

悬臂梁在倾斜载荷作用下的弹塑性 大挠度分析*

栾 丰 余同希

(北京大学力学系, 1990年4月3日收到)

摘 要

作为Plastica理论^[12]的应用, 本文分析了理想弹塑性矩形截面梁在自由端承受倾斜集中力作用时塑性区扩展阶段的大挠度变形。着重讨论了集中力的倾角对弯曲形状、载荷—挠度关系及塑性区长度的影响。结果用解析解和数值解同时给出。

关键词 大挠度 倾斜集中力 弹塑性悬臂梁 *Elastica Plastica*

一、引 言

自从Euler提出Elastica理论后, 对柔性杆的大挠度问题的研究经久不衰。

在1960年以前, 对Elastica的研究基本上限于线性弹性材料的杆件, 只包含几何非线性。Frisch-Fay的专著(见[1])对此作了概括性的综述。近年来C. Y. Wang等人([2~6])用摄动法和数值积分法求解Elastica方程, 分析了某些具体问题。

60年代后期, Elastica问题的研究推广到了非线性弹性材料情形。即包含了几何非线性和物理非线性。Oden和Childs(见[7])分析了以双曲正切规律给出的弯矩—曲率关系的Euler压杆的Elastica问题; Parathap和Varadan(见[8])研究了具有Ramberg-Osgood本构关系的情形; Lo和Gupta(见[9])研究的非线性弹性情形是: 当应力超过线性弹性极限后, 应力—应变关系具有对数函数的形式。

近年来, 弹塑性杆件的大挠度问题也引起了人们的注意。Monasa(见[10]、[11]), Yu(余同希)和Johnson(见[12])分别研究了理想弹塑性Euler压杆的后屈曲现象, 并对塑性加载阶段进行了分析。Yu和Johnson(见[12])导出了塑性加载区的一个解析积分并与弹性区的数值积分解联合给出全杆的解; 他们把这一类问题命名为Plastica, 相应的方程称为Plastica方程。伍小强和余同希对水平悬臂梁受竖直集中力作用的全过程进行了研究(见[13]), 用解析形式给出了全梁在塑性区扩展阶段的解, 用数值方法得到了塑性区卸载阶段全梁的弯曲情况。

以上两篇文献[12, 13]分别研究了集中力平行和垂直于杆轴的情形。本文研究集中力同

* 叶开沅推荐。

杆轴有一定倾角时的塑性区扩展过程(图1)。着重讨论不同倾角对变形的影响。

二、基本假定和理论结果

假定:

- 1) 集中力从 0 开始准静态地逐渐加大, 同时保持其空间方向不变。
- 2) 梁为矩形截面的等截面直梁, 长, 宽, 高分别为 L, b, h , 其中梁长比梁的截面尺寸大得多。忽略截面上剪力和轴向力对弯曲变形和屈服的影响。
- 3) 材料为理想弹塑性材料, 弯矩一曲率关系如图2所示。

当载荷较小时, 全梁处于弹性状态。在这一阶段, 变形服从 Elastica 规律(见[1]), 其方程组为:

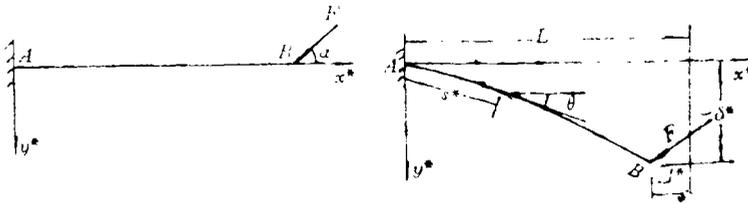


图1a 坐标轴的取法和 α 角的定义 图1b 悬臂梁在自由端受倾斜集中力作用的大挠度弯曲

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds^*} &= \frac{M}{EI} = \frac{F}{EI} [\cos\alpha \cdot (\delta^* - y^*) + \sin\alpha \cdot (1 - \Delta^* - x^*)] \\ dx^*/ds^* &= \cos\theta, \quad dy^*/ds^* = \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中, θ 为梁的局部转角, s^* 为弧长($0 \leq s^* \leq L$), x^*, y^* 坐标取法见图1(a), Δ^* 和 δ^* 分别是自由端的水平和竖直位移。 M 为弯矩, F 为集中力, EI 为弯曲刚度, α 为集中力同 x^* 轴夹角。 $M_e = Ybh^2/6$ 是矩形截面梁的最大弹性弯矩, 而 Y 为材料的屈服应力。

