应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多复变Cauchy积分和被动算子与多重色散关系*

黄 烈 德

（同济大学，1989年6月23日收到）

摘 要

本文阐述多重色散关系联系着矩阵$\tilde{z}(p)$的实部与虚部：

$$\mathrm{Re}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Re}\mathscr{K}_n) \qquad (\text{当}z^{(0)}=0\text{时})$$

$$\mathrm{Im}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Im}\mathscr{K}_n)-\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}p_j \qquad (\text{当}z^{(0)}=0\text{时}).$$

式中 $\tilde{z}(p)$是阻抗$\tilde{z}(\zeta)$的边值．

关键词 多复变Cauchy积分 被动算子 多重色散关系

一、引 言

微扰理论方法在介子理论领域中并不适用，因此，从根本上超出微扰理论的局限性的任何尝试都会引人生趣，特别是色散关系法这个方向更为重要．R. Kronig(1926)与H. R. Kromers(1927)[1]在经典电动力学领域中所得的折射率的实部与虚部的色散关系(dispersion reiation)

$$\mathrm{Re}f(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \tag{1.1}$$

或

$$\mathrm{Re}[f(\omega)-f(0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\mathrm{Im}f(\omega')}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}d\omega' \tag{1.1$'$}$$

它的数学基础是Cauchy积分公式，而因果性则是色散关系的物理基础．这里$f(\omega)$是单一频率的光的散射振幅．为了利用色散关系来研究粒子的任意碰撞过程，关键必须证明散射振幅f可向上半平面解析延拓．公式(1.1)之所以重要，不但Ref、Imf具有明显的物理意义，而且能够测量得到的．在光通过色散媒质时的散射振幅中，Re$f(\omega)$与入射光在角频率ω下的通常折射率有关，而Im$f(0)$与媒质吸收率有关，故(1.1)称为色散公式．色散关系的研究引起众多学者的注意[2,3]．Bogoliubov学派[3]第一次对色散关系给出了数学上严格的证明，后来又作了简化[4,5]．随后许多数学、物理学家从事双重色散关系的研究，并给出数学上的证明，这些工作很重要，详见文[6]．

* 郭友中推荐．该文摘要载入《现代数学与力学》（见[2]）．

为了阐述多复变Cauchy积分和被动算子与多重色散关系(multidimensionai dispersion relations)，让我们先来叙述广义 Cauchy-Bochner 积分表达式。

二、Cauchy-Bochner积分与相对于凸锐闭锥C^*的多重色散关系

定理1 (Bochner-Wohlers[7]-Vladimirov[8]定理) 函数$f(z)=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in H^{(s)}(C)$的必要充分条件是它具有广义的Cauchy-Bochner积分表达式

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(f_+(x'),\ \mathscr{K}_C(z-x'))=\begin{cases} f(z) & (z\in T^C) \\ 0 & (z\in T^{-C}) \end{cases} \tag{2.1}$$

式中 C是 R^n 中凸锐开锥，其顶点在O而C^*是C的共轭锥。函数

$$\mathscr{K}_C(z)=\int_{C^*}e^{i(z,\xi)}d\xi\equiv L[\theta_{C^*}]=F[\theta_{C^*}e^{i(y,\xi)}] \tag{2.2}$$

表示在管状区域(tubular redion)T^C的 Cauchy 核，$\theta_{C^*}(\xi)$是锥 C^* 的特征函数. $f_+(x)$是$y\in C$ 当 $y\to 0$ 时函数 $f(z)=f(x+iy)$在$\mathscr{H}_s$ 中的边值. 记$\mathscr{L}^2_s$ 为具有有限范数:

$$\|g\|_{(s)}=\left[\int|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right]^{1/2}=\|g(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\|$$

的所有函数$g(\xi)$组成的 Hilbert 空间.

而$\mathscr{H}_s$是在$\mathscr{L}^2_s$中函数的 Fourier 变换$f=F[g]$具有范数$\|f\|_s=\|F^{-1}[f]\|_s=\|g\|_s$的所有(广义) 函数的集合，式中参数 s 为任意实数.

