应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于一类带有慢变系数的二阶微分方程的渐近解*

乔宗椿

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1989年11月23日收到）

摘　要

本文研究一类带有慢变系数的二阶常微分方程解的渐近展开式．指出已有工作的不足，利用改进的多重尺度法改进和拓广了文献[1～4]的结果．

关键词　常微分方程　慢变系数　渐近展开式

一、引　言

先考察下面一个例子

$$\frac{d^2y}{dx^2}-[\omega_1(\varepsilon x)+\omega_2(\varepsilon x)]\frac{dy}{dx}+\omega_1(\varepsilon x)\omega_2(\varepsilon x)y=0 \tag{1.1}$$

其中　ε是正小参数．

利用文献[4]的结果，可以得到方程(1.1)通解的零阶渐近展开式为

$$\begin{aligned}y_0(x)=&c_0\exp\left[\int^{\varepsilon x}\frac{\omega_1'(\tau)}{\omega_2(\tau)-\omega_1(\tau)}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int^{\varepsilon x}\omega_1(\tau)d\tau\right]\\&+\tilde{c}_0\exp\left[\int^{\varepsilon x}\frac{\omega_2'(\tau)}{\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int^{\varepsilon x}\omega_2(\tau)d\tau\right]\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中　c_0，$\tilde{c}_0$是任意常数．

由(1.2)显见，当$\omega_2(\tau)$超于$\omega_1(\tau)$时，零阶渐近近似解将趋于无穷大．然而，后面我们将看到，方程(1.1)的渐近近似解并不趋于无穷大．也就是说，文献[4]所述摄动方法在这种情形是失效的．

对于方程(1.1)的更一般情形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(t,\varepsilon)\frac{dy}{dx}+q(t,\varepsilon)y=r(t,\varepsilon)\exp(i\phi(x,\varepsilon)) \tag{1.3}$$

* 江福汝推荐．国家自然科学基金资助项目．

其中　$t=\varepsilon x$

$$
\left.\begin{aligned}
&p(t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n p_n(t), \qquad q(t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n q_n(t)\\
&r(t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n r(t), \qquad \frac{d\phi(x,\varepsilon)}{dx}=\omega(t)
\end{aligned}\right\}
\tag{1.4}
$$

在二次代数方程 $\lambda^2(t)+p_0(t)\lambda(t)+q_0(t)=0$ 有相异根的条件下，或等阶地 $p_0^2(t)\neq 4q_0(t)$，参考文献[1～4]分别研究了方程(1.3)的齐次问题和非齐次问题中的共振和非共振情形解的渐近展开式。但他们所得到的渐近展开式在 $p_0^2(t)=4q_0$ 时是失败的，例如，在前面的例子中，$p_0=-2\omega_1$，$q_0=\omega_1^2$。

本文运用改进的多重尺度法[8]构造了在 $p_0^2=4q_0$ 时方程(1.3)的一致有效的渐近近似解，从所得到的结果我们可看到，在一般情形下，解的渐近展开式将依赖于 $p_0(t)$，$q_0(t)$，$p_1(t)$，$q_1(t)$ 和 $dp_0(t)/dt$ 之间的关系。

二、齐 次 问 题

考虑方程(1.3)的齐次问题。

$$
\frac{d^2y}{dx^2}+p(t,\varepsilon)\frac{dy}{dx}+q(t,\varepsilon)y=0 \tag{2.1}
$$

方程(2.1)可写成

$$
L_\varepsilon(y)\equiv\varepsilon^2\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon p(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}+q(t,\varepsilon)y=0 \tag{2.2}
$$

引进三种尺度变量

$$
\xi=\frac{f(t)}{\varepsilon}, \quad \eta=\frac{g(t)}{\varepsilon^{1/2}}, \quad \zeta=t \tag{2.3}
$$

将关于 t 的导数替换成

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}=\varepsilon^{-1}[\delta_t^0+\varepsilon^{1/2}\delta_t^{1/2}+\varepsilon\delta_t^1]\\
&\frac{d^2}{dt^2}=\varepsilon^{-2}[\delta_{t^2}^0+\varepsilon^{1/2}\delta_{t^2}^{1/2}+\varepsilon\delta_{t^2}^1+\varepsilon^{3/2}\delta_{t^2}^{3/2}+\varepsilon^2\delta_{t^2}^2]
\end{aligned}\right\}
\tag{2.4}
$$