方程(2.1)写成无量纲形式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \beta m = \beta f [(1 - \Delta - x)\sin\alpha + (\delta - y)\cos\alpha] \\ dx/ds &= \cos\theta, \quad dy/ds = \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq s \leq 1$$

(2.2)

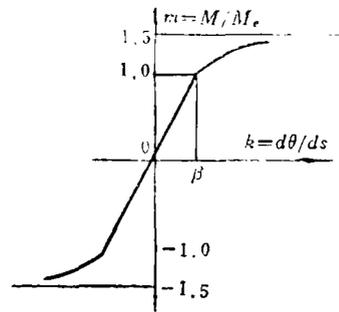


图2 弯矩一曲率关系

其中, 无量纲参数为: $s = s^*/L, x = x^*/L, y = y^*/L, \Delta = \Delta^*/L, \delta = \delta^*/L, m = M/M_e, f = FL/M_e, \beta = M_e L/EI = 2YL/Eh$ 。这里 β 是一个反映梁的几何及材料性质的参数, 它等于截面承受弹性极限弯矩时截面的无量纲曲率 $d\theta/ds$, 因而可以表征梁的柔度。

方程(2.2)的解可以用第一类和第二类完全和非完全的椭圆函数表示(参看[1]), 也可以用数值方法给出。后面的计算结果表明在这一阶段 f 随 δ 的增加而增加(见图5)。当外载增加到某一值 $f = f_c$ 使得固定端截面达到最大弹性弯矩时, 塑性区开始形成, 变形进入塑性区扩展阶段。设 l_p 为塑性加载区的无量纲长度, $l_p = L_p/L$, 其中 L_p 为塑性区长度。假定在这一阶段, 塑性区内截面的弯矩是单调增加的, 即 $l_p \geq 0, m|_{s \leq l_p} \geq 0$ 。这一假定的正确性将被后面的计算结果验证。

塑性加载区的Plastica方程组为(参看[13]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\beta}{\sqrt{3-2m}} = \frac{\beta}{\sqrt{3-2f[\cos\alpha(\delta-y)+\sin\alpha(1-\delta-x)]}} \\ dx/ds &= \cos\theta, \quad dy/ds = \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中 $0 \leq s \leq l_p$.

仿照文献[13]的作法, 可以解析地求解(2.3)式. 根据(2.3)式可知

$$ds/d\theta = \sqrt{3-2m}/\beta$$

对 θ 求微商并再次利用(2.3)式可得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{d\theta^2} &= \frac{-1}{\beta\sqrt{3-2m}} \frac{dm}{d\theta} = -\frac{1}{\beta^2} \frac{d\theta}{ds} \frac{dm}{d\theta} = -\frac{1}{\beta^2} \frac{dm}{ds} \\ &= -\frac{f}{\beta^2} \left(-\cos\alpha \frac{dy}{ds} - \sin\alpha \frac{dx}{ds} \right) = \frac{f}{\beta^2} (\cos\alpha \sin\theta + \sin\alpha \cos\theta) \\ &= \frac{f}{\beta^2} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

积分上式并利用 $d\theta/ds|_{s=l_p} = \beta$, $\theta|_{s=l_p} = \theta_p$ 得:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} [\cos(\theta_p + \alpha) - \cos(\theta + \alpha)] \quad (2.4)$$

积分(2.4)式并利用 $\theta|_{s=0} = 0$ 得

$$s = \frac{f}{\beta^2} [\sin\alpha - \sin(\theta + \alpha)] + \theta \left[\frac{1}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} \cos(\theta_p + \alpha) \right] \quad (2.5)$$

