应用数学和力学，第 12 卷第 9 期（1991 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

任意分布横向载荷下圆板混合边值问题的一种解析方法*

郑小平　叶天麒　陈百屏

（西北工业大学，1990年 5 月18日收到）

摘　要

通过引入边界混合函数的概念，选用极坐标下双调和方程的特解序列为试函数，本文提出了一种求解圆板混合边值问题的解析方法．最后通过三个实例计算说明了该方法具有较好的收敛性和稳定性．

关键词　圆板　混合边值问题　边界混合函数　双调和多项式　解析方法

一、引　　言

圆板弯曲问题在工程实际中有着广泛的应用，长期以来国内外许多学者作了大量的研究．这个问题的个别解曾由W. Flügge, H. Reissner, H. Schmidt 等人讨论过，其详细内容可从参考文献[1]中找到．后来林鸿荪和叶开沅等人[2]~[3]分别采用不同方法对几种典型边值问题给出了一般解．但上述研究大都限于一致边界条件问题．而对于混合边值问题要得到精确解是非常困难的，一般采用直接数值方法．根据文献[4]，对于混合边值问题，Ritz法一般收敛很慢，而Galerkin 法又难找到满足全部边界条件的试函数，所以常见的方法主要是有限元法和边界元法．

本文的基本思想是采用极坐标下双调和方程的特解序列为试函数，从而使得近似函数精确满足问题的平衡微分方程．为了满足混合边值条件，引入了混合边值函数的概念，在此基础了提出了一种求解任意分布横向载荷下圆板混合边值问题的解析方法．

二、基 本 方 程

薄板弯曲问题的基本微分方程为

$$\nabla^4 W=\frac{q}{D}\qquad (在\Omega上) \tag{2.1}$$

式中　D为板的弯曲刚度，q为板上作用的横向载荷，W为中面挠度，Ω为板所占据的区域，$\partial\Omega$为区域Ω的边界．为了书写方便，引入下边的边界微分算子记号

*国家自然科学基金资助项目．

$$\left.\begin{aligned}&L_W=\Big|_{r=R},\quad L_\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=R}\\&L_M=-D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]_{r=R}\\&L_Q=-D\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2+(1-\mu)\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^3}{\partial r\partial^2\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]_{r=R}\end{aligned}\right\}\text{在}\partial\Omega\text{上}\tag{2.2}$$

混合边界条件可分为三种

1） 固支边界

$$L_WW=\bar{W},\ L_\varphi W=\bar{\varphi}\qquad(\text{在}\partial\Omega_1\text{上})\tag{2.3}$$

2） 简支边界

$$L_WW=\bar{W},\ L_MW=\bar{M}\qquad(\text{在}\partial\Omega_2\text{上})\tag{2.4}$$

3） 自由边界

$$L_MW=\bar{M},\ L_QW=\bar{Q}\qquad(\text{在}\partial\Omega_3\text{上})\tag{2.5}$$

式中 $\bar{W}$，$\bar{\varphi}$，$\bar{M}$和$\bar{Q}$均为边界上的已知函数，R为圆板的半径，并且

$$\partial\Omega=\partial\Omega_1+\partial\Omega_2+\partial\Omega_3\tag{2.6}$$

三、基本方程的求解

记

$$L_1=\begin{cases}\alpha(\theta)L_W & (\text{在}\partial\Omega_1+\partial\Omega_2\text{上})\\ \dfrac{D}{R^3}L_Q & (\text{在}\partial\Omega_3\text{上})\end{cases}\tag{3.1}$$

$$L_2=\begin{cases}\beta(\theta)\dfrac{1}{R}L_\varphi & (\text{在}\partial\Omega_1\text{上})\\ \dfrac{D}{R^2}L_M & (\text{在}\partial\Omega_2+\partial\Omega_3\text{上})\end{cases}\tag{3.2}$$