设$a\geqq 0$, 记$H_a^{(s)}(C)$为由T^C中全纯具有范数 $\|f\|_a^{(s)}=\sup\limits_{y\in C}\exp[-a|y|]\|f(x+iy)\|_s$

的Banach 空间，并记 $H_0^{(s)}(C)=H^{(s)}(C)$ 与$\|\ \ \|_0^{(s)}=\|\ \ \|^{(s)}$.

为了证明定理1，让我们引进下述引理1:

引理1[7] ($H_a^{(s)}(C)$类的全纯函数定理)函数$f(z)\in H_a^{(s)}(C)$ 的必要充分条件是它的**谱函**$g(\xi)\in\mathscr{L}^2_s(C^*+\bar{U}_a)$类，并且成立如下等式

$$\|f\|_a^{(s)}=\|f_+\|_s=\|g\|_{(s)},$$

式中$f_+(x)$是$y\in C$ 当 $y\to 0$时函数 $f(z)=f(x+iy)$在$\mathscr{H}_s$中的边值. 且 $f_+=F[g]$.

定理1的证明 必要性：由引理1可知$f(z)$是函数g在$\mathscr{L}^2_s(C^*)$中的Laplace 变换.
故有 $f(z)=F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}\theta_{C^*}(\xi)]\quad(z\in T^C)$, $0=F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}\theta_{-C^*}(\xi)]\quad(z\in T^{-C})$

据此，依管状区域 Cauchy 核的定义

$$\mathscr{K}_C(z)=\int_{C^*}e^{i(z,\xi)}d\xi\equiv L[\theta_{C^*}]=F[\theta_{C^*}e^{-(y,\xi)}],$$

并利用下列事实:

(1) 如果$f\in\mathscr{H}_s$而$f_0\in\mathscr{H}_\sigma$，则在缓增大函数空间$\mathscr{S}'$中卷积$f*f_0$存在，其表达式为

$$f*f_0=F^{-1}[F[f]\ F[f_0]]$$

且关于 f 与 f_0 都是连续的. 这里空间$\mathscr{S}'=\mathscr{S}'(R^n)$表示所有缓增广义函数的集合，它是在基函数空间$\mathscr{S}=\mathscr{S}(R^n)$上的任意连续线性泛函；我们把$\mathscr{S}$视为在$R^n$中有无穷多次可微的函数而它们的微商当$|x|\to\infty$时且比$|x|^{-1}$的任意次幂更速下降. 式中实数$\sigma>0$.

(2) 如果在$\mathscr{H}_s$中 $f\to 0$ 而在$\mathscr{H}_\sigma$中$f_0\to 0$，则在$\mathscr{S}'$中$f*f_0\to 0$.

(3) 一般化，如果$f\in\mathscr{H}_s$，且$F[f_1]$, $\cdots$, $F[f_m]\in\mathscr{L}^\infty$，则在$\mathscr{H}_s$中它们的卷积 $f_0*f_1*\cdots*f_m$存在，其表达式为 $f_0*f_1*\cdots*f_m=F^{-1}[F[f]F[f_1]\cdots F[f_m]]$

且依 f 从$\mathscr{H}_s$到$\mathscr{H}_s$连续。

(4) 如果 $f\in\mathscr{H}_s$ 而 $f_0\in\mathscr{H}_{-s}(s\geqslant 0)$，则有 $f_0*f=(f_0(x'),\ f(x-x'))$.

我们得到表达式(2.1)：

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}F[g]*\mathscr{K}_C=\frac{1}{(2\pi)^n}(f_+(x'),\mathscr{K}_C(z-x'))\qquad(z\in T^C)$$

$$0=\frac{1}{(2\pi)^n}F[g]*\mathscr{K}_{-C}=\frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}(f_+(x'),\mathscr{K}_C(z-x'))\qquad(z\in T^{-C})$$

并藉助等式 $\mathscr{K}_{-C}(z)=(-1)^n\mathscr{K}_C(z)$，又利用关系式 $f_+=F[g]$，故知条件(2.1)是必要的。

充分性：如果$f(z)$存在表达式(2.1)，则$f\in H^{(s)}(C)$。 Q. E. D.