利用 $dx = \cos\theta \cdot ds$, $dy = \sin\theta \cdot ds$, 把 $s = s(\theta)$ 的表达式代入并对 θ 积分, 同时利用 $x|_{s=0} = 0$, $y|_{s=0} = 0$ 的边条件, 得到:

$$x = \frac{f}{\beta^2} \left[\frac{\sin\alpha}{4} - \frac{1}{4} \sin(2\theta + \alpha) - \frac{1}{2} \theta \cos\alpha \right] + \left[\frac{1}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} \cos(\theta_p + \alpha) \right] \sin\theta \quad (2.6)$$

$$y = \frac{f}{\beta^2} \left[\frac{\cos(2\theta + \alpha)}{4} - \frac{\cos\alpha}{4} + \frac{1}{2} \theta \sin\alpha \right] + \left[\frac{1}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} \cos(\theta_p + \alpha) \right] (1 - \cos\theta) \quad (2.7)$$

因为 f , β , α 都可以事先给定, 所以(2.5)、(2.6)、(2.7)式中只有 θ 未知, 这个量要用 $m=1$ 处的连接条件定出来. 将 $s=l_p$ 处的 s , θ 代入(2.5)式可得:

$$l_p = \frac{f}{\beta^2} [\sin\alpha - \sin(\theta_p + \alpha)] + \theta_p \left[\frac{1}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} \cos(\theta_p + \alpha) \right] \quad (2.8)$$

而弹性区 $l_p \leq s \leq l$ 内的Elastica方程组给出:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d}{ds} (\beta m) = \beta f [\cos\alpha (-\sin\theta) + \sin\alpha (-\cos\theta)] = -\beta f \sin(\theta + \alpha)$$

进一步, 对 $(d\theta/ds)^2$ 微商可得:

$$d(d\theta/ds)^2 = -\beta f \sin(\theta + \alpha) \cdot 2d\theta$$

积分并利用 $d\theta/ds|_{\theta=\theta_B} = 0$ 得

$$d\theta/ds = \sqrt{2\beta f} [\cos(\theta + \alpha) - \cos(\theta_B + \alpha)]^{1/2} \quad (2.9)$$

其中 $\theta_B = \theta|_{s=l}$. 利用 $s=l$ 截面上转角 θ 和曲率 $d\theta/ds$ 的连续性条件得到:

$$\beta = \sqrt{2\beta f} [\cos(\theta_p + \alpha) - \cos(\theta_B + \alpha)]^{1/2}$$

因而

$$\cos(\theta_B + \alpha) = \cos(\theta_p + \alpha) - \beta/2f \quad (2.10)$$

利用(2.10)式, (2.9)式可积分为:

$$\begin{aligned} 1-s &= \int_s^1 ds = \int_{\theta}^{\theta_B} \frac{d\theta}{\sqrt{2\beta f [\cos(\theta + \alpha) - \cos(\theta_B + \alpha)]^{1/2}}} \\ &= \int_{\theta}^{\theta_B} \frac{d\theta}{2\sqrt{\beta f [\sin^2((\theta_B + \alpha)/2) - \sin^2((\theta + \alpha)/2)]^{1/2}}} \end{aligned}$$

令 $\psi = \theta + \alpha$, $p = \sin((\theta_B + \alpha)/2)$, $\sin(\psi/2) = p \sin\phi$ 可得:

$$\begin{aligned} 1-s &= \int_{\theta_B + \alpha}^{\theta_B + \alpha} \frac{d\psi}{2\sqrt{\beta f [\sin^2((\theta_B + \alpha)/2) - \sin^2(\psi/2)]^{1/2}}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\beta f (1 - p^2 \sin^2\phi)^{1/2}}} - \int_0^m \frac{d\phi}{\sqrt{\beta f (1 - p^2 \sin^2\phi)^{1/2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta f}} [K(p) - F(p, m)] \quad (2.11) \end{aligned}$$

其中 $K(p)$, $F(p, m)$ 分别为第一类完全和非完全椭圆积分, 而

$$\begin{aligned} p &= \sin \frac{\theta_B + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\theta_p + \alpha) + \frac{\beta}{4f}} \\ m &= \sin^{-1} \left(\frac{\sin((\theta + \alpha)/2)}{\sin((\theta_B + \alpha)/2)} \right) = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta + \alpha)}{1 - \cos(\theta_p + \alpha) + \beta/2f}} \end{aligned}$$