其中　$f(t)$，$g(t)$ 是待定函数，和

$$
\left.\begin{aligned}
&\delta_t^0\equiv f_t\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \delta_t^{1/2}\equiv g_t\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \delta_t^1\frac{\partial}{\partial\zeta}\\
&\delta_{t^2}^0\equiv f_t^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \delta_{t^2}^{1/2}\equiv 2f_tg_t\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, \delta_{t^2}^1\equiv f_{tt}\frac{\partial}{\partial\xi}+2f_t\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}+g_t^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\\
&\delta_{t^2}^{3/2}\equiv g_{tt}\frac{\partial}{\partial\eta}+2g_t\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}, \quad \delta_{t^2}^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}
\end{aligned}\right\}
\tag{2.5}
$$

这样，微分算子 L_ε 可被展开成

$$
L_\varepsilon\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}K_n \tag{2.6}
$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&K_0\equiv\delta^0_{t^2}+p_0\delta^0_t+q_0\\
&K_1\equiv\delta^{1/2}_{t^2}+p_0\delta^{1/2}_t\\
&K_2\equiv\delta^1_{t^2}+p_0\delta^1_t+p_1\delta^0_t+q_1\\
&K_3\equiv\delta^{3/2}_{t^2}+p_1\delta^{1/2}_t\\
&K_4\equiv\delta^2_{t^2}+p_1\delta^1_t+p_2\delta^0_t+q_0\\
&K_n\equiv\begin{cases}p_n\delta^{1/2}_t & (\eta=5,7,9,\cdots)\\ p_n\delta^0_t+p_{n-1}\delta^1_t+q_n & (\eta=6,8,10,\cdots)\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

假设方程(2.1)解的渐近展开式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}y_n(\xi,\eta,\zeta)\tag{2.8}$$

将(2.8)代入方程(2.1)，并令ε的各次幂的系数为零，就可得到确定$y_n(\eta=0,1,2,\cdots)$的递推方程

$$K_0y_0\equiv f_t^2\frac{\partial^2y}{\partial\xi^2}+p_0f_t\frac{\partial y_0}{\partial\xi}+q_0y=0\tag{2.9}$$

$$K_0y_1\equiv-K_1y_0\tag{2.10}$$

$$K_0y_n=-\sum_{j=0}^{n-1}K_{n-j}y_j\qquad(n\geqslant2)\tag{2.11}$$

这里取负下标的量均取作零。

考虑到条件$p_0^2(t)=4q_0(t)$，我们可看到如果$f(t)$满足下面的方程

$$f_t^2+p_0f_t+q_0=0\tag{2.12}$$

或选取

$$f(t)=-\int^t\frac{p_0(\tau)}{2}d\tau\tag{2.13}$$

我们就可求得方程(2.9)的解为

$$y_0(\xi,\eta,\zeta)=z_0(\eta,\zeta)\exp(\xi)\tag{2.14}$$

其中$z_0(\eta,\zeta)$是任意函数，将在后面再确定。

将(2.14)代入(3.10)，且考虑到

$$K_1y_0=2f_tg_t\frac{\partial^2y_0}{\partial\xi\partial\eta}+p_0g_t\frac{\partial y_0}{\partial\eta}\equiv0\tag{2.15}$$

我们可求得方程(2.10)的解为

$$y_1(\xi,\eta,\zeta)=z_1(\eta,\zeta)\exp(\xi)\tag{2.16}$$

其中 $z_1(\eta,\zeta)$是任意待定函数。

将(2.14)和(2.16)代入(2.11)(取$n=2$)，考虑到$K_1y_1=0$，并令 $K_2y_0=0$，我们可得到确定$z_0(\eta,\zeta)$的方程

$$g_t^2\frac{\partial^2z_0}{\partial\eta^2}+\left[q_1-\frac{p_0p_1+p_0'}{2}\right]z_0=0\tag{2.17}$$