定理2 下面的叙述是等价的：

(i) f_+是$H^{(s)}(C)$中某函数$f(z)$在$\mathscr{H}_s$中的边值，

(ii) $f_+\in\mathscr{H}_s$且满足关系式

$$\mathrm{Re}f_+=-\frac{2}{(2\pi)^n}\mathrm{Im}f_+*\mathrm{Im}\mathscr{K}_C,\quad \mathrm{Im}f_+=\frac{2}{(2\pi)^n}\mathrm{Re}f_+*\mathrm{Im}\mathscr{K}_C\qquad(2.2\mathrm{a、b})$$

亦即，$\mathrm{Re}f_+$ 与 $\mathrm{Im}f_+$ 成为一对 Hilbert 变换。

(iii) $f_+\in\mathscr{H}_s$ 而 $\mathrm{Supp}F^{-1}[f_+]\subset C^*$.

证明 (i)→(ii)：令 $f_+(x)$ 是取自 $H^{(s)}(C)$ 中的函数在 $\mathscr{H}_s$ 中的边值，由定理1得知 $f_+\in\mathscr{H}_s$且成立关于$f(z)$的广义Cauchy-Bochner积分表达式(2.1)，再由 Cauchy-Bochner 积分的边值公式

$$f_+=\frac{1}{(2\pi)^n}f*\mathscr{K}_C,\quad f_-=\frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}f*\overline{\mathscr{K}}_C$$

可得到

$$f_+=\frac{1}{(2\pi)^n}f_+*\mathscr{K}_C,\quad 0=\frac{1}{(2\pi)^n}f_+*\overline{\mathscr{K}}_C.\qquad(2.3\mathrm{a、b})$$

从此，把实部与虚部分开，则得关系式(2.2a)～(2.2b)。

(ii)→(iii) 令f_+在$\mathscr{H}_s$满足关系式 (2.2a)～(2.2b) 则它亦满足(2.3a)～(2.3b)。对(2.3a)应用 Fourier 逆变换，并注意到核$\mathscr{K}_C(z)=\mathscr{K}_C(x+iy)$

当$y\to\pm C$，y 按 $\mathscr{H}_s(s<n/2)$中的范数→0 时的边值分别为

$$\mathscr{K}_C(x+iy)\to(\pm 1)^n\mathscr{K}_C(\pm x)=(\pm 1)^nF[\theta_{\pm C^*}]$$

则得 $$F^{-1}[f_+]=F^{-1}[f_+]F^{-1}[\mathscr{K}_C]=F^{-1}[f_+]\theta_{C^*}(\xi)$$

由是可得 $$\mathrm{Supp}F^{-1}[f_+]\subset C^*.$$

(iii)→(i)：如果$f_+\in\mathscr{H}_s$且$\mathrm{Supp}F^{-1}[f_+]\subset C^*$，则$F^{-1}[f_+]\in\mathscr{L}^2_s(C^*)$

由上述引理1可知：函数$f(z)=L[g]\in H^{(s)}(C)$，且它在$\mathscr{H}_s$中的边值等于

$$F[g]=f_+.$$ Q.E.D.

备考 当 $n=1$，$C=(0,\infty)=R^1_+$，公式(2.2a)～(2.2b)取如下形式

$$\mathrm{Re}f_+=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}f_+*\mathscr{P}\frac{1}{x},\quad \mathscr{P}\frac{1}{x}=PV\int\frac{dx}{x}\qquad(2.4\mathrm{a})$$

$$\mathrm{Im}f_+=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}f_+*\mathscr{P}\frac{1}{x},\quad \mathscr{P}\frac{1}{x}=PV\int\frac{dx}{x}\qquad(2.4\mathrm{b})$$

在物理上，公式(2.4a)～(2.4b)称为色散关系。(2.2a)～(2.2b)自然是作为关于多维情况的任意凸锐闭锥C*的因果性(Cauvality)的色散关系的推广。

M. L. Goldberger(1960)得到2-维色散关系的表达式：

$$\mathrm{Im} f(s,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho(s,t)}{t'+t}dt',\ \rho(s,t)\text{——权函数.}$$

这里对所有$s\geq 0$在有从$-4k_0^2$到$-\infty$割线的t平面中$\mathrm{Im} f(s,t)$是解析的. $f(s,t)$在两剖面(Cut plane)的拓扑乘积(topological product)中为两个复变量正则(reguler)的解析函数.