在(2.11)式中令 $s=l$, 并与(2.8)式相加得:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_p}{\beta} + \frac{f}{\beta^2} [\sin\alpha - \sin(\theta_p + \alpha) + \theta_p \cos(\theta_p + \alpha)] \\ + \frac{1}{\sqrt{\beta f}} \left[K \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\theta_p + \alpha) + \frac{\beta}{4f}} \right) \right. \\ \left. - F \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\theta_p + \alpha) + \frac{\beta}{4f}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta_p + \alpha)}{1 - \cos(\theta_p + \alpha) + \beta/2f}} \right) \right] - 1 = 0 \quad (2.12) \end{aligned}$$

这是一个关于 θ_p , β , f 和 α 的超越方程。当 β , f 和 α 给定时, 可以得到 θ_p 的多个根, 但只有一个根是真实的。从后面的计算结果中可以得到真实的 θ_p 的取值范围, 这可以帮助确定 θ_p 。求出 θ_p 后, 全梁的挠曲形状、塑性区长度以及外力都可以确定。

三、数值计算方法

为了更为直观地比较不同 α 对梁的大变形的影响, 需要通过合适的算法得出数值解。我们的算法是: 对弹性区的 *Elastica* 方程组进行差分迭代, 结合塑性区的解析解, 最终给出全梁的整个变形过程。在迭代时, 选 $s=l$ 处为初始点。在这一点 $m=1$ 是已知的, 而且观察(2.8)式可以发现: 如果用 L_p 代替 L 对式中各量重新无量纲化, 即令 $\bar{f} = F \cdot L_p / M_e$, $\bar{\beta} = M_e \cdot L_p / EI$, 则新的无量纲参数 \bar{f} 可以用 $\bar{\beta}$, θ_p 和 α 表示出来。从物理上我们可以得知, 当 θ_p 和 α 确定后, 每个 β 值都对应唯一的一个 $\bar{\beta}$ 值, 而这个 $\bar{\beta}$ 值可以通过设置循环来找到。因此只要在程序中输入 α 和 $\bar{\beta}$, 并且给 θ_p 赋值, 就可以求得 $\bar{\beta}$ 和 \bar{f} , 使迭代得以实现。如果我们给 θ_p 赋一组值, 就可以得到不同状态下梁的弯曲形状、塑性区长度以及所需载荷的大小, 从而描绘出梁的变形过程。

四、计算结果和讨论

运用以上介绍的方法做了大量算例。根据计算结果绘制了7张图,从这些图中可以得出以下结论:

1. 图3描绘了不同 α 下梁在变形过程中的弯曲形状。图4将具有相同 δ 的压杆($\alpha=0^\circ$)的屈曲形状和悬臂梁($\alpha=90^\circ$)的挠曲形状进行了比较,从中可以看出压杆形状比悬臂梁形状更挠曲一些。

2. 图5给出了不同 α 的载荷随挠度变化的曲线。 α 越小,载荷随挠度的变化越显著; α 越大,曲线越平缓。对于小 α ,在弹性阶段外力随着 δ 的增长而迅速增大($\alpha=0$ 例外),进入塑性阶段后,外力很快由增长变为减小。对于大 α ,外力在弹性阶段和塑性阶段都随 δ 的增长而缓慢地增长。

3. 图6给出了不同 α 下的 $l_p \sim \delta$ 曲线,从中可以看出塑性区长度随 δ 的增长而变化的情形。 α 越小,塑性区发生时的 δ 值越大,而塑性区长度扩展得越迅速,其最大塑性区长度也越大。

4. 图7和图8反映了最大载荷和最大塑性区长度同 α 角的关系。当 α 较小时,曲线非常陡峭,而当 α 较大时,曲线非常平缓。在非理想加载的压杆屈曲研究中应对这一点加以注意。压杆的非理想加载的情形之一相当于 α 很小的情形,这时,所需的载荷和塑性区长度对 α 的变化反应非常敏感,载荷倾角的微小变化对结果将产生很大影响。因此在做压杆实验时,要控制 α 使之尽量接近于0,这样才能保证整个实验的精确度。

