

# 稀相气固悬浮体越过沿平面匀速运动 激波后的流动结构\*

A.N. 欧西普措夫 S.L. 维塞尔依 V.A. 库里科夫斯基

(莫斯科国立大学力学研究所)

王 柏 懿

(中国科学院力学研究所)

(黄敦推荐, 1990年3月5日收到)

## 摘 要

本文给出气固悬浮体中激波感生边界层的渐近数值分析, 其中计及了作用于固体粒子的 Saffman 升力。研究表明粒子横越边界层的迁移导致了粒子轨道的交叉, 因此对目前通用的含灰气体模型应做相应的修正。本文利用匹配渐近展开方法得到了匀速运动激波后方的两相侧壁边界层方程, 详细描述了在 Lagrange 坐标下计算颗粒相流动参数的方法, 并给出了粒子浓度很低情况下的数值结果。

**关键词** 气固悬浮体 激波诱导流动 两相边界层

## 一、引 言

在许多科学和工程领域中, 人们都会遇到气固悬浮体同固壁相互作用问题。典型的例子包括粉尘爆炸时的粒子卷扬, 颗粒材料在管道中的气动输送, 飞机及燃气轮机在含灰环境下的运行, 发电装置中气固混合物的运动, 风流作用下土壤砂石的侵蚀等等。弥散相的存在可能大大增加对表面的剥蚀和传热。气固悬浮体中有激波沿固体表面移动时所感生的流动(特别是近壁区域中的两相边界层)对于研究工业粉尘爆炸和核爆震波是密切相关的。本研究试图分析在气固悬浮体中运动激波后方速度及温度边界层流体的结构。

本文采用匹配渐近展开方法<sup>[1]</sup>导出两相边界层方程。Saffman<sup>[2]</sup>曾指出剪切流中圆球将承受升力。Saffman 升力将引起粒子横越边界层的迁移运动并导致粒子轨道的交叉, 从而会强烈地影响两相边界层结构。在这种情况下, 流动空间某些点处的颗粒相参数是多值的。但是许多研究者目前普遍采用的含灰气体双连续介质模型<sup>[3]</sup>却假定粒子轨道是不相交的。

本文导出的两相边界层方程中考虑了粒子轨道交叉现象。我们还详细描述了在 Lagrange

\* 国家自然科学基金资助项目。

坐标下计算颗粒相参数的方法。该方法可用于粒子轨道交叉效应必须计及但粒子碰撞效应并不重要的流动区域。最后，文中给出了波后近壁区内弥散相速度、温度剖面的数值计算结果，并讨论了 Saffman 升力对流动结构的影响。

## 二、基本假设和控制方程

我们假定气固悬浮体由两种连续介质构成且不考虑弥散相的应力张量 $(\Pi_s^*)^{[3]}$ 。对于稀相系统，弥散相的体积分数很小，因此粒子间的碰撞和其它相互作用可以忽略不计。由于连续相具有粘性和热传导，气固两相通过动量和能量交换过程而耦合起来。我们还按照通常的作法认为连续相为完全气体 $p^* = \rho^* R^* T^*$ （上标\*表示无量纲变量，而下标s表示颗粒相参数），而且粘性和热传导系数对温度的依赖关系为线性的

$$\frac{\mu^*}{\mu_0^*} = \kappa \left( \frac{T^*}{T_0^*} \right), \quad \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*} = \kappa \left( \frac{T^*}{T_0^*} \right)$$

其中下标0表示指定的参考值， $\kappa$ 为常数。为了确定单位质量弥散相上的作用力 $F_s^*$ 和热传导 $Q_s^*$ ，我们进一步假定：弥散相由具有相同半径 $\sigma$ 和质量 $m$ 的刚性球构成；单个圆球的阻力<sup>[4]</sup>、热传导<sup>[5]</sup>和 Saffman 升力<sup>[2]</sup>等的公式在气固悬浮体边界层中依然成立。因此，我们有

$$F_s^* = \frac{6\pi\sigma\mu^*}{m} (V^* - V_s^*) \left( 1 + \frac{Re_s^{2/3}}{6} \right) + \frac{6.46\sigma^2}{m} (\mu^* \rho^* \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|)^{1/2} \cdot (u^* - u_s^*) \mathbf{j}$$

$$Q_s^* = \frac{4\pi\sigma\lambda^*}{m} (T^* - T_s^*) (1 + 0.3 Re_s^{1/2} Pr^{1/3})$$

