应用数学和力学，第12卷第10期（1991年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

两类两种群动力学方程的稳定性分析*

王　辅　俊

（华东师范大学数学系，1990年6月20日收到）

摘　要

本文研究两种群动力学方程平衡点的稳定性．讨论两个捕食者-食饵-领地模型，模型用1微分方程描述，模型2用积分微分方程描述．得出平衡点稳定的条件．所得结果指出可实现总体的种群稳定而不管局部的绝灭．

关键词　捕食者　食饵　领地　种群数　稳定性

一、引　　言

近年来，生物数学已成为应用数学的一个重要分支，其中种群动力学引起了生物界和应用数学界的极大关注．最早的一个两种群模型是Volterra的捕食者-食饵模型．

$$dx/dt=ax-bxy,\ dy/dt=-cy+dxy$$

x为食饵总数；y为捕食者总数；a为食饵内禀增长率；c为捕食者死亡率；b,d为捕食系数．

在许多文献中以上模型被加以推广（见[4]）两种群模型的一般形式是：

$$dx/dt=x(b_1+a_{11}x+a_{12}y),\ dy/dt=y(b_2+a_{21}x+a_{22}y)$$

若　$a_{12}a_{21}<0$，是捕食模型

若　$a_{12}<0$，$a_{21}<0$ 是竞争模型

若　$a_{12}>0$，$a_{21}>0$ 是互惠共生模型

J．Goh讨论了这个模型的全局稳定性（见[5]），但在这些模型中仅考虑两个种群的总数，本文将研究一种新的模型．假设在一个区域内有许多小块领地，x表示食饵领地数，y表示捕食者领地数，某些食饵从一个领地分散到另一领地，在某些领地中食饵可能绝灭．但更多新的食饵领地在更大的区域中产生，这样就使食饵和捕食者总体上持久存在，这种现象已由一些生物学家提出过(见[1])，下面我们将讨论两个捕食者-食饵-领地模型．

二、模　　型1

$$dx/dt=ax+aey-bxy,\ dy/dt=bxy-dy\qquad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)\tag{2.1}$$

* 戴世强推荐．

x 为食饵领地总数；y 为捕食者领地总数；a 为食饵从任一领地的分散率；b 为反应系数；by为捕食者侵入任一食饵领地的速率；d 为捕食者绝灭率；ae为食饵从任一捕食者领地分散出去产生新的食饵领地的速率；a,b,d,e为正参数．

Odo′ Diekmann曾讨论过(2.1)的局部稳定性（见[1]），我们将讨论其全局稳定性．

(2.1)的平衡点是(0,0)和$(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=d/b,\quad \bar{y}=ad/b(d-ae) \tag{2.2}$$

对应于(2.1)在(0,0)处的线性近似的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & ae \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

两个特征值是$\lambda_1=a$，$\lambda_2=-d$，因此平衡点(0,0)是不稳定的．

若$ea>d$，则$\bar{y}<0$，没有生态学意义，若$ea<d$，则$\bar{y}>0$，$(\bar{x},\bar{y})$对应于生态平衡．对应于(2.1)在$(\bar{x},\bar{y})$处的线性近似的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} -ea^2/(d-ea) & ea-d \\ ad/(d-ea) & 0 \end{pmatrix}$$

两个特征值是

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-ea^2}{d-ea}\pm\sqrt{\left(\frac{ea}{d-ea}\right)^2-4ad}\right)$$

很明显，$\mathrm{Re}\lambda_1<0$，$\mathrm{Re}\lambda_2<0$，因此 $(\bar{x},\bar{y})$渐近稳定．

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{xy}(ax+aey-bxy)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{xy}(bxy-dy)\right]=\frac{-ae}{x^2}<0$$

$$(x,y)\in\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$$

所以在$\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$中没有极限环（见[2]），我们可以画出(2.1)的轨线的方向（见图1）．

