应用数学和力学，第12卷第7期（1991年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性地基无限长梁动力问题的一般解

郑小平　王尚文　陈百屏

（西北工业大学，1990年7月11日收到）

摘　　要

本文从 Euler-Bernoulli 梁出发，对弹性地基采用 Winkler 假定，建立了问题的数学模型。然后对空间变量和时间变量分别进行 Fourier 变换和 Laplace 变换，利用逆变换褶积积分，得到了弹性地基无限长梁一般动力问题的解析解。最后对自由振动，脉冲激励和运动载荷情况分别进行了讨论。

关键词　弹性地基　无限长梁　动力问题　一般解　积分变换方法

一、引　言

弹性地基上无限长梁的动力学问题，是工程实际中经常遇到的一类重要问题，如机场跑道、公路路面、火车轨道、船台滑道的强度分析和工程设计等。长期以来许多学者在该领域作了大量的研究工作，如 Timoshenko[1]、Kenney[2]、Saito[6]、Fryba[4] 等曾先后用不同方法给出了一些特殊情况下的解析解。但是，根据笔者所知关于这类问题的一般解还未见报道。

本文的目的是用积分变换方法得到一般问题的解析解。在求解过程中本文同时使用了 Fourier 变换和 Laplace 变换，这样就避免了以往那种只对空间变量作 Fourier 变换的求解方法或变量分离方法的局限性。

二、问题的基本方程

Winkler 地基上无限长梁的一般动力学方程为

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+bky(x,t)=p(x,t) \tag{2.1}$$

式中　$y(x,t)$ 为梁的挠曲函数；$p(x,t)$ 为梁上作用的动载荷，EI 和 m 分别为梁的抗弯刚度和单位长度质量；c 和 k 分别为地基阻尼系数和地基反应模量；b 为梁与地基的接触宽度。

$y(x,t)$ 的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} y(x,t)|_{t=0}&=f(x)\\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}&=g(x)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$y(x,t)$的无穷远处条件为

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial^n y(x,t)}{\partial x^n}=0 \qquad (n=0,1,2,3) \tag{2.3}$$

(2.1)～(2.3)便是问题的基本方程。

三、基本方程的求解

首先关于空间变量x对方程(2.1)和(2.2)作Fourier变换。根据文献[5]，利用条件(2.3)方程(2.1)和(2.2)变为

$$\frac{\partial^2 Y(\xi,t)}{\partial t^2}+\frac{c}{m}\frac{\partial Y(\xi,t)}{\partial t}+\frac{1}{m}(EI\xi^4+bk)Y(\xi,t)=\frac{1}{m}P(\xi,t) \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&Y(\xi,t)|_{t=0}=F(\xi)\\&\left.\frac{\partial Y(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=G(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中

$$Y(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y(x,t)\exp[i\xi x]dx \tag{3.3}$$

$$P(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,t)\exp[i\xi x]dx \tag{3.4}$$

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp[i\xi x]dx \tag{3.5}$$

$$G(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\exp[i\xi x]dx \tag{3.6}$$

其次，关于时间变量t对方程(3.1)作Laplace变换。根据文献[5]，利用(3.2)方程(3.1)变为

$$\hat{Y}(\xi,\tau)=\left[\frac{1}{m}\hat{P}(\xi,\tau)+(\tau+2\alpha)F(\xi)+G(\xi)\right]\Big/[(\tau+\alpha)^2+\beta^2(\xi)] \tag{3.7}$$

其中

$$\hat{Y}(\xi,\tau)=\int_0^{+\infty}Y(\xi,t)\exp[-t\tau]dt \tag{3.8}$$

$$\hat{P}(\xi,\tau)=\int_0^{+\infty}P(\xi,t)\exp[-t\tau]dt \tag{3.9}$$

$$\alpha=\frac{C}{2m} \tag{3.10}$$

$$\beta(\xi)=\sqrt{\frac{EI}{m}\xi^4+\frac{bk}{m}-\frac{c^2}{4m^2}} \tag{3.11}$$

再对(3.7)式作Laplace逆变换，利用文献[5]中的褶积定理得到

$$\begin{aligned}Y(\xi,t)=&\exp[-\alpha t]\left\{F(\xi)\cos\beta(\xi)t+[\alpha F(\xi)+G(\xi)]\frac{\sin\beta(\xi)t}{\beta(\xi)}\right\}\\&+\frac{1}{m\beta(\xi)}\int_0^t P(\xi,\tau)\exp[-\alpha(t-\tau)]\sin\beta(\xi)(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3.12}$$