其中 $Re_s = 2\sigma\rho^* |V^* - V_s^*| / \mu^*$ 为粒子 $Re$ 数而 $Pr = c_p^* \mu^* / \lambda^*$ 为气体 $Pr$ 数。

现在考虑沿着一个具有常温 $T_w^*$ 的平直壁面，以常速 $U^*$ 运动着的激波所引起的气固悬浮体流动。为方便起见，我们引进固定在激波阵面的坐标系 $(x^*, y^*)$ 和下述无量纲变量：

$$x = \frac{x^*}{l}, \quad y = \frac{y^*}{l}, \quad V = \frac{V^*}{u_+^*}, \quad V_s = \frac{V_s^*}{u_+^*}$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_+^*}, \quad \rho_s = \frac{\rho_s^*}{\rho_+^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_+^* u_+^{*2}}$$

$$T = \frac{T^*(U^* - u_+^*) + u_+^* T_w^* - U^* T_+^*}{(T_w^* - T_+^*) u_+^*}, \quad T_s = \frac{T_s^*(U^* - u_+^*) + u_+^* T_w^* - U^* T_+^*}{(T_w^* - T_+^*) u_+^*}$$

这里，我们选择毗邻激波后方流动参数（由下标“+”表示）为指定的参考值，并选择粒子在 Stokes 阻力下的速度平衡长度 $l = m u_+^* / 6\pi\sigma\mu_+^*$ 为本问题的特征长度。这样，含灰气体守恒方程的无量纲形式为

$$\text{div} \rho V = 0, \quad \rho (V \nabla) V = -\nabla p + 2\kappa \epsilon \text{div} (g \tau) - \alpha \sum_i \rho_{s,i} F_{s,i}$$

$$\rho (V \nabla) T = \frac{\kappa \epsilon}{Pr_1} \text{div} (g \nabla T) + (a-1) E_c [(V \nabla) p + \kappa \epsilon g \Phi$$

$$+ \alpha \sum_i \rho_{s,i} F_{s,i} (V - V_{s,i})] - \alpha \sum_i \rho_{s,i} Q_{s,i}$$

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \frac{\rho g}{\gamma M_+^2}, \quad g = \frac{u_+^*(bd-1)T + U^* - bdu_+^*}{U^* - u_+^*}, \quad d = \frac{T^*}{T_+^*}, \quad a = \frac{U^*}{u_+^*} \\
 \operatorname{div} \rho_{st} \mathbf{V}_{st} &= 0, \quad (\mathbf{V}_{st} \nabla) \mathbf{V}_{st} = \mathbf{F}_{st}, \quad (\mathbf{V}_{st} \nabla) T_{st} = \chi Q_{st} \\
 \tau_{kj} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \delta_{kj} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\
 \Phi &= 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\
 \mathbf{F}_{st} &= \kappa g (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{st}) \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( Re_{s1} |\mathbf{V} - \mathbf{V}_{st}| \frac{\rho}{\kappa g} \right)^{2/3} \right] \\
 &\quad + \frac{6.46\sigma}{6\pi l \varepsilon^{1/2}} \left( \kappa g \rho \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{1/2} \right) (u - u_{st}) \mathbf{j} \\
 Q_{st} &= \frac{2\kappa g}{3Pr_1} (T - T_{st}) \left[ 1 + 0.3Pr_1^{1/3} \left( Re_{s1} |\mathbf{V} - \mathbf{V}_{st}| \frac{\rho}{\kappa g} \right)^{1/2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

方程(2.1)中有8个相似参数, 它们定义如下:

$$\varepsilon = \frac{\mu_+^*}{\rho_+^* u_+^* l}, \quad \alpha = \frac{\rho_+^*}{\rho^*}, \quad \chi = \frac{c_p^*}{c_v^*}, \quad b = \frac{T^*}{T_+^*} \\
 M_+ = \frac{u_+^*}{a_+^*}, \quad Re_{s1} = \frac{2\sigma \rho_+^* u_+^*}{\mu_+^*}, \quad Pr_1 = \frac{c_p^* \mu_+^*}{\lambda_+^*}, \quad \gamma = \frac{c_p^*}{c_v^*}$$

