 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于初值问题解的稳定性*

邵 孝 湟

（杭州师范学院，1990年6月22日收到）

摘 要

本文利用解对初值和参数的可微性，提出一种不同于Liapunov直接法的方法，用它可以判定初值问题非驻定解的稳定性，而该非驻定解无需事先求出。

关键词 稳定性 初值问题 可微性

在天体力学、无线电技术和自动控制等领域中，常见一些变系数的常微分方程，如Riccati方程，Hill方程和Liouville方程。这些方程的结构是简单的，一般而言，它们的非驻定解析解是求不到的，通常用近似解和数值解代替解析解。当然，我们希望该解析解是稳定的，否则，所求近似解和数值解无用。就判断驻定解的稳定性而言，Liapunov直接法是个好方法。有关Liapunov直接法的专著是很多的[1,2,4]。但是，当非驻定解未知时，我们不能用Liapunov直接法去判断该非驻定解的稳定性[3]。

如所周知，稳定性的研究方向，在于不具体求出解的情况下，提供判断该解稳定与否的方法。本文利用解对初值和参数的可微性，提出一种不同于Liapunov直接法的方法，该方法在不求出解的情况下，能判断该解的稳定性。

一、理论与方法

考虑初值问题

$$dy/dt=f(t,y) \tag{1.1}$$

$$y(t_0)=y_0 \tag{1.2}$$

其中$f\in C[a,\infty)\times(-\infty,\infty)$，且对$y$适合Lipschitz条件。易知，初值问题(1.1)+(1.2)的解存在唯一。记初值(1.1)+(1.2)的解为$\varphi(t,t_0,y_0)$。我们研究Liapunov意义下的稳定性。因此，假定解$\varphi(t,t_0,y_0)$的存在区间无限，即

$$y=\varphi(t,t_0,y_0)\qquad t\in[t_0,\infty)\quad (t_0\in[a,\infty)) \tag{1.3}$$

记方程(1.1)适合条件$y(t_0)=y_0+\varDelta$的解为

$$\varphi_\varDelta=\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta) \tag{1.4}$$

利用中值定理及解对初值的可微性，由(1.3)和(1.4)得到

* 周焕文推荐。

$$\varphi_\Delta-\varphi=\Delta\frac{\partial}{\partial y_0}\varphi(t,t_0,\zeta) \tag{1.5}$$

其中ζ介于y_0和$y_0+\Delta$之间．由解对初值的可微性定理得到

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\varphi(t,t_0,\zeta)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial y}f[\tau,\varphi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau\right\} \tag{1.6}$$

将(1.6)代入(1.5)右边，得到

$$\varphi_\Delta-\varphi=\Delta\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial y}f[\tau,\varphi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau\right\} \tag{1.7}$$

从(1.7)可得到

定理1 若

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f[\tau,\varphi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau<+\infty \tag{1.8}$$

则未被扰动的解(1.3)稳定；若

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f[\tau,\varphi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau=+\infty \tag{1.9}$$

则未被扰动的解(1.3)不稳定；若

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f[\tau,\varphi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau=-\infty \tag{1.10}$$

则未被扰动的解(1.3)渐近稳定．

二、Riccati 方 程

考虑Riccati方程

$$dy/dt=P_2(t)y^2+P_1(t)y+P_0(t) \tag{2.1}$$

易知，当$P_i(t)\in C(R)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$时，方程(2.1)右边

$$f(t,y)=P_2(t)y^2+P_1(t)y+P_0(t) \tag{2.2}$$

在R^2上连续，而且

$$\partial f/\partial y=2P_2(t)y+P_1(t) \tag{2.3}$$

也是R^2上的连续函数．因而适合条件

$$y(t_0)=y_0 \tag{2.4}$$

方程(2.1)的解

$$y=\varphi(t,t_0,y_0) \tag{2.5}$$

存在且唯一．在此，我们假定解(2.5)的存在区间无限．Liouville曾证明，在一般情形下，Riccati方程的解不能用积分方法求得[5]，即函数(2.5)的解析形式是未知的．由定理1可得

定理2 若方程(2.1)右边的函数(在$[t_0,\ \infty)$上)适合

1) $P_i(t)>0$ $(i=1,\ 2)$ 在$\{P_i(t);\ i=1,\ 2\}$中，至少有一个$P_i(t)\geqslant K>0$

2) $P_0(t)>0$

3) $P_i(t)\in C(R)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$

则方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0>0$的解不稳定．

证明 由于$y(t_0)=y_0>0$，又$P_i(t)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$在$[t_0,\ \infty)$上连续非负，故可推知解$\varphi(t,t_0,y_0)$在$[t_0,\ \infty)$上单调递增，于是

$$\varphi(t,t_0,y_0)\geqslant y_0>0 \qquad t\in[t_0,\infty) \tag{2.6}$$

对任意的$y_0>0$，必存在一$\delta>0$，使得$y_0-\delta>0$. 显然，(2.1)右边函数满足Lipschitz条件，故可取函数$\varphi(t,t_0,y_0-\delta)$为方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0-\delta$的解. 由上所述，可知

$$\varphi(t,t_0,y_0-\delta)\geqslant y_0-\delta>0 \qquad t\in[t_0,\infty) \tag{2.7}$$

类似地，方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0+\delta$的解为

$$\varphi(t,t_0,y_0+\delta)\geqslant y_0+\delta>0 \qquad t\in[t_0,\infty) \tag{2.8}$$