最后对(3.12)作Fourier逆变换，可以推出

$$y(x,t)=\frac{1}{\pi}\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{f(r)\int_{0}^{+\infty}\cos\beta(\xi)t\cos\xi(x-r)d\xi\right.$$
$$+[\alpha f(r)+g(r)]\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\beta(\xi)}\sin\beta(\xi)t\cos\xi(x-r)d\xi\Big\}dr$$
$$+\frac{1}{m\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{\cos\xi(x-r)}{\beta(\xi)}\int_{0}^{t}\exp[-\alpha(t-\tau)]p(r,\tau)\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sin\beta(\xi)(t-\tau)d\tau\right]d\xi\right\}dr \tag{3.13}$$

记

$$R(r,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\beta(\xi)}\cos\xi r\sin\beta(\xi)td\xi \tag{3.14}$$

将(3.14)代入(3.13)得到

$$y(x,t)=\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{f(r)\frac{\partial R(x-r,t)}{\partial t}+[\alpha f(r)+g(r)]\right.$$
$$\left.\cdot R(x-r,t)\right\}dr+\frac{1}{m}\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{t}p(r,\tau)\exp[\alpha\tau]\right.$$
$$\left.\cdot R(x-r,t-\tau)d\tau\right]dr \tag{3.15}$$

(3.15)式便是弹性地基无限长梁一般动力问题的解析解，由此出发可进行各种动力问题的研究，它为研究此类问题给出了一个统一的方法。

另外应该指出的是在前边的推导中，默认$c^2\leqslant 4bk$，这可以从(3.11)式看出。当$c^2>4bk$时，(3.14)式要作如下修正

$$R(r,\tau)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\xi_0}\frac{1}{\beta_1(\xi)}\cos\xi r\,\mathrm{sh}\beta_1(\xi)td\xi\right.$$
$$\left.+\int_{\xi_0}^{+\infty}\frac{1}{\beta(\xi)}\cos\xi r\sin\beta(\xi)td\xi\right\} \tag{3.16}$$

其中

$$\xi_0=\sqrt[4]{(c^2-4bk)/4EI} \tag{3.17}$$

$$\beta_1(\xi)=\sqrt{-\frac{EI}{m}\xi^4-\frac{bk}{m}+\frac{c^2}{4m}} \tag{3.18}$$

其它公式不变。

四、讨　论

1. 自由振动情况

在(3.15)中取$p(x,t)=0$，便得到自由振动的一般解

$$y(x,t)=\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{f(r)\frac{\partial R(x-r,t)}{\partial t}\right.$$
$$\left.+[\alpha f(r)+g(r)]R(x-r,t)\right\}dr \tag{4.1}$$

从(4.1)出发可以进行强阻尼、弱阻尼和临界阻尼状态讨论，并且可以得出类似于单自由度质点在自由振动情况下的一些结论。

2. 脉冲激励情况

在(3.15)中取$f(x)=g(x)=0$，$p(x,t)=\delta(x)\cdot\delta(t)$，便得到系统的脉冲响应

$$y(x,t)=\frac{1}{m\pi}\exp[-\alpha t]\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta(\xi)}\cos\xi x\sin\beta(\xi)td\xi \tag{4.2}$$

解答(4.2)关于时间t可分离成衰减项与波动项之积，其中被动情况与系统固有特征函数$\beta(\xi)$有关，衰减情况与阻尼因子α成正比。另外可以看出，在任意载荷作用下的一般解(3.15)可以由脉冲响应(4.2)叠加得到。