而 $E_0$ 数则按下式计算:

$$E_0 = \frac{u_+^{*2}}{c_p^* (T_+^* - T^*)} = \frac{(\gamma-1)M_+^2}{bd-1}$$

这里 $M_+$ 为波后 $M$ 数, 方程(2.1)中的下标“-”表示波前的流动参数。

为了考虑粒子轨道可能相交, 我们引进了颗粒相参数多值性概念, 即颗粒相参数在空间同一点处可以具有若干个不同的数值, 它们分别相应于不同的粒子轨道。方程(2.1)中下标 $i$ 的最大值便等于在空间该点处相交的粒子轨道数。这样, 我们就修正了通常的含灰气体双连续介质模型。

弥散相参数在激波阵面处尚未变更, 因此我们可以得知 $x=0$ 处的边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= T = \rho = \rho_s = 1, \quad v = v_s = 0, \quad u_s = U^*/u_+^* \\
 p &= \frac{1}{\gamma M_+^2}, \quad T_s = \frac{d(U^*/u_+^* - 1) + bd - U^*/u_+^*}{bd-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

当基于速度平衡长度 $l$ 的流动 $Re$ 数很高时 (即 $Re = \rho_+^* u_+^* l / \mu_+^* \gg 1$ ), 我们有小参数 $\varepsilon \ll 1$ 。因此我们可以构造方程组(2.1)在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的渐近解。根据奇异摄动理论<sup>[1]</sup>, 我们可以将整个流场划分为两个性质各异的区域: “外部”无粘流动和“内部”边界层流动。在激波感生的流动情况中, “外部”解 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $x, y$  固定) 显然为

$$v = v_s = 0$$

而其它的流动参数不难由激波后松弛区的一维解<sup>[3]</sup>求得。

为推导内部流动方程, 我们进行坐标变换 $\eta = y/\sqrt{\varepsilon}$ 并将内部解展开为:

$$\begin{aligned}
 &u_0(x, \eta) + \dots, \quad \sqrt{\varepsilon} v_0(x, \eta) + \dots, \quad u_{s0}(x, \eta) + \dots, \quad \sqrt{\varepsilon} v_{s0}(x, \eta) + \dots \\
 &\rho_0(x, \eta) + \dots, \quad \rho_{s0}(x, \eta) + \dots, \quad T_0(x, \eta) + \dots, \quad T_{s0}(x, \eta) + \dots, \quad p_0(x, \eta) + \dots
 \end{aligned}$$

为了克服粒子轨道交叉所带来的困难, 颗粒相方程将采用Lagrange坐标 $(t, \eta_0)$ 写出。其中 $t = t^* u_+^* / l$ 为粒子沿着某条固定轨道运动的无量纲时间, 而 $\eta_0$ 为该固定轨道在 $x=0$ 处的纵坐

标。按照惯常的摄动展开步骤，我们可以得到如下的两相边界层方程：

$$\left. \begin{aligned}
 & \partial(\rho_0 u_0)/\partial x + \partial(\rho_0 v_0)/\partial \eta = 0 \\
 & \rho_0 \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) = \kappa \frac{\partial}{\partial \eta} \left( g_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) - \frac{dp_e}{dx} \\
 & \quad - \alpha \kappa g_0 \sum_i \rho_{s0i} (u_0 - u_{s0i}) E_{0i} \\
 & dp_0/d\eta = 0 \\
 & \rho_0 \left( u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial \eta} \right) = \frac{\kappa}{Pr_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( g_0 \frac{\partial T_0}{\partial \eta} \right) + (a-1) E_0 \\
 & \quad \cdot \left[ \kappa g_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 + u_0 \frac{dp_e}{dx} + \alpha \kappa g_0 \sum_i \rho_{s0i} (u_0 - u_{s0i})^2 E_{0i} \right] \\
 & \quad - \alpha \sum_i \rho_{s0i} q_i \\
 & \frac{dx_s}{dt} = u_{s0}, \quad \frac{d\eta_s}{dt} = v_{s0}, \quad \frac{du_{s0}}{dt} = \kappa g_0 (u_0 - u_{s0}) E_0 \\
 & \frac{dv_{s0}}{dt} = \kappa g_0 (v_0 - v_{s0}) E_0 - \kappa (u_0 - u_{s0}) \left( \kappa \left| \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right| \right)^{1/2} \\
 & dT_{s0}/dt = \chi q
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中 
$$g_0 = \frac{u_*^*(bd-1)T_0 + U^* - bdu_*^*}{U^* - u_*^*}, \quad E_0 = 1 + \frac{Re_*^{2/3}}{6}$$

$$Re_{s0} = \frac{Re_{s1} \rho_0 |u_0 - u_{s0}|}{\kappa g_0}, \quad q = \frac{2\kappa}{3pr_1} g_0 (T_0 - T_{s0}) (1 + 0.3Pr_1^{1/3} Re_{s0}^{1/2})$$

$$\kappa = \frac{6.46}{12\sqrt{6}\pi} Re_*^{3/2} \sqrt{\frac{2\rho_*^{0*}}{\rho_*^*}}$$