式中 $\alpha(\theta)$和$\beta(\theta)$为无量纲加权函数，L_1和L_2分别称为第一和第二边界混合微分算子，相应地称L_1W和L_2W为第一和第二边界混合函数，它们的量纲与W相同．这样，边界条件(2.3)～(2.5)可整理为

$$L_1W=\begin{cases}\alpha(\theta)\bar{W} & (\text{在}\partial\Omega_1+\partial\Omega_2\text{上})\\ \dfrac{D}{R^3}\bar{Q} & (\text{在}\partial\Omega_3\text{上})\end{cases}\tag{3.3}$$

$$L_2W=\begin{cases}\beta(\theta)\dfrac{1}{R}\bar{\varphi} & (\text{在}\partial\Omega_1\text{上})\\ \dfrac{D}{R^2}\bar{M} & (\text{在}\partial\Omega_2+\partial\Omega_3\text{上})\end{cases}\tag{3.4}$$

微分方程(2.1)的通解可写成

$$W=\hat{W}+W^*\tag{3.5}$$

其中 $\hat{W}$为非齐次方程特解，W^*为齐次方程通解．对于非奇异问题，可将W^*表示成Clebsch形式

$$W^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Phi_k(r,\theta) \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1, \quad \Phi_2 = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \\ \left.\begin{aligned} &\Phi_{4m-1} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^m \cos m\theta \\ &\Phi_{4m} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^{m+2} \cos m\theta \\ &\Phi_{4m+1} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^m \sin m\theta \\ &\Phi_{4m+2} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^{m+2} \sin m\theta \end{aligned}\right\} \quad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.7}$$

将(3.5)式代入(3.3)式和(3.4)式得到

$$L_1 W^* = \begin{cases} \alpha(\bar{W} - L_W \hat{W}) & (\text{在}\partial\Omega_1 + \partial\Omega_2\text{上})\text{上} \\ \dfrac{D}{R^3}\left(\bar{Q} - L_Q \hat{W}\right) & (\text{在}\partial\Omega_3) \end{cases} \tag{3.8a}$$

$$L_2 W^* = \begin{cases} \beta \dfrac{1}{R}(\bar{\varphi} - L_\varphi \hat{W}) & (\text{在}\partial\Omega_1\text{上}) \\ \dfrac{D}{R^2}(\bar{M} - L_M \hat{W}) & (\text{在}\partial\Omega_2 + \partial\Omega_3\text{上}) \end{cases} \tag{3.8b}$$

由(3.6)式和(3.7)式知

$$L_1 W^* = \begin{cases} \alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k & (\text{在}\partial\Omega_1 + \partial\Omega_2\text{上}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} d_k f_k & (\text{在}\partial\Omega_3\text{上}) \end{cases} \tag{3.9a}$$

$$L_2 W^* = \begin{cases} \beta \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k & (\text{在}\partial\Omega_1\text{上}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k & (\text{在}\partial\Omega_2 + \partial\Omega_3\text{上}) \end{cases} \tag{3.9b}$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ \left.\begin{aligned} &a_{4m-1} = a_{4m} = \cos m\theta \\ &a_{4m+1} = a_{4m+2} = \sin m\theta \end{aligned}\right\} \quad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} b_1=0 \\ b_2=2 \\ \left.\begin{array}{l} b_{4m-1}=m\cos m\theta \\ b_{4m}=(m+2)\cos m\theta \\ b_{4m+1}=m\sin m\theta \\ b_{4m+2}=(m+2)\sin m\theta \end{array}\right\} \quad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=-2(1+\mu) \\ \left.\begin{array}{l} c_{4m-1}=-(1-\mu)m(m-1)\cos m\theta \\ c_{4m}=-[m(1-\mu)+2(1+\mu)](m+1)\cos m\theta \\ c_{4m+1}=-(1-\mu)m(m-1)\sin m\theta \\ c_{4m+2}=-[m(1-\mu)+2(1+\mu)](m+1)\sin m\theta \end{array}\right\} \quad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} d_1=d_2=0 \\ \left.\begin{array}{l} d_{4m-1}=(1-\mu)m^2(m-1)\cos m\theta \\ d_{4m}=[m(1-\mu)-4]m(m+1)\cos m\theta \\ d_{4m+1}=(1-\mu)m^2(m-1)\sin m\theta \\ d_{4m+2}=[m(1-\mu)-4]m(m+1)\sin m\theta \end{array}\right\} \quad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.13}$$

