

# 弹性圆杆扭转的二阶效应

陈 勉 陈至达

(中国矿业大学北京研究生部, 1990年6月11日收到)

## 摘 要

本文基于拖带坐标方法和S-R分解定理<sup>[1]</sup>分析了弹性圆杆扭转的二阶效应。应用渐近方法, 证明了弹性圆杆扭转伸长效应的存在, 并导出轴向力、扭矩的表达式。

**关键词** 扭转 二阶效应 大变形 S-R分解定理

## 一、引 言

大扭转伴有伸长, 这种现象通常称为 Poynting 效应或 Swift 效应、轴向效应、二阶效应。它是线性弹性理论所不能解释的。

Poynting(1909)首次研究了大扭转下的轴向效应, 他完成了一系列金属弦的扭转实验, 并给出了伸长与扭转角的经验公式。Swift(1947)试验了七种材料的二阶效应, 并给出了一系列实验数据, 他的实验表明在大扭转下所有材料均有伸长趋势。他还测量了试件半径的改变, 指出伸长伴有对应的轴向面积的减小。

Rivlin 和 Saunderson<sup>[2]</sup>(1951)用橡皮短圆柱作扭转试验。指出如果施加轴向力以保持圆柱端面水平, 并保持圆柱高度不变, 则轴向力与扭转角平方成正比。

Foux<sup>[3]</sup>(1964)重新研究了扭转下金属弦的长度改变。他指出相对伸长与剪切应变的平方成正比。

德冈辰雄<sup>[4]</sup>(1977)假定扭转变形后圆柱端面为平面, 讨论了不可压缩各向同性弹性材料的扭转伸长渐近表达式。按照他的结论, 对于线性弹性材料, 扭转伸长为  $R^2\varphi^2/12$ , 其中  $R$  为圆柱半径,  $\varphi$  为单位高度的扭转角。这与实验结果相差甚远。

本文将非线性理论分析杆的扭转。为准确地解决这个问题, 采用精确的非线性几何理论来描述物质的大应变大转动成为必须。在此之前, 大多数 Poynting 效应的讨论都是基于极分解定理。本文采用 S-R 分解定理, 这将克服极分解定理的一些缺陷。

## 二、拖带坐标系与S-R分解

为描述物体的运动必须建立坐标参考系。分析大变形问题, 引入拖带坐标系将是方便

的。在三维欧氏空间 $R^3$ 中, 建立两组参考坐标系

- (1) 欧氏空间中的固定参考系 $\{X^i\}$ ;
- (2) 嵌于变形体内的拖带坐标系 $\{x^i\}$ 。

在初始时刻 $t=t_0$ , 拖带坐标系 $\{x^i\}$ 与固定坐标系同胚

$$x^i = \overset{\circ}{X}^i(x^i, t_0) \equiv \overset{\circ}{x}^i \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

令 $r_0$ 代表初始位形上一个典型点的位置矢量,  $r$ 代表实时位形上该点的位置矢量, 则

$$r = r_0 + u \quad (2.2)$$

其中 $u$ 为位移矢量。

在初始位形和实时位形上拖带坐标系的协变基矢量分别为

$$\overset{\circ}{g}_i = \frac{\partial r_0}{\partial x^i}, \quad g_i = \frac{\partial r}{\partial x^i} \quad (2.3)$$

从初始位形到实时位形的变换为

$$g_i = F^j_i \overset{\circ}{g}_j \quad (2.4)$$

其中 $F^j_i = \delta^j_i + u^j_{|i}$ , 称为变形梯度,  $u^j_{|i}$ 指位移矢量在初始位形分量 $u^j$ 对拖带坐标 $x^i$ 的协变分量。

S-R分解定理:

对于连续物体的一切物理许可变形场, 任一变形梯度 $F^j_i$ 可被分解为对称张量 $S^j_i$ 与正交张量 $R^j_i$ 的直和:

$$F^j_i = S^j_i + R^j_i \quad (2.5)$$

其中 $S^j_i$ 为应变张量

$$\left. \begin{aligned} S^j_i &= \frac{1}{2} [u^j_{|i} + (u^j_{|i})^T] - L^j_i L^k_i (1 - \cos\theta) \\ S &= \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] - L^k (1 - \cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$R^j_i$ 为转动张量

$$\left. \begin{aligned} R^j_i &= \delta^j_i + L^j_i \sin\theta + (1 - \cos\theta) L^j_i L^k_i \\ R &= I + L \sin\theta + L^2 (1 - \cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$L^j_i$ 为转动轴方位张量

$$\left. \begin{aligned} L^j_i &= \frac{1}{\sin\theta} \omega^j_i, \quad \omega^j_i = \frac{1}{2} [u^j_{|i} - (u^j_{|i})^T] \\ L &= \omega / \sin\theta, \quad \omega = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$\theta$ 为平均整旋角