三、被 动 算 子

我们考虑一物理系统服从下述方案：假设原始内扰动：

$$u(x)=(u_1(x),\cdots,u_N(x))$$

引起外扰动（系统的响应）$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_N(x))$.

这里记$x=(x_1,\cdots,x_n)$，理解为时间、空间等变量. 现再假设满足下述条件：

(a) 线性的：如果对于原来的扰动u_1与u_2对应着扰动f_1与f_2，则它们的线性组合$\alpha u_1+\beta u_2$与扰动$\alpha f_1+\beta f_2$相联系，这里α，β为常数。

(b) 实的：如果原来扰动u是实的，则响应扰动亦是实的。

(c) 连续性：如果原来扰动$u(x)$的所有分量在$\mathscr{E}'$中趋于零，则相应的响应扰动$f(x)$的所有分量在$\mathscr{D}'$中亦趋于零.这里$\mathscr{D}'=\mathscr{D}(R^N)'$是广义函数空间，$\mathscr{E}'=\mathscr{E}(R^N)'=C^{\infty}(R^N)'$是在$R^N$中具有紧支集的广义函数的集合.

(d) 平移不变性：如果响应扰动$f(x)$与原来扰动$u(x)$相联系，则对应于任意平移$h\in R^n$，原来扰动$u(x+h)$对应于响应扰动$f(x+h)$.

条件(a)～(d)等价于存在唯一$N\times N$矩阵：$z(x)=(z_{kj}(x))$，$z_{kj}\in\mathscr{D}'(R^N)$.
它以下述公式联系着原来扰动$u(x)$与响应扰动$f(x)$：$z*u=f$ (3.1)

让我们加给系统(3.1)以如下要求，就是所谓对锥Γ的被动相关(passivity reiative)：

假设Γ是在R^n中（顶点在O）的闭的、凸的、立体锥.

(e) 对于锥Γ的被动相关性：即对于在$\mathscr{D}^{XN}$中的任意向量函数$\varphi(x)$成立下述不等式：

$$\mathrm{Re}\int_{-\Gamma}\langle z*\varphi,\varphi\rangle dx\geqq 0 \tag{3.2}$$

注意到函数$\langle z*\varphi,\varphi\rangle\in\mathscr{D}$，所以在(3.2)中的积分恒存在. 并且，因为矩阵$z(x)$的实性，被动条件(3.2)等价于

$$\int_{-\Gamma}\langle z*\varphi,\varphi\rangle dx\geqq 0\qquad(\varphi\in\mathscr{D}_r^{XN}) \tag{3.2$'$}$$

这里$\mathscr{D}_r^{XN}$是$\mathscr{D}$中具有实N个分量的向量组成的.

不等式(3.2)′在能量形式下是反映物理系统吸收能量，但不是产生能量的能力. 这里考虑到锥Γ的因果性关系.

定义 卷积算子(convoiution operator)$z*$被称为相对于锥Γ的被动算子(passive operator)，而相应的矩阵函数$\tilde{z}(\zeta)$（矩阵$z(x)$的Laplace变换）被称为物理系统的阻抗(impedance).

定理3 矩阵$z(x)$定义为关于锥Γ的被动算子的充分必要条件为其阻抗$\tilde{z}(\zeta)$是在区域T^C中的正的实矩阵，这里 $C=\mathrm{int}\Gamma^*$（锥Γ^*的内点的集合）.

本定理的证明基于下述引理2，证明细节参阅文[9].

引理2 假设$N\times N$矩阵$z(x)$有下述特性：

(a) 它定义为一个相对于包含在锥C^*中的某一个锥Γ_0的被动算子，Γ_0的边界假设是片片光滑的；

(b) 对包含在一锐凸锥C中的任意n面锥(n-hedral cone)

$$C'=[g:(e_1,g)>0,\ \cdots,\ (e_n,g)>0]$$

给为下述型式

$$z(x)=(e_1,D)^2\cdots(e_n,D)^2 z_{C'}(x)+\sum_{1\leq j\leq n} z_{C'}^{(j)} D_j\delta(x) \tag{3.3}$$