且可求得

$$y_2(\xi,\eta,\zeta)=z_2(\eta,\zeta)\exp(\xi)\tag{2.18}$$

其中$z_2(\eta,\zeta)$是任意待定函数。

2.1 首先考虑 $q_1-\dfrac{p_0p_1+p_0'}{2}\neq 0$的情形。

由方程(2.17)我们可见如果选取$g(t)$满足方程

$$g_t^2+\left[q_1-\frac{p_0p_1+p_0'}{2}\right]=0 \tag{2.19}$$

则可求得方程(2.17)具有解

$$z_0(\eta,\zeta)=c_0(\zeta)\exp(\eta)=c_0(t)\exp(\eta) \tag{2.20}$$

由方程(2.11)（取$n=3$）可得

$$K_0y_3=-K_3y_0-K_2y_1-K_1y_2 \tag{2.21}$$

考虑到$K_1y_2=0$，并令$K_2y_1=0$和$K_3y_0=0$，我们可求得

$$z_1(\eta,\zeta)=c_1(\zeta)\exp(\eta)=c_1(t)\exp(\eta) \tag{2.22}$$

及确定$c_0(t)$的方程

$$2g_t\frac{dc_0}{dt}+(g_{tt}+p_1g_t)c_0=0 \tag{2.23}$$

求解方程(2.23)可得

$$c_0(t)=\frac{A_0}{|g_t|^{1/2}}\exp\left[-\int^t\frac{p_1(\tau)}{2}d\tau\right] \tag{2.24}$$

其中 $c_1(\zeta)$是任意待定函数，A_0是任意常数。

至此，我们就求得了方程(2.1)的零阶渐近近似解为

$$y_0=\frac{A_0}{|g_t|^{1/2}}\exp\left[\frac{f(t)}{\varepsilon}+\frac{g(t)}{\varepsilon^{1/2}}-\int^t\frac{p_1(\tau)}{2}d\tau\right] \tag{2.25}$$

重复前面的步骤，利用数学归纳法，我们可求得方程(2.1)通解的渐近展开式为

$$y=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}y_n^{(i)} \tag{2.26}$$

其中 $y_n^{(i)}=c_n^{(i)}(t)\exp(\xi+\eta_i)$

$$\xi=\frac{f(t)}{\varepsilon},\quad \eta_i=\frac{g_i(t)}{\varepsilon^{1/2}}$$

$$c_n^{(i)}(t)=\frac{1}{|g_{it}|^{1/2}}\left[A_n^{(i)}+\int^t\frac{|g_{i\tau}|^{1/2}B_n^{(i)}}{2g_{i\tau}}\exp\left(\int^\tau\frac{p_1(s)}{2}ds\right)d\tau\right]\exp\left[-\int^t\frac{p_1(\sigma)}{2}d\sigma\right]$$

$$B_n^{(i)}=-\left[\sum_{j=0}^{n-1}K_{n+3-j}y_j^{(i)}\right]\exp(-\xi-\eta_i)$$

$g_1(t)$，$g_2(t)$ 是方程(2.19)的相异根，$A_n^{(i)}$是任意常数($i=1,2,n=0,1,2,\cdots$)

2.2 再考虑 $q_1-\dfrac{p_0p_1+p_0'}{2}=0$ 的情形

在这种情形，引进变换式

$$y=z\exp\left(-\int^t\frac{p_0(\tau)}{2}d\tau\right) \tag{2.27}$$

则可得到确定$z(t)$的微分方程

$$\frac{d^2z}{dt^2}+p_1\frac{dz}{dt}+\left(q_2-\frac{p_0p_2}{2}\right)z=-\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\left[p_{n+1}\frac{dz}{dt}+\left(q_{n+2}-\frac{p_0p_{n+1}}{2}\right)z\right] \tag{2.28}$$

这样，我们就可运用正则摄动方法求解方程(2.28)，这里就不再详述其细节.

三、非 齐 次 问 题

现在我们来考虑方程(1.3)的非齐次问题. 考虑到方程(1.3)的线性性质，因此通过求得其一个特解，再叠加上节已求得的齐次问题的通解，非齐次问题也就完全解决了. 下面，我们就分别来讨论非共振和共振情形特解的渐近展开式.

3.1 非共振情形，或$i\omega(t)\neq -p_0(t)/2$

引进二重尺度变量

$$\tilde{\xi}=\frac{h(t)}{\varepsilon},\quad \xi=t \tag{3.1}$$

其中 $h(t)$是任意待定函数，将在后面确定.