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \pm \arcsin[-\omega^j_i \omega^i_j] \\ &= \pm \arcsin \left\{ \frac{1}{2} [(u^1_{|2} - u^2_{|1})^2 + (u^1_{|3} - u^3_{|1})^2 + (u^2_{|3} - u^3_{|2})^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

以上各量均可化为对应的物理分量形式。例如

$$u^j_{|i} = \sqrt{\frac{g_{(ij)}}{g_{(ii)}}} u^j_{|i} \quad (2.10)$$

其中 $(ii)$ ,  $(jj)$ 表示不求和。

### 三、圆杆扭转的变形场

我们考虑正圆柱弹性杆。令 $(r, \varphi, z)$ 表示一点的圆柱拖带坐标。变形后 $(r, \varphi, z)$ 变为 $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{z})$ 。设其变形为

$$\bar{x}^1 \equiv \bar{r} = (1 - \xi)r \tag{3.1a}$$

$$\bar{x}^2 \equiv \bar{\varphi} = \varphi + \kappa z \tag{3.1b}$$

$$\bar{x}^3 \equiv \bar{z} = (1 + \varepsilon + \alpha r^2)z \tag{3.1c}$$

$$0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq l, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

其中  $\xi, \kappa$  分别表示半径的收缩率和单位长度的相对转角,  $\varepsilon + \alpha r^2$  表示单位长度的伸长。如图1所示。

在初始位形中, 线元长度 $d\bar{s}$ 为

$$(d\bar{s})^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2 \tag{3.2}$$

其度规张量为

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3a}$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3b}$$

在变形后位形, 线元长度 $ds$ 为

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (d\bar{r})^2 + \bar{r}^2(d\bar{\varphi})^2 + (d\bar{z})^2 \\ &= [(1 - \xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2] dr^2 + (1 - \xi)^2 r^2 d\varphi^2 \\ &\quad + [(1 - \xi)^2 r^2 \kappa^2 + (1 + \varepsilon + \alpha r^2)^2] dz^2 \\ &\quad + 2\kappa(1 - \xi)^2 r^2 d\varphi dz + 4\alpha r z(1 + \varepsilon + \alpha r^2) dz dr \end{aligned} \tag{3.4}$$

其度规张量为

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (1 - \xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2 & 0 & 2\alpha r z(1 + \varepsilon + \alpha r^2) \\ 0 & (1 - \xi)^2 r^2 & \kappa(1 - \xi)^2 r^2 \\ 2\alpha r z(1 + \varepsilon + \alpha r^2) & \kappa(1 - \xi)^2 r^2 & (1 - \xi)^2 r^2 \kappa^2 + (1 + \varepsilon + \alpha r^2)^2 \end{bmatrix} \tag{3.5a}$$

$$[g^{ij}] = \frac{1}{\|g_{ij}\|} \begin{bmatrix} g_{33}g_{22} - (g_{23})^2 & g_{13}g_{23} & -g_{22}g_{13} \\ g_{13}g_{23} & g_{11}g_{33} + (g_{13})^2 & -g_{23}g_{11} \\ -g_{22}g_{13} & -g_{23}g_{11} & g_{11}g_{22} \end{bmatrix} \tag{3.5b}$$

其中  $\|g_{ij}\| = g_{22}g_{33}g_{11} - g_{22}(g_{13})^2 - g_{11}(g_{23})^2$

在初始拖带坐标系中, 杆中一点的位移分量可表示为

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{g}_1 + u^2 \mathbf{g}_2 + u^3 \mathbf{g}_3 \equiv u^r \mathbf{g}_r + u^\varphi \mathbf{g}_\varphi + u^z \mathbf{g}_z$$

