=a\delta_r^i,\quad A_{65}^{irs}=A_{66}^{ir}=A_{67}^{i}=0\\
A_{75}^{ij}=A_{76}^{i}=0,\quad A_{77}=\lambda
\end{array}\right\}\qquad (4.1)$$

其中λ为常数，将上式代入（2.4)、(2.5）式显然满足，而且（1.7）式为：

$$\begin{vmatrix}
(-a\delta_{rs}^{ij}) & 0 & (\lambda B_{ij})\\
0 & (-a\delta_r^i) & (\lambda b_i)\\
0 & 0 & \lambda
\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (4.2)$$

将（4.1）式代入方程组（2.1)、(2.2)、(2.3）式得到：

$$\left.\begin{aligned}
&\partial L_1/\partial u_i=aF_i,\quad \partial L_1/\partial u_{i,j}=-a\sigma_{ij}\\
&\partial L_1/\partial \varepsilon_{ij}=-a(C_{ijrs}\varepsilon_{rs}+D_{ijs}\Phi_s+B_{ij}\varphi-\sigma_{ij})\\
&\qquad\qquad+\lambda B_{ij}(\xi\varphi+B_{rs}\varepsilon_{rs}+b_r\Phi_r+g)\\
&\partial L_1/\partial\sigma_{ij}=a[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2]\\
&\partial L_1/\partial\varphi=a(g+l)+(-a+\lambda\xi)(\xi\varphi+B_{rs}\varepsilon_{rs}+b_r\Phi_r+g)\\
&\partial L_1/\partial\varphi_{,i}=-ah_i\\
&\partial L_1/\partial\Phi_i=-a(A_{ij}\Phi_j+D_{rsi}\varepsilon_{rs}+b_i\varphi-h_i)\\
&\qquad\qquad+\lambda b_i(\xi\varphi+B_{rs}\varepsilon_{rs}+b_r\Phi_r+g)\\
&\partial L_1/\partial h_i=a(\Phi_i-\varphi_{,i})\\
&\partial L_1/\partial g=\lambda(\xi\varphi+B_{rs}\varepsilon_{rs}+b_r\Phi_r+g)
\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

将上式积分，容易得到:

$$L_1=aF_iu_i+a\sigma_{ij}[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2]+ah_i(\Phi_i-\varphi_{,i})+al\varphi+W\tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}W=&-a(C_{ijrs}\varepsilon_{rs}\varepsilon_{ij}/2+D_{ijs}\Phi_s\varepsilon_{ij}+B_{ij}\varphi\varepsilon_{ij}+\xi\varphi^2/2+b_r\Phi_r\varphi\\
&+A_{ij}\Phi_j\Phi_i/2)+\lambda B_{ij}\varepsilon_{ij}(\xi\varphi+B_{rs}\varepsilon_{rs}/2+b_r\Phi_r+g)\\
&+\lambda\xi\varphi(\xi\varphi/2+B_{rs}\varepsilon_{rs}+b_r\Phi_r+g)\\
&+\lambda b_i(b_r\Phi_r\Phi_i/2+g\Phi_i)+\lambda g^2/2\end{aligned}\tag{4.5}$$

将（4.1）式代入方程组（2.2）、（2.3）、（2.18）式积分可得到:

$$L_2=a(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i+a\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+ah_i(\Phi_i-\varphi_{,i})+al\varphi+W\tag{4.6}$$

将（4.1）式代入方程组（2.1）、（2.3）、（2.19）式积分得到:

$$L_3=aF_iu_i+a\sigma_{ij}[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2)]+ah_i\Phi_i+a(h_{i,i}+l)\varphi+W\tag{4.7}$$

将（4.1）式代入（2.18）、（2.19）、（2.3）式，积分得到:

$$L_4=a(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i+a\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+ah_i\Phi_i+a(h_{i,i}+l)\varphi+W\tag{4.8}$$