5. 图9比较了 α 相同但柔度不同的悬臂梁变形时的载荷—挠度关系。从图中可以看出 β 越大,变形越容易。柔度大的悬臂梁,进入塑性区加载阶段和卸载阶段时的变形都很大,而这时所需的载荷反而较小。

6. 在假定2中忽略了轴力对弯曲变形的影响。如果考虑轴力,根据[14]得到:

$$EI \frac{d\theta}{ds^*} = \frac{M_e}{\sqrt{3[1-(N/N_e)^2]-2M/M_e}} \quad (4.1)$$

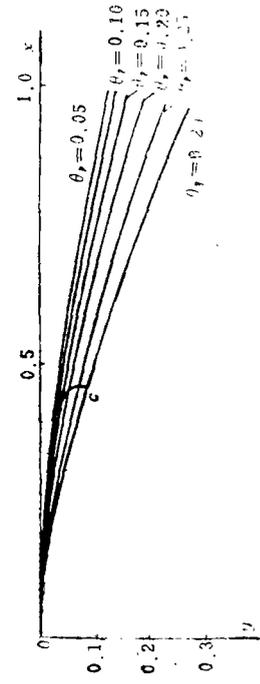
其中 N 是轴力, $N_e=Ybh$ 是最大弹性轴力。

无量纲化得:

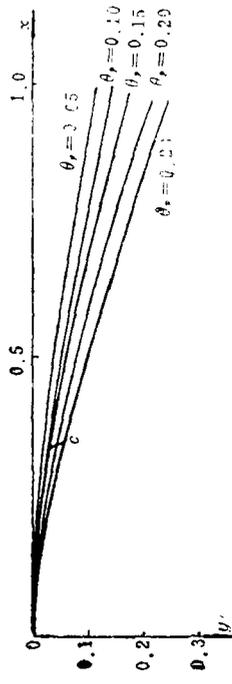
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\beta}{\sqrt{3(1-n^2)-2m}} \quad (4.2)$$

其中 $n=N/N_e$ 。

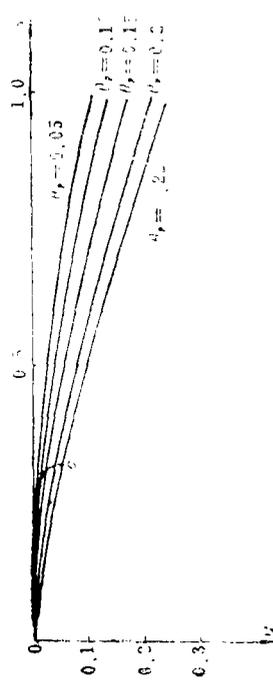
从上式可知轴力对梁的屈服和屈服后的曲率都有一定影响,它使得梁在 $m \leq 1.0$ 时就进入单侧甚至双侧塑性屈服状态,在屈服后则起到增加曲率的作用。但是,考虑轴力效应之后问题的解析解难以求得。今后,轴力的影响仍是Elastica和Plastica理论中要进一步研究的课题。