其中

$$u^r \equiv u^1 = r[(1 - \xi)\cos\kappa z - 1] \tag{3.6a}$$

$$u^\varphi \equiv u^2 = (1 - \xi)\sin\kappa z \tag{3.6b}$$

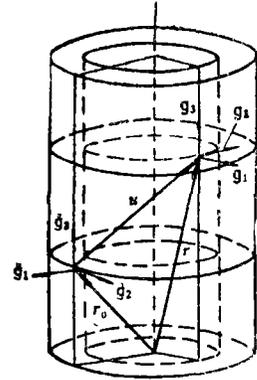


图1 杆的变形

$$u^z \equiv u^3 = (\varepsilon + \alpha r^2)z \quad (3.6c)$$

考虑到初始系中的Christoffel符号

$$\hat{\Gamma}_{12}^1 = \hat{\Gamma}_{21}^1 = \frac{1}{r}, \quad \hat{\Gamma}_{1z}^1 = -r, \quad \text{其它 } \hat{\Gamma}_{ij}^k = 0 \quad (3.7)$$

和

$$u^i|_j = u^i_{,j} + u^k \hat{\Gamma}_{jk}^i \quad (3.8)$$

于是我们得到 $u^i$ 关于 $x^j$ 的协变导数

$$[u^i|_j] = \begin{bmatrix} (1-\xi)\cos\kappa z - 1 & -r(1-\xi)\sin\kappa z & -\kappa r(1-\xi)\sin\kappa z \\ \frac{1}{r}(1-\xi)\sin\kappa z & (1-\xi)\cos\kappa z - 1 & (1-\xi)\kappa\cos\kappa z \\ 2\alpha r z & 0 & \varepsilon + \alpha r^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

其物理分量

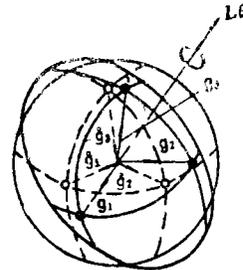
$$[a^i|_j] = \left[ \sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g_{(ii)}}} u^i|_j \right] = \begin{bmatrix} (1-\xi)\cos\kappa z - 1 & -\sin\kappa z & -\frac{1}{H}\kappa r(1-\xi)\sin\kappa z \\ \sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2} & \cos\kappa z - 1 - \frac{1}{\xi} & \frac{1}{H}\kappa r(1-\xi)\cos\kappa z \\ 2\alpha r z & 0 & \frac{\varepsilon + \alpha r^2}{H} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中

$$H^2 = (1-\xi)^2 r^2 \kappa^2 + (1 + \varepsilon + \alpha r^2)^2 \quad (3.11)$$

由(2.9)、(2.8), 可得平均整旋角

$$\begin{aligned} \sin\theta = \frac{1}{2} & \left[ \left( \sin\kappa z + \frac{(1-\xi)\sin\kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} \right)^2 \right. \\ & + \left( \frac{\kappa r(1-\xi)\sin\kappa z}{H} + \frac{2\alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} \right)^2 \\ & \left. + \left( \frac{\kappa r(1-\xi)\cos\kappa z}{H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.12) \end{aligned}$$



及转轴方位张量分量

$$\hat{L}_3^1 = -\hat{L}_1^3 = \frac{1}{2\sin\theta} \frac{(1-\xi)\kappa r \cos\kappa z}{H} \quad (3.13a)$$

$$\hat{L}_1^1 = -\hat{L}_3^3 = \frac{1}{2\sin\theta} \left[ \frac{(1-\xi)\kappa r \sin\kappa z}{H} + \frac{2\alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} \right] \quad (3.13b)$$

$$\hat{L}_2^2 = -\hat{L}_2^2 = \frac{1}{2\sin\theta} \left[ -\frac{(1-\xi)\sin\kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} - \sin\kappa z \right] \quad (3.13c)$$