对$x(0)=x_0>0$，$y(0)=y_0>0$，(2.1)的轨线仍留在第一象限内．如果轨线不穿过线段$\{x=d/b,\ 0<y<\bar{y}\}$，轨线是有界的．如果轨线穿过线段$\{x=d/b,\ 0<y<\bar{y}\}$则它必须穿过曲线段$\{y=ax/(bx-ae),\ x>\bar{x}\}$，交于$(x(T),\ y(T))$（见图2）．

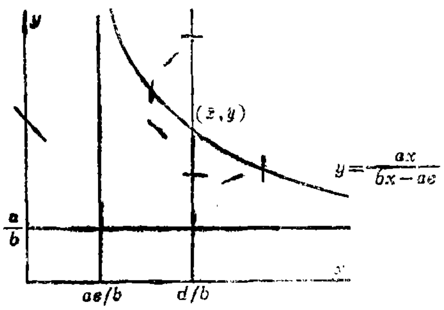

图　1

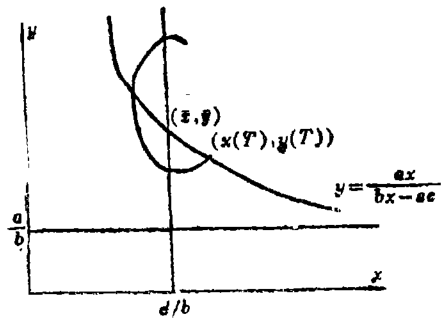

图　2

现考虑$t>T$，有两种情形．如果轨线如图3情形，它是有界的，如果轨线是如图4情形，因$(\bar{x},\bar{y})$是稳定的，根据Bendixon准则可推出存在极限环（见[2]）．但是前面已证明在第一象限内没有极限环，所以轨线只能属于图3情形，所以对任何初始条件 $x(0)=x_0>0,y(0)$

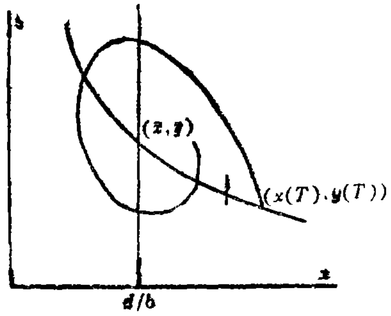

图 3

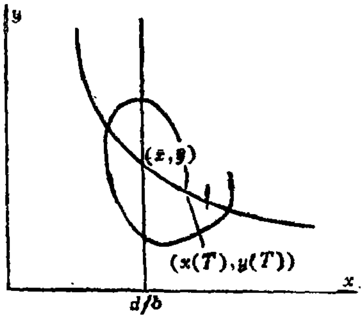

图 4

$=y_0>0$，(2.1)的轨线有界。$(\bar{x},\bar{y})$ 是它的极限点，所以$(\bar{x},\bar{y})$在第一象限 $\{(x,y)|x>0, y>0\}$内全局稳定。

定理1 如果$ea<d$，则(2.1)的平衡点$(\bar{x},\bar{y})$在$\{(x,y)|x>0, y>0\}$中全局稳定。

这说明在一定条件下总体上的种群稳定性可以实现。定理1的生态学意义是如果捕食者的绝灭率d足够大，食饵可以分散到新的领地去使食饵领地数和捕食者领地数都不趋于零，两个种群能够共存，生态平衡可实现。

三、模　型 2

J. Cushing曾讨论过时滞模型

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy, \quad \frac{dy}{dt}=bx\int_{-\infty}^{t}K(t-s)y(s)ds-dy$$

其中x，y是两种群的数目（见[3]）。

现我们将讨论一个不同的模型，在模型中1出现时滞，捕食者领地在t时刻的增长率依赖于捕食者领地过去时刻$s\leqslant t$的数目。

$$\frac{dy}{dt}=bx\int_{-\infty}^{t}K(t-s)y(s)ds-dy$$

其中核$K(s)$表示权。假设$K(s)$在$(0, +\infty)$连续，且

$$\int_0^{\infty}K(s)ds=1$$

例如捕食者领地的年令结构可以影响它的增长率，即捕食者的繁殖力是随年令而不同的。我们用权$K(s)$来表示年令结构的影响程度。所以具有积分形式时滞的捕食者-食饵-领地模型用一个积分微分方程来描述：

$$\frac{dx}{dt}=ax+aey-bxy, \quad \frac{dy}{dt}=bx\int_{-\infty}^{t}K(t-s)y(s)ds-dy \tag{3.1}$$