类似地，微分算子L_ε在这种情形可被展开式成

$$L_\varepsilon\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\tilde{K}_n \tag{3.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{K}_0\equiv\tilde{\delta}^0_{t^2}+p_0\tilde{\delta}^0_t+q_0\\
&\tilde{K}_1\equiv\tilde{\delta}^1_{t^2}+p_0\tilde{\delta}^1_t+p_1\tilde{\delta}^0_t+q_1\\
&\tilde{K}_2\equiv\tilde{\delta}^2_{t^2}+p_1\tilde{\delta}^1_t+p_2\tilde{\delta}^0_t+q_0\\
&\tilde{K}_n=p_n\tilde{\delta}^0_t+p_{n-1}\tilde{\delta}^1_t+q_n\qquad(n=3,4,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

式中$\tilde{\delta}^0_t$，$\tilde{\delta}^1_t$，$\tilde{\delta}^0_{t^2}$，…只要将(2.5)中$f(t)$取为$h(t)$及$g(t)=0$即可得.

假设方程(1.3)特解的渐近展开式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(\tilde{\xi},\xi) \tag{3.4}$$

类似地，我们可得到确定y_n的递推微分方程($n=0,1,2,\cdots$)

$$\tilde{K}_0y_0=r_0\exp(i\phi) \tag{3.5}$$

$$\tilde{K}_0y_n=r_n\exp(i\phi)-\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{K}_{n-j}y_j \tag{3.6}$$

由方程(3.5)可得

$$h_t^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial\tilde{\xi}^2}+p_0h_t\frac{\partial y_0}{\partial\tilde{\xi}}+q_0y_0=r_0\exp(i\phi) \tag{3.7}$$

如果选取$h(t)$满足方程

$$h_t=i\omega \tag{3.8}$$

或

$$h(t)=\int^t i\omega(\tau)d\tau,\ \tilde{\xi}=\int^t\frac{i\omega(\tau)}{\varepsilon}d\tau=i\phi \tag{3.9}$$

则从方程(3.7)可得到零阶近似解为

$$y_0=z_0(\xi)\exp(\tilde{\xi})=z_0(t)\exp(i\phi) \tag{3.10}$$

其中

$$z_0(\xi)=z_0(t)=\frac{r_0}{\left(i\omega+\dfrac{p_0}{2}\right)^2} \tag{3.11}$$

利用数学归纳法，我们可很容易地求得特解的渐近展开式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(\bar{\xi},\xi) \tag{3.12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &y_n=z_n(\xi)\exp(\bar{\xi})=z_n(t)\exp(i\phi)\\ &z_n(\xi)=z_n(t)=\frac{r_n-\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1}\bar{K}_{n-j}y_j\right]\exp(\bar{\xi})}{\left(i\omega+\dfrac{p_0}{2}\right)^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

3.2 **共振情形，或** $i\omega=-p_0/2$

由(3.12)～(3.13)可见，上面所得到的结果在这种情形是失效的。也就是说，共振现象发生了。事实上，在共振情形，特解的渐近展开式是不同于(3.12)的。为了节省篇幅，下面我们将不再讨论其细节，而仅给出主要结果

(i) 如果 $q_1-\dfrac{p_0p_1+p_1'}{2}\neq 0$，则特解的渐近展开式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n-1}y_n(\bar{\xi},\xi) \tag{3.14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &y_n(\bar{\xi},\xi)=z_n(\bar{\xi})\exp(\bar{\xi})=z_n(t)\exp(i\phi)\\ &z_n(\bar{\xi})=z_n(t)=\frac{r_n-\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1}\bar{K}_{n-j}y_j\right]\exp(-\bar{\xi})}{\left[q_1-\dfrac{p_0p_1+p_0'}{2}\right]}\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

(ii) 如果$q_1-\dfrac{p_0p_1+p_0'}{2}=0$，则特解的渐近展开式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n-2}y_n(\bar{\xi},\xi) \tag{3.16}$$

其中 $$y_n(\bar{\xi})=z_n(\xi)\exp(\bar{\xi})=z_n(t)\exp(i\phi) \tag{3.17}$$

式中$z_n(t)$应是下面的二阶线性微分方程(3.18)的任意一个特解

$$\frac{d^2z_n}{dt^2}+p_1\frac{dz_n}{dt}+\left[q_2-\frac{p_0p_2}{2}\right]z_n=r_n-\left[\sum_{j=0}^{n-1}\bar{K}_{n+2-j}y_j\right]\exp(-\bar{\xi})\Big] \tag{3.18}$$