将(3.10)、(3.12)和(3.13)代入(2.6), 我们可以得到应变张量的各个分量

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^1 \equiv \hat{S}_1^1 = & \frac{(1-\xi)\cos\kappa z - 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} + \frac{1 - \cos\theta}{4\sin^2\theta} \left[ \frac{(1-\xi)\kappa r \sin\kappa z}{H} \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} \right]^2 + \frac{1 - \cos\theta}{4\sin^2\theta} \left[ \frac{(1-\xi)\sin\kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4\alpha^2 r^2 z^2}} + \sin\kappa z \right]^2 \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^z \equiv \hat{S}_z^z = \cos \kappa z - \frac{1}{1-\xi} + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \left[ \frac{(1-\xi) \sin \kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} + \sin \kappa z \right]^2 \\ + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \frac{(1-\xi)^2 \kappa^2 r^2 \cos^2 \kappa z}{H^2} \end{aligned} \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^r \equiv \hat{S}_z^r = \frac{\varepsilon + \alpha r^2}{H} + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \frac{(1-\xi)^2 \kappa^2 r^2 \cos^2 \kappa z}{H^2} \\ + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \left[ \frac{(1-\xi) \sin \kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} + \sin \kappa z \right]^2 \end{aligned} \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^{\theta} \equiv \hat{S}_z^{\theta} = \frac{(1-\xi) \kappa r \cos \kappa z}{2H} + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \left[ \frac{(1-\xi) \kappa r \sin \kappa z}{H} \right. \\ \left. + \frac{2 \alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} \right] \left[ \frac{(1-\xi) \sin \kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} + \sin \kappa z \right] \end{aligned} \quad (3.14d)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^{\tau} \equiv \hat{S}_z^{\tau} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\kappa r (1-\xi) \sin \kappa z}{H} + \frac{2 \alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} \right. \\ \left. + \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \frac{(1-\xi) \kappa r \cos \kappa z}{H} \left[ \frac{(1-\xi) \sin \kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} + \sin \kappa z \right] \right] \end{aligned} \quad (3.14e)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^{\nu} \equiv \hat{S}_z^{\nu} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\xi) \sin \kappa z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} - \sin \kappa z \right] \\ - \frac{1-\cos \theta}{4 \sin^2 \theta} \frac{(1-\xi) \kappa r \cos \kappa z}{H} \left[ \frac{(1-\xi) \kappa r \sin \kappa z}{H} + \frac{2 \alpha r z}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.14f)$$

及

$$\hat{S}_z^{\xi} = \frac{(1-\xi) \cos \kappa z - 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + 4 \alpha^2 r^2 z^2}} + \cos \kappa z - \frac{1}{1-\xi} + \frac{\varepsilon + \alpha r^2}{H} + 2(1-\cos \theta) \quad (3.15)$$

当扭转角微小时, 略去二阶小量, 可得到下列结果

$$\hat{S}_z^z = \frac{1}{2} \kappa r$$

$$\hat{S}_z^r = \hat{S}_z^{\theta} = \hat{S}_z^{\tau} = \hat{S}_z^{\nu} = \hat{S}_z^{\xi} = 0$$

这是经典微小扭转理论的结果。

#### 四、伸长的渐近表达式

在变形后位形法向为  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{g}^i$  面元上作用的应力矢量为

$$\mathbf{t}_x = \sigma_j^i \mathbf{g}^j n_i \quad (4.1)$$

其中  $\sigma_j^i$  为应力张量,  $\mathbf{g}^j$  为实时拖带坐标系逆变基矢。

令  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}^a$ ,  $\hat{\mathbf{e}}^a$  为初始拖带坐标系的单位基矢, 则作用于该面元的应力矢量在初始拖带坐标系  $\{\hat{\mathbf{e}}^a\}$  中的分量为

$$\mathbf{t}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}^a = \sigma_j^i n_i \mathbf{g}^j \cdot \hat{\mathbf{e}}^a \quad (4.2)$$

将  $n_i = \hat{\mathbf{e}}^b \cdot \mathbf{g}_i$  代入上式, 并注意到  $\mathbf{g}_i = F_i^j \hat{\mathbf{g}}_j$ , 于是

$$\mathbf{t}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}^a = \sigma_j^i (\hat{\mathbf{e}}^b \cdot \hat{\mathbf{g}}_m F_m^i) (\mathbf{g}^j \cdot F_i^a \hat{\mathbf{g}}_a \cdot \hat{\mathbf{e}}^a)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{g^{jj}}{\sqrt{g_{(mm)}g_{(ss)}}} F_i^m F_i^s \delta_m^i \delta_s^i \sigma_i^j \\
 &= \frac{g^{jj}}{\sqrt{g_{(kk)}g_{(pp)}}} F_i^k F_i^p \sigma_i^j
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

上式亦可表示为物理分量形式

$$t_k \cdot \delta^p = \sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}} \frac{g^{jj}}{\sqrt{g_{(kk)}g_{(pp)}}} F_i^k F_i^p \delta_i^j \quad (4.4)$$