将方程(3.8a)和(3.8b)两端展成Fourier级数形式，利用三角函数的正交性质得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha a_k\cos m\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_3}d_k\cos m\theta d\theta\right)f_k$$
$$=\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha(\bar{W}-L_W\hat{W})\cos m\theta d\theta+\frac{D}{R^3}\int_{\partial\Omega_3}(\bar{Q}-L_Q\hat{W}))\cos m\theta d\theta$$
$$(m=0,1,2,\cdots) \tag{3.14a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha a_k\sin m\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_3}d_k\sin m\theta d\theta\right)f_k$$
$$=\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha(\bar{W}-L_W\hat{W})\sin m\theta d\theta+\frac{D}{R^3}\int_{\partial\Omega_3}(\bar{Q}-L_Q\hat{W})\sin m\theta d\theta$$
$$(m=1,2,\cdots) \tag{3.14b}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Omega_1}\beta b_k\cos m\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}c_k\cos m\theta d\theta\right)f_k$$
$$=\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega_1}\beta(\bar{\varphi}-L_\varphi\hat{W})\cos m\theta d\theta+\frac{D}{R^2}\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}(\bar{M}-L_M\hat{W})\cos m\theta d\theta$$
$$(m=0,1,2,\cdots) \tag{3.14c}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Omega_1}\beta b_k\sin m\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}c_k\sin m\theta d\theta\right)f_k$$
$$=\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega_1}\beta(\bar{\varphi}-L_\varphi\hat{W})\sin m\theta d\theta+\frac{D}{R^2}\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}(\bar{M}-L_M\hat{W})\sin m\theta d\theta$$
$$(m=1,2,\cdots) \tag{3.14d}$$

联立求解方程组(3.14a)～(3.14d)便可得到问题的精确解，特别当问题为一致边界条件时，该精确解还具有解析封闭形式。若将级数(3.6)从$k\geqslant N+1$后截断，可得到如下线性方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}f_k=B_m\qquad(m=1,2,\cdots,N)\tag{3.15}$$

$$A_{mk}=\begin{cases}\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha a_k\cos(m-1)\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_3}d_k\cos(m-1)\theta d\theta\\ \qquad\qquad(m=1,2,\cdots,n+1)\\ \int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha a_k\sin(m-n-1)\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_3}d_k\sin(m-n-1)\theta d\theta\\ \qquad\qquad(m=n+2,\cdots,2n+1)\\ \int_{\partial\Omega_1}\beta b_k\cos(m-2n-2)\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}c_k\cos(m-2n-2)\theta d\theta\\ \qquad\qquad(m=2n+2,\cdots,3n+2)\\ \int_{\partial\Omega_1}\beta b_k\sin(m-3n-2)\theta d\theta+\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}c_k\sin(m-3n-2)\theta d\theta\\ \qquad\qquad(m=3n+3,\cdots,\ 4n+2;\ \ k=1,2,\cdots,N)\end{cases}\tag{3.16}$$