五、等 价 定 理

将（4.1）式代入泛函式（3.1）、（3.10）、（3.11）、（3.12）式，得到广义变分原理的泛函分别为:

$$\begin{aligned}\Pi_1=&\int_V\{W+aF_iu_i+a\sigma_{ij}[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2]+ah_i(\Phi_i-\varphi_{,i})+al\varphi\}dV\\
&+\int_{S_u}a(u_i-\bar{u}_i)p_idS+\int_{S_p}a\bar{p}_iu_idS+\int_{S_\varphi}a(\varphi-\bar{\varphi})hdS+\int_{S_h}a\bar{h}\varphi dS\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\Pi_2=&\int_V[W+a(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i+a\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+ah_i(\Phi_i-\varphi_{,i})+al\varphi]dV\\
&-\int_{S_u}a\bar{u}_ip_idS-\int_{S_p}a(p_i-\bar{p}_i)u_idS+\int_{S_\varphi}a(\varphi-\bar{\varphi})hdS+\int_{S_h}a\bar{h}\varphi dS\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\Pi_3=&\int_V\{W+aF_iu_i+a\sigma_{ij}[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2]+ah_i\Phi_i+a(h_{i,i}+l)\varphi\}dV\\
&+\int_{S_u}a(u_i-\bar{u}_i)p_idS+\int_{S_p}a\bar{p}_iu_idS-\int_{S_\varphi}a\bar{\varphi}hdS-\int_{S_h}a(h-\bar{h})\varphi dS\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\Pi_4=\int_V[W+a(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i+a\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+ah_i\Phi_i+a(h_{i,i}+l)\varphi]dV$$

$$-\int_{S_u}a\bar{u}_ip_idS-\int_{S_p}a(p_i-\bar{p}_i)u_idS-\int_{S_\varphi}a\bar{\varphi}hdS-\int_{S_h}a(h-\bar{h})\varphi dS \qquad (5.4)$$

当u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, φ, Φ_i, h_i, g独立变化时，如果有$\Pi_a=\Pi_b$，则Π_a与Π_b是等价的。

定理8 当u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, φ, Φ_i, h_i, g为有独立变分的自变函数时，则$\Pi_i(i=1, 2, 3, 4)$是互为等价的。

证明 只要证明Π_1与Π_2, Π_3, Π_4等价即可，由于

$$\int_V(\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})/2)dV=\int_{\partial B}\sigma_{ij}n_ju_idS-\int_V\sigma_{ij,j}u_idV \qquad (5.5)$$

将上式代入（5.1）式，即得到（5.2）式，则Π_1与Π_2等价，又由于

$$\int_V h_i\varphi_{,i}dV=\int_{\partial B}h_in_i\varphi dS-\int_V h_{i,i}\varphi dV \qquad (5.6)$$

将（5.6）式代入（5.1）式，即得（5.3）式，则$\Pi_1=\Pi_3$，即Π_1与Π_3等价。将（5.5）、（5.6）式代入（5.1）式，得到（5.4）式，即$\Pi_1=\Pi_4$。从而定理证毕。

参 考 文 献

[1] Nunziato, J. W. and S. C. Cowin, A nonlinear of elastic materials with voids, *A.R.M.A.*, 72 (1979), 175.

[2] Cowin, S. C. and J. M. Nunziato, Linear elastic materials with voids, *J. Elasticity*, 13 (1983), 125.

[3] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983).

[4] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社（1981）.

[5] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社（1985）.

[6] Jin Li-hua, Generalized variational principles for linear elastic materials with voids, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1, 3 (1988).

[7] 皮道华，线弹性力学广义变分原理的构造函数理论，固体力学学报，10，1（1989）.

Structural Function Theory of Generalized Variational Principles for Linear Elastic Materials with Voids

Pi Dao-hua Jin Li-hua

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

In this paper, we have obtained generalized variational principles for linear elastic materials with voids from structural function theory. Correspondent relations between structural functions and generalized variational principles are given.

Key words structural function, void, variational principles