这里将讨论扭转的伸长二阶效应, 假设 $(\kappa R)^4$ 以下的小量和 $(\kappa R)^2$ 与 $\kappa R$ 相比可略去, 并假设杆长 $l$ 不是很大,  $(\kappa l)^4$ 以下小量均可略去。由于 $\xi$ ,  $e$ ,  $\alpha$ 均为小量, 以下我们也将忽略与 $\alpha^2 R^4$ ,  $\xi^2$ ,  $e^2$ 同阶的小量。

我们考虑Hooke材料的物性方程

$$\delta_i^j = \frac{E}{1+\nu} \delta_i^j + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_i^i \delta_i^j \quad (4.5)$$

其中  $E$ 为弹性模量,  $\nu$ 为Poisson比。

由于在杆侧面无径向应力, 由(4.4), 有

$$[t_r \cdot \delta^r]_{r=R} = \left[ \sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}} \frac{g^{jj}}{g_{(kk)}} F_i^k F_i^p \delta_i^j \right]_{r=R} = 0 \quad (4.6)$$

忽略高阶小量后, 圆杆的径向边界条件为

$$[\delta_i^i]_{r=R} = \left[ \frac{E}{1+\nu} \delta_i^i + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_i^i \right]_{r=R} = 0 \quad (4.7)$$

将(3.14)和(3.15)代入上式, 有

$$\begin{aligned}
 &(1+\nu)(1-2\nu) \left( \cos \kappa z - \frac{1}{1-\xi} \right) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e + \alpha R^2) \\
 &+ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1 - \cos \theta) - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1 - \cos^2 \theta}{4 \sin \theta} (1-\xi)^3 \kappa^2 R^2 \cos^2 \kappa z = 0
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

考虑到

$$(1-\xi)^2 \approx 3 - 2 \frac{1}{1-\xi} \quad (4.9)$$

$\xi$ 可近似地表示为

$$\frac{1}{1-\xi} = \cos \kappa z + \nu(e + \alpha R^2) + \frac{1}{4} \nu \kappa^2 R^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \kappa z \quad (4.10)$$

由于杆的端面无轴向力作用, 由(4.4), 有

$$[t_s \cdot \delta^s]_{s=l} = \left[ \sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}} \frac{g^{jj}}{g_{(kk)}} F_i^k F_i^p \delta_i^j \right]_{s=l} = 0 \quad (4.11)$$

忽略 $\delta_i^j$ 的高阶小量后, 我们得到圆杆的轴向边界条件

$$[\delta_i^i - \kappa r (1-\xi) \delta_i^i]_{s=l} = 0 \quad (4.12)$$

将(4.5)、(3.14)、(3.15)代入上式, 得

$$e + \alpha r^2 = \frac{1}{8(1-2\nu)(1+\nu)} [(3-8\nu)\kappa^2 r^2 + 2\nu(1+2\nu)\kappa^2 R^2] \quad (4.13)$$

即

$$\left[ \alpha - \frac{(3-8\nu)\kappa^2}{8(1-2\nu)(1+\nu)} \right] r^2 + \left[ e - \frac{\nu(1+2\nu)\kappa^2 R^2}{4(1-2\nu)(1+\nu)} \right] = 0$$

由于杆末端面的正应力恒为零, 应有

$$\alpha = \frac{(3-8\nu)\kappa^2}{8(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.14a)$$

$$\varepsilon = \frac{\nu(1+2\nu)}{4(1-2\nu)(1+\nu)} \kappa^2 R^2 \quad (4.14b)$$

圆杆的伸长为

$$\begin{aligned} e &= \bar{z} - z = (e + \alpha r^2)z \\ &= \left[ \frac{\nu(1+2\nu)}{4(1-2\nu)(1+\nu)} R^2 + \frac{3-8\nu}{8(1-2\nu)(1+\nu)} r^2 \right] \kappa^2 z \end{aligned} \quad (4.15)$$

端面伸长在  $z=l$ ,

$$e|_{z=l} = \left[ \frac{\nu(1+2\nu)}{4(1-2\nu)(1+\nu)} R^2 + \frac{3-8\nu}{8(1-2\nu)(1+\nu)} r^2 \right] \kappa^2 l \quad (4.16)$$

在中心点  $r=0$ ,

$$e|_{z=l, r=0} = \frac{\nu(1+2\nu)}{4(1-2\nu)(1+\nu)} R^2 \kappa^2 l \quad (4.17)$$

在外表面  $r=R$ ,

$$e|_{z=l, r=R} = \frac{3-6\nu+4\nu^2}{8(1+\nu)(1-2\nu)} \kappa^2 R^2 l \quad (4.18)$$

如令  $\kappa = \varphi/l$ , 则得到Poynting的实验公式.