(a) $\alpha = 0^\circ$



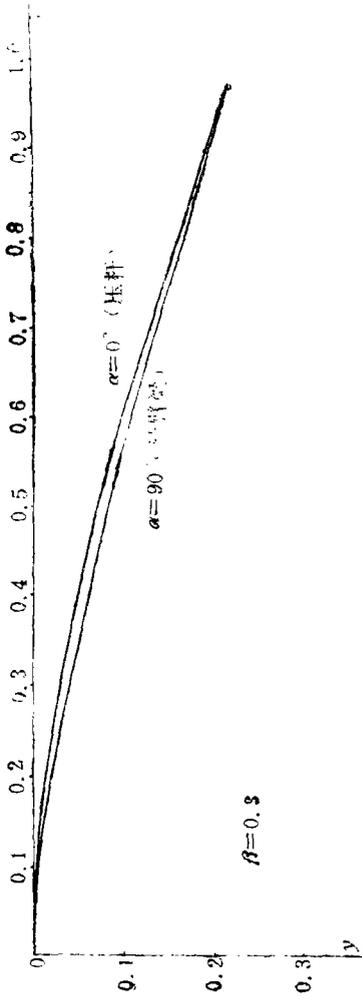
(b) $\alpha = 45^\circ$



(c) $\alpha = 90^\circ$

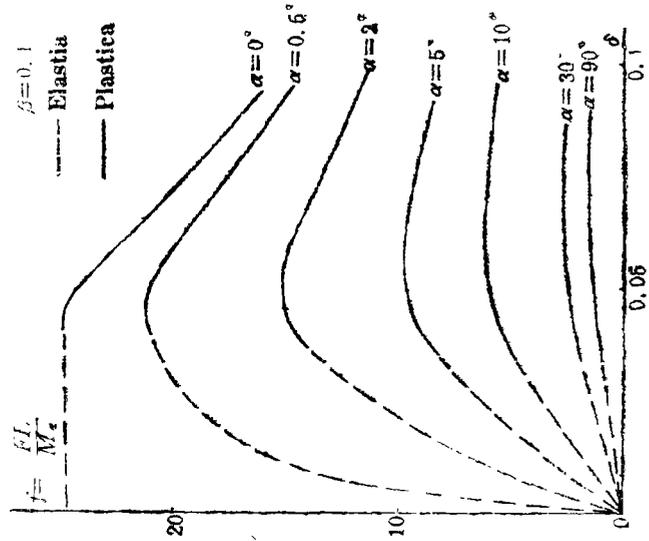
$\beta = 0.3$ (曲线c是弹性塑性区交界点的轨迹)