$$B_m=\begin{cases}\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha(\overline{W}-L_W\hat{W})\cos(m-1)\theta d\theta+\frac{D}{R^3}\int_{\partial\Omega_3}(\overline{Q}-L_Q\hat{W})\\ \quad\cdot\cos(m-1)\theta d\theta\qquad\qquad(m=1,2,\cdots,n+1)\\ \int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}\alpha(\overline{W}-L_W\hat{W})\sin(m-n-1)\theta d\theta+\frac{D}{R^3}\int_{\partial\Omega_3}(\overline{Q}-L_Q\hat{W})\\ \quad\cdot\sin(m-n-1)\theta d\theta\qquad\qquad(m=n+2,\cdots,2n+1)\\ \frac{1}{R}\int_{\partial\Omega_1}\beta(\overline{\varphi}-L_\varphi\hat{W})\cos(m-2n-2)\theta d\theta+\frac{D}{R^2}\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}(\overline{M}-L_M\hat{W})\\ \quad\cdot\cos(m-2n-2)\theta d\theta\qquad\qquad(m=2n+2,\cdots,3n+2)\\ \frac{1}{R}\int_{\partial\Omega_1}\beta(\overline{\varphi}-L_\varphi\hat{W})\sin(m-3n-2)\theta d\theta+\frac{D}{R^2}\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}(\overline{M}-L_M\hat{W})\\ \quad\cdot\sin(m-3n-2)\theta d\theta\qquad\qquad(m=3n+3,\cdots,4n+2)\end{cases}\tag{3.17}$$

其中

$$N=4n+2\tag{3.18}$$

对方程(3.15)求解便可得到任意分布横向载荷下圆板混合边值问题的近似解。

四、数　值　结　果

作为上节结果的具体应用，这里我们讨论在均布载荷作用下的圆板弯曲问题，其边界条件分别为下述三种情况。

1)　在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上固支，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$上简支；

2)　在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上固支，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$上自由；

3)　在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上简支，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$上自由；

在均布荷载q作用下，(2.1)的特解可取为

$$\tilde{W}=\frac{qR^4}{64D}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 \tag{4.1}$$

考虑到问题对称性有

$$W^*=\sum_{k=1}^{n}\left[f_{2k-1}\cos(k-1)\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}+f_{2k}\cos(k-1)\theta\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}\right] \tag{4.2}$$

取$\mu=0.3$，$n=20$，$\alpha=\beta=1$，将计算结果列入表1～表3．另外在三种支承情况下，圆板中心点处的挠度分别为

$$W_1=0.02762qR^4/D \tag{4.3}$$

$$W_2=0.09915qR^4/D \tag{4.4}$$

$$W_3=0.31854qR^4/D \tag{4.5}$$

表 1　　　　一半固支一半简支问题

θ	$W(qR^4/D)$				L_wW	$L_\varphi W$	L_MW	L_QW
	$\frac{r}{R}=0.2$	$\frac{r}{R}=0.4$	$\frac{r}{R}=0.6$	$\frac{r}{R}=0.8$	(qR^4/D)	(qR^3/D)	(qR^2)	(qR)
0°	0.02289	0.01610	0.00873	0.00261	0.00000	0.00209	−0.23654	−1.58198
30°	0.02324	0.01652	0.00900	0.00270	0.00000	−0.00202	−0.07920	0.49207
60°	0.02427	0.01800	0.01017	0.00310	0.00000	0.00212	−0.26723	−1.68324
90°	0.02582	0.02076	0.01345	0.00568	0.00000	−0.02123	−0.01048	0.78311
120°	0.02747	0.02390	0.01751	0.00920	0.00000	−0.04575	−0.01078	−0.52282
150°	0.02868	0.02602	0.01975	0.01061	0.00000	−0.05330	−0.00554	−0.49820
118°	0.02912	0.02672	0.02043	0.01100	0.00000	−0.05571	0.01156	−0.27158