这里的  $\rho_*^{0*}$  为粒子材料的密度。在方程(2.3)中，弥散相方程在每条固定的粒子轨道上 ( $\eta_0$  为固定) 成立；下标  $i$  仍表示粒子轨道交叉区域某固定点处粒子流动参数的不同值而下标  $e$  表示外部流动参数。

在 Lagrange 坐标下，弥散相连续方程变为

$$\frac{1}{\rho_{s0}(t, \eta_0)} = \frac{u_*^*}{U^*} \left[ u_{s0} \frac{\partial \eta_s(t, \eta_0)}{\partial \eta_0} - v_{s0} \frac{\partial x_s(t, \eta_0)}{\partial \eta_0} \right] \quad (2.4)$$

气相在壁面处及边界层外缘处的边界条件分别为

$$\eta = 0, \quad x > 0: \quad u_0 = T_0 = U^*/u_*^*, \quad v_0 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad u_0 \rightarrow u_e, \quad T_0 \rightarrow T_e, \quad p_0 \rightarrow p_e$$

而颗粒相的初始条件为

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \eta = \eta_0$$

其它的参数则已在(2.2)中给出。

### 三、粒子质量浓度甚低情况下的数值结果

为了说明近壁区内两相流动结构的主要特征，我们现考虑一种简单情况，即粒子质量浓度很低 ( $\alpha \rightarrow 0$ )。这样，连续相和弥散相的方程可以分别求解。气体的外部解具有相当简单

的形式:

$$v_0 = 0, p_0 = 1/\gamma M_+^2, u_0 = T_0 = \rho_0 = 1$$

在 Euler 坐标下, 气体边界层方程的解已由许多作者求得给出<sup>[6]</sup>. 对于  $Pr_1 = 1$  的情况, 我们有

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \varphi'(\xi), v_0 = -g_0 \left( \frac{\varphi}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X} \varphi' \frac{\partial \xi}{\partial X} \right) \\ T_0 &= \left[ \frac{E_0}{2} \left( 1 - \frac{U^{*2}}{u_*^{*2}} \right) - 1 \right] (1 - \varphi') + \frac{|E_0|}{2} \left( \frac{U^*}{u_*^*} - 1 \right) (1 - \varphi'^2) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{X}} \int_0^Z \rho_0 dZ, \frac{Z}{\sqrt{X}} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\rho_0} = \int_0^\xi g_0 d\xi = \psi(\xi)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = -\frac{1}{2X} \frac{\psi}{\psi'} = -\frac{\psi}{2X g_0}, X = \frac{x}{\kappa}, Z = \frac{\eta}{\kappa}$$

函数  $\varphi$  满足下列方程和边界条件

$$\left. \begin{aligned} 2\varphi''' + \varphi\varphi'' &= 0 \\ \varphi(0) &= 0, \varphi'(0) = U^*/u_*^*, \varphi'(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

我们对不同的  $M_+$  值来数值求解方程 (3.2) 并利用方程 (3.1) 便可以求得  $u_0, v_0$  和  $T_0$  (作为  $x, \eta$  的函数). 这样, 本问题就化简为沿着不同的粒子轨道求解弥散相的常微分方程 (参见方程 (2.3)). 为了由方程 (2.4) 得出沿某条固定轨道的弥散相密度, 我们需要求出  $\partial\eta_0/\partial\eta_0(t, \eta_0)$  和  $\partial x_0/\partial\eta_0(t, \eta_0)$  的数值. 只要将弥散相的方程 (2.3) 对  $\eta_0$  求偏导数 ( $T_0$  的方程除外) 再得到几个常微分方程就可以达到上述目的. 我们采用打靶法将问题 (3.2) 化简为 Cauchy 问题, 而弥散相的常微分方程则是采用 Runge-Kutta 方法进行数值求解的.