图 3



$\beta = 0.3$

图 4



$\beta = 0.1$

--- Elastia

— Plastica

$\alpha = 0^\circ$

$\alpha = 0.6^\circ$

$\alpha = 2^\circ$

$\alpha = 5^\circ$

$\alpha = 10^\circ$

$\alpha = 30^\circ$

$\alpha = 90^\circ$

δ

图 5

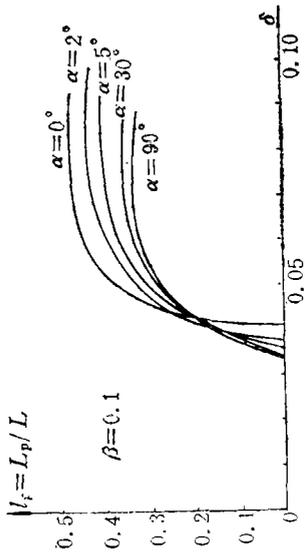


图 6

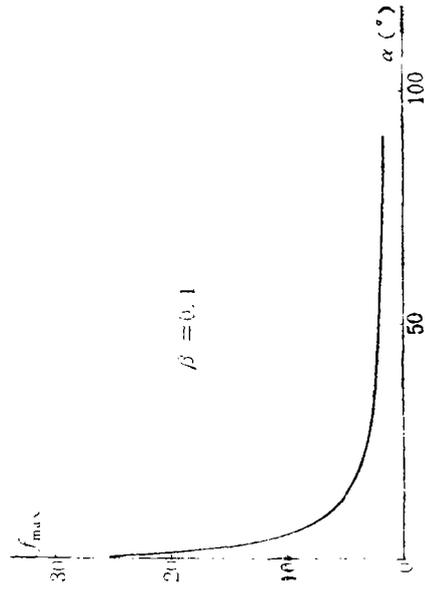


图 7

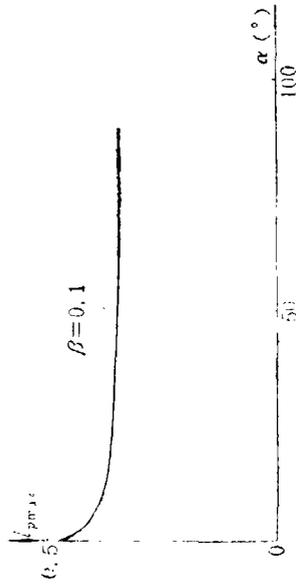


图 8

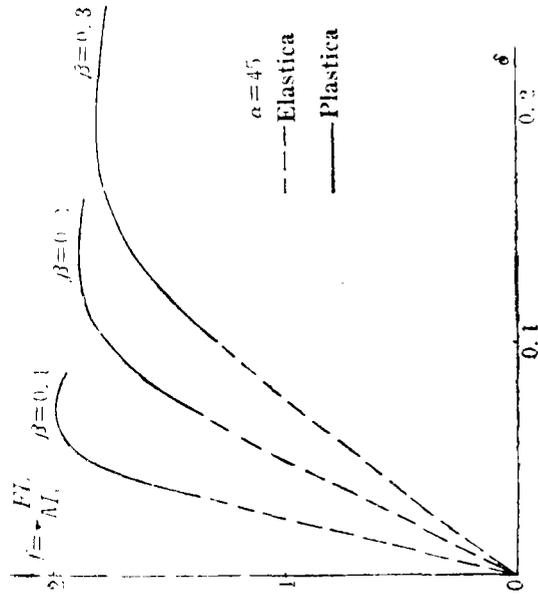


图 9

参 考 文 献

- [1] Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworth, Washington, D. C. (1962).
- [2] Wang, C. Y. and L. T. Watson, On the large deformations of C-shaped springs, *Int. J. Mech. Sci.*, **22** (1980), 395—400.
- [3] Wang, C. Y., Folding of elastica: similarity solutions, *J. Appl. Mech.*, **48** (1981), 199—200.
- [4] Wang, C. Y. and L. T. Watson, The elastic catenary, *Int. J. Mech. Sci.*, **24** (1982), 349—357.
- [5] Wang, C. Y., Buckling and postbuckling of the lying sheet, *Int. J. Solids Structures*, **20** (1984), 351—358.
- [6] Golley, B. W., Large deflections of bars bent through frictionless supports, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **19**, 1 (1984), 1—9.
- [7] Oden, J. T. and S. B. Childs, Finite deflections of a nonlinearly elastic bar, *J. Appl. Mech.*, **37** (1970), 48—52.
- [8] Parathap, G. and T. K. Varadan, The inelastic large deformation of beams, *J. Appl. Mech.*, **43** (1976), 689—690.
- [9] Lo, C. C. and S. D. Gupta, Bending of a nonlinear rectangular beam in large deflection, *J. Appl. Mech.*, **45** (1978), 213—215.
- [10] Monasa, F. E., Deflections and stability behaviour of elasto-plastic flexible bars, *J. Appl. Mech.*, **41** (1974), 537—538.
- [11] Monasa, F. E., Deflections of postbuckled unloaded elasto-plastic thin vertical columns, *Int. J. Solids Structures*, **16** (1980), 757—765.
- [12] Yu, T. X. and W. Johnson, The Plastica, the large elastic-plastic deflection of a strut, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **17** (1982), 195—209.
- [13] 伍小强、余同希, 悬臂梁弹塑性大挠度全过程的分析, *力学学报*, **18**, 6 (1986), 516—527; *Acta Mech. Sinica (English Ed.)*, **2** (1986), 333—347.
- [14] Yu, T. X. and W. Johnson, The influence of axial force on the elastic-plastic bending and spring-back of a beam, *J. Mech. Working Tech.*, **6** (1982), 5—21.

An Analysis of the Large Deflection of an Elastic-Plastic Cantilever Subjected to an Inclined Concentrated Force

Luan Feng Yu Tong-xi

(Dept. of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

Based on the Plastica theory (see ref. [12]), the large deflection of an elastic-perfectly plastic cantilever subjected to an inclined concentrated force at its tip, before the unloading in the plastic region occurs, is analyzed in this paper. The emphasis of the analysis is put on the effects of the angle of inclination of the concentrated force upon the deformed shape, the load-deflection relationship and the length of the plastic region. Both analytical and computed results are given.

Key words large deflection, inclined concentrated force, elastic-plastic cantilever, Elastica, Plastica