3. 运动载荷情况

在(3.15)中取$f(x)=g(x)=0$，便得到强迫振动的一般解

$$y(x,t)=\frac{1}{m}\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^t p(r,\tau)\exp[\alpha\tau]\cdot R(x-r,t-\tau)d\tau\right]dr \tag{4.3}$$

现取$p(x,t)$为以常速度v运动的集中载荷，设载荷强度为p_0，作用范围为$[0,L]$区间，即

$$p(x,t)=\begin{cases} p_0\delta(x-vt) & (0\leqslant x\leqslant L)\\ 0 & (0>x>L)\end{cases} \tag{4.4}$$

将(4.4)代入(4.3)，利用δ函数的性质，有

$$y(x,t)=\begin{cases} \frac{p_0}{m}\exp[-\alpha t]\int_0^t\exp[\alpha\tau]R(x-v\tau,t-\tau)d\tau & \left(t\leqslant\frac{L}{v}\right)\\ \frac{p_0}{m}\exp[-\alpha t]\int_0^{\frac{L}{v}}\exp[\alpha\tau]R(x-v\tau,t-\tau)d\tau & \left(t>\frac{L}{v}\right)\end{cases} \tag{4.5}$$

由(4.5)式出发进行数值积分，可以得到许多有实用价值的结果。现在我们利用(4.5)式来导出Timoshenko解。为此，在(4.5)中取$t=L/2v$，$x=(L/2)+s$，再令$L\to+\infty$，得到

$$y(s)=\frac{p_0}{\pi m}\int_0^{+\infty}\frac{(\alpha^2+\beta^2-\xi^2v^2)\cos\xi s-2\xi v\alpha\sin\xi s}{[\alpha^2+(\beta+\xi v)^2][\alpha^2+(\beta-\xi v)^2]}d\xi \tag{4.6}$$

(4.6)式给出了当运动载荷从$-\infty$运动到x点时，距x点为s处的挠曲线方程。引入记号

$$\rho=\frac{v}{2}\left(\frac{4m^2}{bkEI}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.7}$$

$$\lambda=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{mbk}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

$$y_0=\frac{p_0}{2bk}\left(\frac{bk}{4EI}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.9}$$

将(4.7)～(4.9)式代入(4.6)式，进行化简得到

$$y(s)=\frac{4}{\pi}y_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi^4-4\rho^2\xi^2-i8\rho\lambda\xi+4}\exp[is\xi]d\xi \tag{4.10}$$

(4.10)式和文献[6]中(13.17)式完全一致，由此只说明Timoshenko解只是解(4.5)的一种特殊情况。这也间接地说明了本文给出的解析解(3.15)的正确性和一般性。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S., Method of analysis of statical and dynamical stress in rail, *Proc. of the Sec. Inter. Con. for Appl. Mech.*, Zurich, Switzerland (1926), 407—418.

[2] Kenney, J. T., Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load, *J. of Appl. Mech.*, 21, 4 (1954), 359—364.

[3] Saito, H. and T. Murakami, Vibrations of an infinite beam on an elastic foundation with consideration of mass of a foundation, *Japanese Soc. of Mech. Eng.*, 12 (1969), 200—205.

[4] Fryba, L., Infinite Beam on an elastic foundation subjected to a moving Load, *Aplikace Matematiky*, 2, 2 (1957), 105—132.

[5] I. N. 史奈登, 《富利叶变换》, 科学出版社, 北京 (1958).

[6] Fryba, L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing (1971).

General Solution for Dynamical Problem of Infinite Beam on an Elastic Foundation

Zheng Xiao-ping, Wang Shang-wen Chen Bai-ping

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Abstract

Based on the theory of Euler-Bernoulli beam and Winkler assumption for elastic foundation, a mathematical model is presented. By using Fourier transformation for space variable, Laplace transformation for time variable and convolution theorem for their inverse transformations, a general solution for dynamical problem of infinite beam on an elastic foundation is obtained. Finally, the cases of free vibration, impulsive response and moving load are also discussed.

Key words elastic foundation, infinite beam, dynamical problem, general solution, integral transformation method