表 2　　　　一半固支一半自由问题

θ	$W(qR^4/D)$				L_wW	$L_\varphi W$	L_MW	L_QW
	$\frac{r}{R}=0.2$	$\frac{r}{R}=0.4$	$\frac{r}{R}=0.6$	$\frac{r}{R}=0.8$	(qR^4/D)	(qR^3/D)	(qR^2)	(qR)
0°	0.06130	0.03342	0.01463	0.00372	0.00073	0.00937	−0.21414	4.17880
30°	0.06476	0.03668	0.01622	0.00399	−0.00079	−0.00930	−0.20250	−5.21250
60°	0.07571	0.04962	0.02448	0.00623	0.00114	0.01066	−0.25149	5.46900
90°	0.09462	0.08153	0.06154	0.03821	0.01901	−0.07661	−0.23837	−0.50054
120°	0.11830	0.13319	0.14511	0.15572	0.16567	0.04845	−0.02408	−0.04617
150°	0.13860	0.18217	0.22896	0.27805	0.32870	0.25683	−0.00595	−0.03291
180°	0.14662	0.20209	0.32826	0.32826	0.39566	0.34156	0.01762	0.04677

表 3　　　　一半简支一半自由问题

θ	$W(qR^4/D)$				L_wW	$L_\varphi W$	L_MW	L_QW
	$\frac{r}{R}=0.2$	$\frac{r}{R}=0.4$	$\frac{r}{R}=0.6$	$\frac{r}{R}=0.8$	(qR^4/D)	(qR^3/D)	(qR^2)	(qR)
0°	0.24291	0.17531	0.11344	0.05526	−0.00139	−7.28818	0.05180	−9.83048
30°	0.24987	0.18324	0.11923	0.05818	0.00144	−0.26316	−0.05089	9.63865
60°	0.27138	0.21160	0.14278	0.07037	−0.00194	−0.36938	0.05636	−13.28540
90°	0.30728	0.27356	0.21743	0.13856	0.03741	−0.54977	−0.03457	−3.92349
120°	0.35137	0.36994	0.37637	0.37488	0.37045	−0.02292	0.00659	−0.69888
150°	0.38890	0.46135	0.53661	0.61533	0.69780	0.42175	0.00420	−0.19990
180°	0.40373	0.49857	0.60192	0.71215	0.8298	0.59232	−0.00802	0.58091

五、总　结

1) 本文提出了一种求解圆板混合边值问题的解析方法，并且给出了相应的计算公式。利用公式(3.15)，可以求得任意分布横向载荷下圆板混合边值问题的近似解。另外，从(3.14a)～(3.14d)出发可以求得文献[1]中给出的各种一致边值问题的封闭解析解。

2) 因为(3.5)式已精确满足平衡微分方程(2.1)，所以近似解的收敛情况完全由边界吻合程度决定。表1～表3的计算结果表明，本文提出的方法具有较好的收敛性和稳定性。特别与其它方法相比，弯矩和剪力在边界上能收敛到如此高的精度并不多见。

3) 在方程(3.1)和(3.2)中引入加权函数 α 和 β 是为了改善式中诸项的量级差别，以便提高解的收敛速度。限于篇幅，这里不作进一步讨论。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S. and S. Woinwsky-Krieger, *Theory of Plates and Shell*, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1956).

[2] 林鸿荪，任意横向载荷下弹性圆形及圆环形薄板的弯曲，物理学报，12(1956)，360—375.

[3] 叶开沅、许剑云，任意分布横向载荷下的环形薄板弯曲的一般解及若干应用问题，兰州大学学报，力学专号，1 (1979)，202—225.

[4] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社 (1980).

An Analytical Method for a Mixed Boundary Value Problem of Circular Plates under Arbitrary Lateral Loads

Zheng Xiao-ping　　Ye Tian-qi　　Chen Bai-ping

(*Northwestern Polytechical University, Xi'an*)

Abstract

In this paper by using the concept of mixed boundary functions, an analytical method is proposed for a mixed boundary value problem of circular plates. The trial functions are constructed by using the series of particular solutions of the biharmonic equations in the polar coordinate system. Three examples are presented to show the stability and high convergence rate of the method.

Key words circular plate, mixed boundary value problem, mixed boundary functions, analytical method