本文的数值结果是对下述参数条件给出的:  $M_+ = 2, \gamma = 1.4, \chi = 0.5, \kappa = b = 1, Re_{s,1} = 300, \alpha = 100, 1200$ . 这些结果表明了 Saffman 升力确实导致了粒子轨道的交叉. 典型的粒子轨道示于图 1 ( $\alpha = 100$ ) 和图 2 ( $\alpha = 1200$ ), 其中虚线 1 表示纯气体边界层的外“边界”, 而点划线表示粒子轨道. 图中的实线 2~5 则是这样一些曲线, 其上每一点都是与粒子轨道相切的. 在曲线 2 和 3 之间, 空间每一点有两条轨道相交; 而在曲线 4 和 5 之间 (参见图 2), 空间每一点都有 4 条轨道相交. 在粒子浓度很小以致可以忽略粒子碰撞的情况下, 粒子轨道相交区域内每点处的弥散相流动参数将具有若干个不同值. 在  $\alpha = 100$  和 1200 两种情况下, 气固两相流动参数的典型分布曲线示于图 3 (速度) 和图 4 (温度). 其中的 a), b), c) 分别相应于剖面位置为  $x = 0.4, 1.0, 4.0$  (对于  $\alpha = 100$ ) 或 3.6 (对于  $\alpha = 1200$ ). 这里的虚线则给出气体的速度 (参见图 3) 和温度 (参见图 4). 可以看到, 弥散相参数的多值性相应于粒子轨道有交叉的区域. 图 1 和图 2 中曲线 2 的下方根本不存在有粒子, 因此该区域内弥散相的参数值均为零.

#### 四、结 语

本文给出的计算结果表明作用在激波感生边界层中固体粒子上的 Saffman 升力将导致粒子轨道的交叉. 因而在通常的双连续介质方法的框架下无法分析这类气固混合物的流动.