这里矩阵函数$z_{C'}(x)$在R^n中具有支集在C'^*的连续的、实的且缓增的；矩阵$z_{C'}^{(j)}$ $(j=1,\cdots n)$是实的、对称的且满足

$$\sum_{1\leq j\leq n} g_j z_{C'}^{(j)}\geqq 0 \qquad (g\in\bar{C}') \tag{3.4}$$

则矩阵$z(x)$定义一相对于锥$\Gamma_e=[x:(e,x)\geqq 0, x\in\Gamma_0]$的被动算子，这里$e$是取自锥$\bar{C}$的任意单位向量。

四、相对于锥$C=R_+^n$的多重色散关系

定理4 矩阵$z(x)$定义一相对于锥$C=R_+^n$的被动算子的充分必要条件是：(i)它的Fourier，变换$\tilde{z}(p)$满足色散关系：

$$\mathrm{Im}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Im}\mathscr{K}_n)+iz^{(0)}-\sum_{1\leq j\leq n} z^{(j)}p_j \tag{4.1}$$

式中矩阵$M(p)$是方程$p_1^2\cdots p_n^2 M(p)=\mathrm{Re}\tilde{z}(p)$ (4.2)

在$N(-\bar{R}_+^n\cup\bar{R}_+^n)$类中的一解。

(ii) 矩阵$\mathrm{Re}\tilde{z}(p)$是使得对$\forall a\in C^N$广义函数$\langle\mathrm{Re}\tilde{z}(p)a,\ a\rangle$在$R^n$中为缓增非负测度；矩阵$z^{(0)}$是实的、奇对称的，且矩阵$z^{(j)}(j=1,\cdots,n)$是实的与正的。

在色散关系式(4.1)中，矩阵$[M(p),z^{(0)},z^{(1)},\cdots,z^{(n)}]$是相差一附加项

$$[iAD_1\cdots D_n\mathrm{Im}[i^n\mathscr{K}_n(p)],\ A,0,\cdots,0] \tag{4.3}$$

为唯一的，式中A为一任意实常数奇对称矩阵。为了叙述这个定理的证明，先述下列诸引理

引理3[8] (Bochner-Schwartz 定理) $\mathscr{D}'$中的广义函数f为正定的充分必要条件是它为一缓增的非负测度的Fourier变换：$f=F[\mu]$ $(\mu\in\mathscr{S}',\ \mu\geq 0)$。

引理4[9] 下述条件是等价的：(i) 矩阵$z(x)$定义为一相对于锐锥Γ的被动算子；

(ii) 矩阵$z(x)$满足相对于锥Γ的被动性弱条件

$$\mathrm{Re}\int_{-\Gamma}[\langle z(x)a,a\rangle*\varphi]\bar{\varphi}dx\geqslant 0 \qquad (\varphi\in\mathscr{D},\ a\in C^N) \tag{4.4}$$

(iii) 矩阵$z(x)$满足条件（正定性）

$$\langle za+z^*a,a\rangle\geqslant 0 \qquad (a\in C^N) \tag{4.5}$$

以及引理2的条件(b)。

(iv) 矩阵$z(x)$满足耗散条件(dissipation condition)：

$$\mathrm{Re}\int\langle z*\varphi,\ \varphi\rangle dx\geqslant 0 \qquad (\varphi\in\mathscr{D}^{\times N}) \tag{4.6}$$

以及引理2的条件(b)。

引理5[9] 矩阵方程 $D_1^2\cdots D_n^2 z(x)=0$ (4.7)

在R^n中于实的连续的*-Hermitian矩阵函数类中且支集在$-\bar{R}_+^n\cup\bar{R}_+^n$中通解为下式

$$z(x)=[\mathscr{E}_n(x)-\mathscr{E}_n(-x)]z_0 \tag{4.8}$$

$\mathscr{E}_n$为(4.7)的基本解，z_0为一任意实的奇对称矩阵。

引理6[8] 如果$f\in\mathscr{H}_s$对某些s并满足下列等价条件：

(a) $\operatorname{supp}F(f)\subset -C^*\cup C^*$,

(b) $f=\dfrac{2}{(2\pi)^n}f_1*\operatorname{Im}\mathscr{K}_C$;