如果$ea<d$，(3.1)有正的平衡点(2.2)

$$(d/b, \ ad/b(d-ea)) \tag{2.2}$$

令 $u=x-d/b$，$v=y-ad/b(d-ea)$方程(3.1)化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{-ea^2}{d-ea}u-(d-ea)v-buv\\ \frac{dv}{dt}&=b\left(u+\frac{d}{b}\right)\int_{-\infty}^{t}K(t-s)v(s)ds+\frac{ad}{d-ea}u-dv\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

(3.2)在$(u,v)=(0,0)$处的线性近似式是

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{-ea^2}{d-ea}u-(d-ea)v\\ \dfrac{dv}{dt}=d\displaystyle\int_{-\infty}^{t}K(t-s)v(s)ds+\dfrac{ad}{d-ea}u-dv\end{cases}$$

特征值λ满足如下方程（见[3]）

$$(\lambda+ea^2/(d-ea))(\lambda+d)+ad-dz(\lambda)(\lambda+ea^2/(d-ea))=0$$

其中 $$z(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}K(s)ds$$

倘若 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$，则

$$|(\lambda+ea^2/(d-ea))(\lambda+d)+ad|>dea^2/(d-ea)$$

$$\left|dz(\lambda)\left(\lambda+\frac{ea^2}{d-ea}\right)\right|\leqslant\left|d\left(\lambda+\frac{ea^2}{d-ea}\right)\right|<\frac{dea^2}{d-ea}$$

$$\therefore\quad \left|dz(\lambda)\left(\lambda+\frac{ea^2}{d-ea}\right)\right|<\left|\left(\lambda+\frac{ea^2}{d-ea}\right)(\lambda+d)+ad\right|$$

于是产生矛盾。

因此$\mathrm{Re}\lambda<0$，平衡点(2.2)渐近稳定，这样我们得到

定理2 如果$ea<d$，时滞核$K(s)$在$(0,\infty)$上连续且$\int_0^{\infty}K(s)ds=1$，则(3.1)的平衡点(2.2)渐近稳定。

例 取(3.1)中 $K(s)=e^{-s}$，$\int_0^{\infty}K(s)ds=1$

这是一个弱核，当$s=t$，权$K(t-s)=1$，当$s\to-\infty$，权$K(t-s)\to 0$。所以平衡点(2.2)渐近稳定。

我们可以用相同方法得到如下定理

定理3 如果$Lae<d$，则(3.1)的平衡点 $(d/bL,\ ad/b(d-Lae))$ 渐近稳定，其中

$$\int_0^{\infty}K(s)ds=L>0$$

从定理2和定理3我们可得到如下结论：可以实现总体的种群稳定而与时滞的出现无关。

作者衷心感谢戴世强教授在本文准备中提出的宝贵意见。

参 考 文 献

[1] Diekmann, Odo', *The Dynamics of Pysiologically Structured Populations*, Springer-Verlag, New York (1986).

[2] 叶彦谦，《极限环论》，科技出版社，上海（1984）.

[3] Cushing, J., *Integral Differential Equation and Delay Models in Population Dynamics*, Springer-Verlag (1977).

[4] May, R., *Theoretical Ecology*, Blackwell Scientific Publication, Oxford (1981).

[5] Goh, J., The global stability of two species models, *J. of Mathematical Biology*, (2) (1976).

Stability Analysis for Two Kinds of Equations in Two-Species Population Dynamics

Wang Fu-jun
(*East China Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper we study the stability for equilibrium points of equations in two-population dynamics. We discuss two predator-prey-patch models. Model 1 is described by an differential equation. Model 2 is described by an integral differential equation. we obtain the conditions for the stability of their equilibrium points. The results show that the overall population stability despite local extinction is realizable.

Key words predator, prey, patch, population, stability