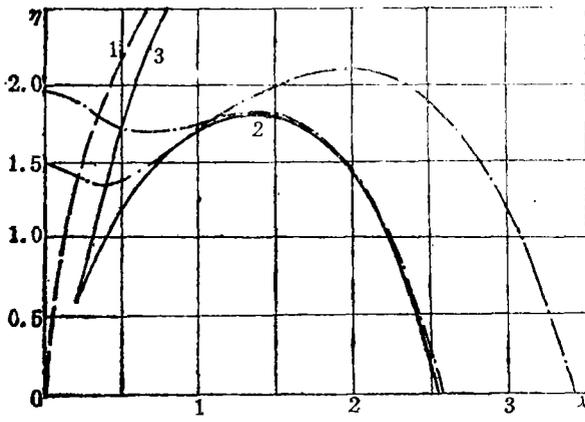


图 1  $\alpha=100$ 情况下的典型粒子轨道

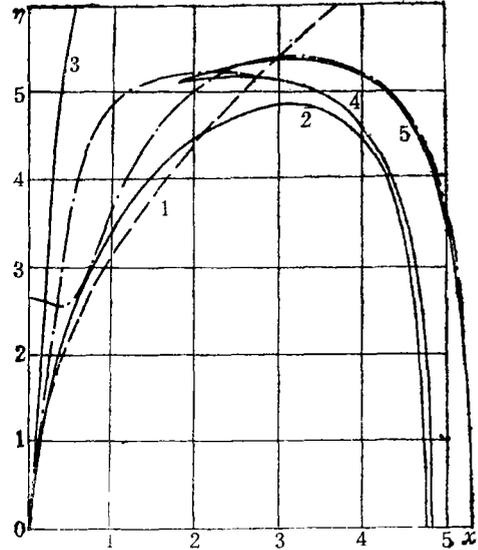
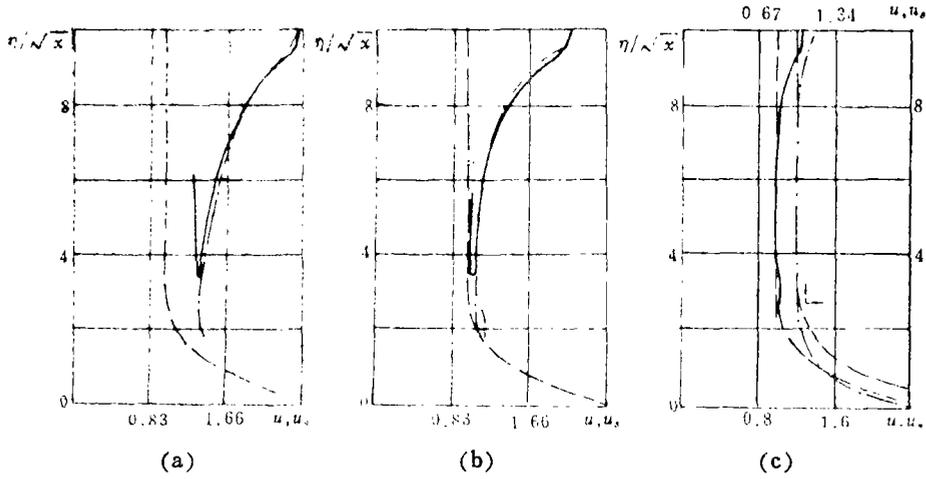
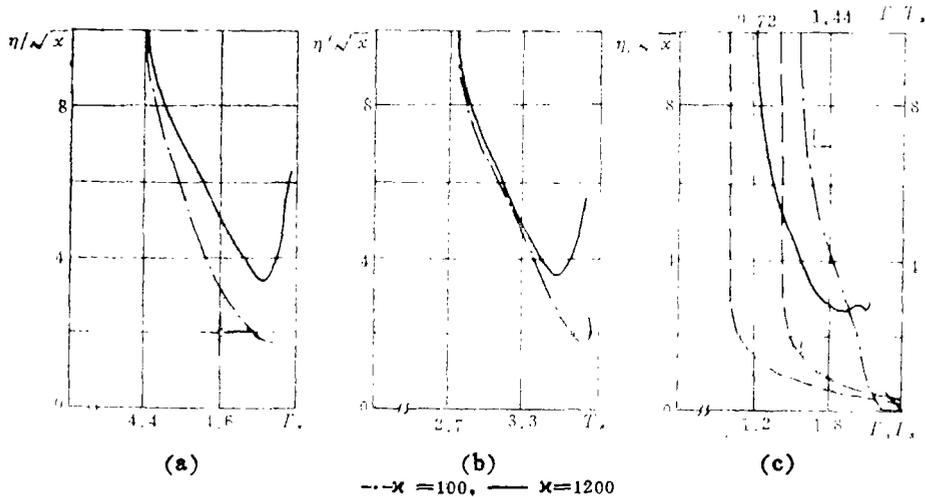


图 2  $\alpha=1200$ 情况下的典型粒子轨道



---  $\alpha=100$ , —  $\alpha=1200$   
图 3 典型的速度分布剖面



---  $\alpha=100$ , —  $\alpha=1200$   
图 4 典型的温度分布剖面

本研究对现有的含气气体模型加以必要的修正并给出相应的计算方法。它们可以用于其它各种气固悬浮体边界层流动。在这些流动中出现了粒子轨道的交叉现象但粒子碰撞效应仍可忽略不计。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Cole, J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1968).
- [ 2 ] Saffman, P. G., The lift on a small sphere in a slow shear flow, *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), 385—400. Corrigendum, *J. Fluid Mech.*, 31 (1968), 624.
- [ 3 ] Marble, F. E., Dynamics of dusty gases, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2 (1970), 397—446.
- [ 4 ] Волощик В. М., *Введение в Аэродинамику Грубодисперсных Аэрозолей*, Л., Гидрометеоздат (1971).
- [ 5 ] Нигматулин Р. И., *Основы Механики Гетерогенных Сред*, М., Наука (1978).
- [ 6 ] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hall, New York (1968).

## The Flow Structure of Dilute Gas-Particle Suspensions behind a Shock Wave Moving along a Flat Surface

A. N. Osipov    S. L. Veselyi    V. A. Kulikovskii

(*Institute of Mechanics, Moscow State University, USSR*)

Wang Bai-yi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

The asymptotic and numerical investigations of shock-induced boundary layers in gas-particle mixtures are presented. The Saffman lift force acting on a particle in a shear flow is taken into account. It is shown that particle migration across the boundary layer leads to intersections of particle trajectories. The corresponding modification of dusty gas model is proposed in this paper.

The equations of two-phase sidewall boundary layer behind a shock wave moving at a constant speed are obtained by using the method of matched asymptotic expansions. The method of the calculation of particle phase parameters in Lagrangian coordinates is described in detail. Some numerical results for the case of small particle concentration are given.

**Key words** gas-particle suspension, shock-induced flow, two-phase boundary layer