四 讨 论

作为一个例子，我们再来考虑方程(1.1)，在$\omega_1(t)\neq\omega_2(t)$的情形下，式(1.2)已给出了

其零阶渐近解。利用本文结果，我们可很容易地得到在$\omega_1(t)=\omega_2(t)=\omega(t)$情形下的零阶渐近解为

$$y_0=\begin{cases}\dfrac{1}{|\omega'(t)|^{1/4}}\left\{c_0\exp\left[-\dfrac{\int^t\omega(\tau)d\tau}{\varepsilon}+\dfrac{\int^t\sqrt{-\omega'(\tau)}\,d\tau}{\varepsilon^{1/2}}\right]\right.\\ \qquad\left.+\tilde{c}_0\exp\left[-\dfrac{\int^t\omega(\tau)d\tau}{\varepsilon}-\dfrac{\int^t\sqrt{-\omega'(\tau)}\,d\tau}{\varepsilon^{1/2}}\right]\right\} & (\omega'(t)\neq 0)\\ (c_0t+\tilde{c}_0)\exp\left(-\dfrac{\omega}{2\varepsilon}t\right) & (\omega'(t)=0)\end{cases}\tag{4.1}$$

其中$t=\varepsilon x$，c_0和$\tilde{c}_0$是任意常数。

由(1.2)和(4.1)可见，方程(1.1)解的渐近展开式的形式在不同情形下是完全不同的。

最后，在这里我们要强调指出的是：在一般情形下，在条件$p_0^2=4q_0$下，齐次问题解是依赖于三种尺度变量$(f(t)/\varepsilon,g(t)/\varepsilon^{1/2},t)$而不是二种尺度变量$(f(t)/\varepsilon,\varepsilon)$，并且解的渐近展开式是关于$\varepsilon^{n/2}$展开的，而不是关于$\varepsilon^n$展开的（$n=0,1,2,\cdots$），这也就是文献[4]的结果在$p_0^2=4q_0$情形下失效的根源。

注1. 在$p_0^2\neq 4q_0$的情形下，文献[4]仅给出其零阶渐近解。可以证明，利用本方法我们可构造任意阶逐近解。因此，本文改进和拓广了文献[4]的工作。

注2. 文献[5～7]考虑的具有慢变系的振动方程问题是本文考虑问题的特殊情形。

注3. 如果存在一个t_0，使得$p_0^2(t_0)=4q_0(t_0)$，则本文结果同样可适用于t_0的邻域里。

参 考 文 献

[1] Feshchenko, S. F., N. I. Shkio' and L. D. Nikolenko, *Asymptotic Methods in the Theory of Linear Differential Equations*, American Elsevier, New York (1967).

[2] Fowler, R. H., E. G. Gallp, C. N. H. Lock, and H. W. Richmood, The aerodynamics of a spinning shell, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **221** (1920).

[3] Fonler, R. H., and C.H. N. Lock, Approximate solutions of linear differential equations, *Proc. London Math. Soc.*, **20** (1921).

[4] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley (1973).

[5] Kevorkian, J. and Cole. J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics* Springer-Verlag (1981).

[6] Kevorkian, J., Passage through reasonance for a one-dimensional oscillator with slowly varying frequency, *SIAM J. on Appl. Math.*, **20** (1971).

[7] 江福汝、徐传基、徐宝智，织机梭子的运动方程及其渐近解，振动与冲击 1(13) (1985).

[8] Jiang Fu-ru, On boundary layer methods, *Appl. Math. and Mech.*, **2**(5) (1981).

On the Asymptotic Solutions for a Class of Second Order Differential Equations with Slowly Varying Coefficients

Qiao Zong-chun

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,*

Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper we study the asymptotic expansions of the solutions for a class of second order ordinary differential equations with slowly varying coefficients. The defect of the previous works on these problems is noted, and the results in [1-4], [5-7] are improved and extended, respectively by means of the modified method of multiple scales[8].

Ked words ordinary differential equations, slowly varying coefficient, asymptotic expansion solution