(c) $f=\dfrac{2}{(2\pi)^n}f*\operatorname{Re}\mathscr{K}_C$,

之一以及另一条件：

$$f_1=-\frac{2}{(2\pi)^n}f*\operatorname{Im}\mathscr{K}_C;$$

则广义函数f与f_1在$\mathscr{H}_s$中成一对Hilbert变换

$$\left.\begin{aligned} f_1&=-\frac{2}{(2\pi)^n}f*\operatorname{Im}\mathscr{K}_C\\ f&=\frac{2}{(2\pi)^n}f_1*\operatorname{Im}\mathscr{K}_C\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

引理7[8] Cauchy核$\mathscr{K}_C(z)$与$\mathscr{K}_{-C}(z)$的边值成立如下关系：

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{K}_{-C}(x)=\overline{\mathscr{K}_C(x)}=\mathscr{K}_C(-x) && (x\in R^n)\\ &\mathscr{K}_{-C}(x)=(-1)^n\mathscr{K}_C(x) && (x\in C\cup(-C))\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

与

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathscr{K}_C(x)&=\frac{1}{2}F[\theta_{C^*}+\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2}[\mathscr{K}_C(x)+\mathscr{K}_C(-x)]\\ \operatorname{Im}\mathscr{K}_C(x)&=\frac{1}{2i}F[\theta_{C^*}-\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2i}[\mathscr{K}_C(x)-\mathscr{K}_C(-x)]\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

基于上述诸引理，现来叙述定理4的Vladimirov的证法：

定理4的证明 必要性：

假设矩阵$z(x)$定义一关于锥$\bar{R}_+^n$的被动算子，由引理4及5可知，矩阵$z(x)$具有下述性质：

$$\langle z(x)a+z^*(x)a,a\rangle\gg 0 \qquad (a\in C^N) \tag{4.12}$$

$$z(x)=D_1^2\cdots D_n^2z_0(x)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}D_j\delta(x) \tag{4.13}$$

这里矩阵函数$z_0(x)$在R^n中连续的、实的与缓增的且具有支集在锥$\bar{R}_+^n$中；而矩阵$z^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n)$是实的与正的。

由引理3，对(4.12)与(4.13)取Fourier变换，可以断言广义函数

$$\langle\operatorname{Re}\tilde{z}(p)a,a\rangle=\frac{1}{2}F[\langle z(x)a+z^*(x)a,\ a\rangle] \qquad (\forall a\in C^N) \tag{4.14}$$

为在R^n中缓增的非负测度，且

$$\tilde{z}(p)=(-1)^n p_1^2\cdots p_n^2F[z_0](p)-i\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}p_j \tag{4.15}$$

$$\mathrm{Re}\tilde{z}(p)=\frac{(-1)^n}{2}p_1^2\cdots p_n^2F[z_0(x)+z_0^*(x)](p) \tag{4.16}$$

记

$$M(p)=\frac{(-1)^n}{2}F[z_0(x)+z_0^*(x)](p) \tag{4.17}$$

则矩阵$M(p)\in N(-\bar{R}_+^*\cup\bar{R}_+^*)$类，并由(4.16)得知它满足方程(4.2)。

利用引理6及引理7，并考虑等式

$$\begin{aligned}F[z_0](p)&=F[(z_0(x)+z_0^*(x))\theta_n(x)]\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}F[z_0(x)+z_0^*(x)]*F[\theta_n]\\&=\frac{2(-1)^n}{(2\pi)^n}M*\mathscr{K}_n.\end{aligned}$$

现在把它代入关系式(4.15)于是有

$$\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Re}\mathscr{K}_n)-i\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}P_j \tag{4.18}$$

把(4.18)的实部与虚部分开，得到当$z^{(0)}=0$时色散关系(4.1)以及关系式

$$\mathrm{Re}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Re}\mathscr{K}_n) \tag{4.19}$$

由于引理6的条件(c)有

$$M=\frac{2}{(2\pi)^n}M*\mathrm{Re}\mathscr{K}_n \tag{4.20}$$

所以(4.19)等价于(4.2)。

充分性。如果矩阵$z(x)$以及它的Fourier变换$\tilde{z}(p)$满足定理四的条件(i)与(ii)，由(4.20)，方程(4.2)等价于等式(4.19)，并藉助色散关系(4.1)，得到

$$\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathscr{K}_n)-z^{(0)}-i\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}p_j \tag{4.21}$$