以上结果说明当扭转大变形时, 端面形成曲面, 微小变形时横截面保持平面的 Navier 假设不再适用.

作用于圆杆端面上的总力矩为

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r [\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{S}^p]_{z=l} r dr d\varphi \quad (4.19)$$

将(4.4)代入上式, 并略去高阶小量, 得

$$M = \frac{\pi E}{4(1+\nu)} R^4 \kappa \quad (4.20)$$

如果我们限制杆体端面的轴向位移为零, 则扭转后端面上的约束力为

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} \int_0^R [\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{S}^z]_{z=l} r d\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{16} \frac{E(3-4\nu+8\nu^2)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \kappa^2 R^4 \end{aligned} \quad (4.21)$$

即轴向力与扭转角平方成正比. 这与 Rivlin 和 Satnder<sup>[3]</sup>(1951)用橡皮短圆柱作试验所得结果类似.

## 五、结 论

本文基于拖带坐标系和S-R分解定理讨论了各向同性Hooke弹性杆的二阶效应. 一般认为物性方程的非线性或各向异性是产生二阶效应的主要原因, 我们的结论不支持这种说法. 虽然在我们的讨论中假设  $l$  不很大, 但我们仍可将我们的结论与 Poynting 经验公式作一比较. 对于钢丝, Poynting<sup>[3]</sup>扭转伸长的经验公式为

$$e = \frac{1}{2} \frac{R^2 \phi^2}{l} \quad (5.1)$$

本文所得扭转伸长公式(4.18)为

$$e = \frac{3-6\nu+4\nu^2}{8(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{R^2\varphi^2}{l} \quad (5.2)$$

钢材的实际试验指出,  $\nu$  通常位于 0.25 至 0.35 范围内。取  $\nu=0.25$ , 上式可表示为

$$e = 0.35 \frac{R^2\varphi^2}{l} \quad (5.3)$$

相当于 Poynting 伸长的 70%。

取  $\nu=0.35$ , (5.2) 可表示为

$$e = 0.43 \frac{R^2\varphi^2}{l} \quad (5.4)$$

相当于 Poynting 伸长的 86%。

对于不可压缩线性弹性材料, 德冈辰雄<sup>[6]</sup>所得扭转伸长公式为

$$e = \frac{1}{12} \frac{R^2\varphi^2}{l} \quad (5.5)$$

只相当于 Poynting 伸长的 17% 左右。这与试验相差甚远。

众所周知, 在圆杆小扭转的经典弹性理论中, 通常采用 Navier 假设, 即轴向横截面保持平面, 轴向长度保持不变。然而, 大量试验表明, 大扭转时这些假设是不成立的。本文用非线性弹性理论证明了上述结论。

### 参 考 文 献

- [1] 陈至达, 《有理力学》, 中国矿业大学出版社, 徐州 (1986).
- [2] Truesdell, C., *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag Press (1966).
- [3] Bell, J. F., *The experimental foundations of solid mechanics*, *Hanbuch der physik*, 4, 721—744.
- [4] Swift, H. W., *Engineering*, 163 (1947), 253—257.
- [5] Foux, A., *Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*, ed. by M. Reiner and D. Abir, Pergamon Press (1964), 228—251.
- [6] 德冈辰雄著, 《理性连续介质力学入门》, 赵镇等译, 科学出版社 (1982), 238—244.
- [7] Billington, E. W., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 9 (1976), 533—552.
- [8] Billington, E. W., *Int. J. Solids Structures*, 21 (4) (1985), 355—372.
- [9] Ronay, M., *Int. J. Solids Structures*, 4 (1968), 509—516.

## Second-Order Effect of an Elastic Circular Shaft during Torsion

Chen Mian Chen Zhi-da

(Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing)

### Abstract

In this paper we deal with the second-order effect of an elastic circular shaft during torsion. The analysis is based on the method of co-moving coordinates and the strain-rotation decomposition theorem<sup>[1]</sup> in continuum mechanics. By using asymptotic expansion methods, we confirm that the effect of axial elongation and distortion of plane cross section exists in an elastic circular shaft during large torsion and give the expressions of the axial force and the torque.

**Key words** torsion, second-order effect, large deformation, S-R decomposition theorem