因此利用Fourier逆变换，得

$$z(x)=D_1^2\cdots D_n^2z_1(x)-z^{(0)}\delta(x)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}z^{(j)}D_j\delta(x) \tag{4.22}$$

式中 $z_1(x)=2(-1)^nF^{-1}[M](x)\theta_n(x)$是一在$R^n$中缓增实的连续函数且具有支集在$\bar{R}_+^n$中。

并注意到$D_1^2\cdots D_n^2z_1(x)-z^{(0)}\delta(x)=D_1^2\cdots D_n^2[z_1(x)-z^{(0)}(x)\mathscr{E}_n(x)]$，则可知矩阵$z(x)$满足条件(4.13)，由于(4.14)与引理3可知条件(4.12)亦被满足。

再由引理4，可知矩阵$z(x)$定义一关于锥$\bar{R}_+^*$的被动算子。

至此，还可证明色散关系(4.1)的唯一性只相差一形如(4.3)式的附加项，这里不赘。

五、结　　语

物理现象的数学模型的构造与研究构成数学物理的重要课题，结合近代物理的需要，特别是非线性物理的需要去发展有关的现代数学理论和方法，是现代数学物理的重要课题之一，在这届（1989年）非线性物理的国际会议的报告中已体现出来，因此，摸索现代数学理论和方法对近代物理、力学的应用[10~14]是个时代课题。

参 考 文 献

[1] Kramers, H. A., *Inter. Fisici.*, *Com.*, **2** (1927), 545.

[2] 黄烈德 算子理论对近代力学的若干应用, 《现代数学与力学》(钱伟长、郭友中主编), 科学出版社出版, 北京 (1989), 16—25.

[3] Боголюбов Н. Н. и Д. В. ширков, *Введение в теорию Квантованных полей*, Москва (1957). (中译本(1966)).

[4] Beltrami, E.J. and M.R. Wohlers, Distributions and the boundary vulues of analytic functions. Academic Press (1966).

[5] 张宗燧, 《色散关系引论》, 科学出版社 (1983).

[6] Vladimirov, V.S., A generalization of the Cauchy-Bochner integral representation, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **33** (1969).

[7] Bochner, S., Group invariance of Cauchy's formula in several variables, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 687—707.

[8] Владимиров В. С., *Обобщённые Функции в Мате. Физ.*, Москва (1979).

[9] Vladimirov, V. S. Linear passive system, *Theoretical & Math. Phys.*, **1** (1969) 51—72.

[10] Huang Lie-de (黄烈德), Space Bekya eqs. and its applications, *Inter. Conf. on Nonlinear Phys.* (*ICNP*), Shanghai (1989).

[11] Huang Lie-de (黄烈德), The nec. cond. for short range soliton solution of GKdV eq., *IPCP*, Shanghai (1989).

[12] 黄烈德, 非线性波动方程类五大特色的内在联系, 计算物理, 4 (1987), 413—425.

[13] Huang Lie-de (黄烈德), The modified Helmholtz eqs. and their boundary value problems, *Acta Math. Sci.* **8**(2) (1988), 165—179.

[14] 黄烈德, 快速Laplace逆变换, 中国空间科学技术, 4 (1988), 27—37.

The Cauchy Integral of Many Complex Variables, Passive Operators and Multidimensional Dispersion Relations

Huang Lie-de

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

This note illustrates the multidimensional dispersion relations that connect the real and imaginary parts of the matrix $\tilde{z}(p)$ (it is the boundary value of the impedance $\tilde{z}(\zeta)$):

$$\mathrm{Re}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Re}\mathscr{K}_n),\qquad (\text{for } z^{(0)}=0)$$

$$\mathrm{Im}\tilde{z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\cdots p_n^2(M*\mathrm{Im}\mathscr{K}_n)-\sum_{1\le j\le n}z^{(j)}p_j,\quad (\text{for } z^{(0)}=0).$$

Key words the cauchy integral of many complex variables, passive operators, the multidimensional dispersion relations