既然δ可以任意小，由(2.7)和(2.8)可看出

$$\varphi(t,t_0,y)>0 \qquad t\in[t_0,\infty),\ y\in[y_0-\delta,y_0+\delta] \tag{2.9}$$

取一小数$\varDelta$使得$|\varDelta|<\delta$，记方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0+\varDelta$的解为$\varphi_\varDelta$，即

$$\varphi_\varDelta=\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta) \tag{2.10}$$

于是从(1.7)、(2.5)和(2.10)可得

$$\varphi_\varDelta-\varphi=\varDelta\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[2P_2(\tau)\varphi(\tau,t_0,\zeta)+P_1(\tau)]d\tau\right\} \tag{2.11}$$

其中ζ介于y_0和$y_0+\varDelta$之间. 既然$|\varDelta|<\delta$，可看出$\zeta\in[y_0-\delta,\ y_0+\delta]$，而且(2.11)积分号内的函数$\varphi(t,t_0,\zeta)$大于零，即$\varphi(t,t_0,\zeta)>0$. 由于$P_1(t)$和$P_2(t)$在$[t_0,\infty)$上非负，而且大于等于$K>0$（至少有一个），因此我们有

$$\int_{t_0}^{+\infty}[2P_2(\tau)\varphi(\tau,t_0,\zeta)+P_1(\tau)]d\tau=+\infty \tag{2.12}$$

从(2.11)和(2.12)可知

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi_\varDelta-\varphi|=+\infty$$

定理3 若方程(2.1)右边的函数（在$[t_0,\infty)$上）适合

1) $P_i(t)\leqslant 0$ $(i=1,\ 2)$

2) $P_0(t)>0$

3) $P_i(t)\in C(R)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$

则方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0>0$的解稳定.

证明 既然$\varphi(t,t_0,y_0)=y_0>0$，由解对初值的连续性，可推知存在这样的ζ使得

$$\varphi(t,t_0,y_0)>0 \qquad t\in[t_0,\zeta) \tag{2.13}$$

现在证明$\zeta=+\infty$. 事实上，若使(2.13)成立之ζ的上确界有界，假定该上确界就是ζ，于是

$$\varphi(\zeta,t_0,y_0)=0 \tag{2.14}$$

由(2.13)和(2.14)看出

$$\varphi_t'(\zeta-0,t_0,y_0)<0 \tag{2.15}$$

另一方面，由(2.1)和(2.4)可得

$$\varphi_t'(\zeta,t_0,y_0)=P_0(\zeta)>0 \tag{2.16}$$

显然，(2.16)和(2.15)矛盾. 由此可知

$$\varphi(t,t_0,y_0)>0 \qquad t\in[t_0,\infty) \tag{2.17}$$

类似于定理2，对任意的$y_0>0$，存在一个$\delta>0$，使得$y_0-\delta>0$，$y_0+\delta>0$. 记$\varphi(t,t_0,y_0-\delta)$和$\varphi(t,t_0,y_0+\delta)$分别表示方程(2.1)适合条件$y(t_0)=y_0-\delta$和$y(t_0)=y_0+\delta$的解. 综上所述，这两个解在$[t_0,\infty)$上大于等于零. 因$\delta$可任意小，于是我们有

$$\varphi(t,t_0,y)>0 \qquad t\in[t_0,\infty),\ y\in[y_0-\delta,y_0+\delta] \tag{2.18}$$

记φ_Δ表示方程(2.1)适合$y(t_0)=y_0+\Delta$的解，类似地，我们也有(2.11)式。取$|\Delta|<\delta$，由(2.18)和$P_i(t)(i=1,\ 2)$在$[t_0,\infty)$上的非正性，我们得到

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{+\infty}[2P_2(\tau)\varphi(\tau,t_0,\zeta)+P_1(\tau)]d\tau\right\}<+\infty \tag{2.19}$$

由定理1和(2.19)，推知未受扰动的解(2.5)稳定。

若在定理3的假设条件中，补充

$$\int_{t_0}^{+\infty}P_1(\tau)d\tau=-\infty \tag{2.20}$$

由(2.11)式可得

$$|\varphi_\Delta-\varphi|\leqslant|\Delta|\exp\left\{\int_{t_0}^{t}P_1(\tau)d\tau\right\} \tag{2.21}$$

由(2.20)和(2.21)，还可得到

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi_\Delta-\varphi|=0$$

即解$\varphi(t,t_0,y_0)$渐近稳定。

方程(2.1)中的$y(t)$用$-x(t)$代替，即

$$y(t)=-x(t) \tag{2.22}$$

在变换(2.22)下，方程(2.1)变为

$$dx/dt=-P_2(t)x^2+P_1(t)x-P_0(t) \tag{2.23}$$

于是可得到一系列定理：

定理4 若方程(2.1)右边的函数在$[t_0,\infty)$上适合

1) $P_0(t)<0$
2) 在$\{|P_i(t)|,\ i=1,2\}$中，至少存在一个$|P_i(t)|\geqslant K>0$
3) $P_1(t)\geqslant0$，$P_2(t)\leqslant0$
4) $P_i(t)\in C(R)$ $(i=0,1,2)$

则方程(2.1)适合$y(t_0)=y_0<0$的解不稳定。

定理5 若方程(2.1)右边的函数在$[t_0,\infty)$上适合

1) $P_0(t)>0$
2) $P_1(t)\leqslant0$，$P_2(t)\geqslant0$
3) $P_i(t)\in C(R)$ $(i=0,1,2)$

则方程(2.1)适合$y(t_0)=y_0>0$的解稳定。

三、Liouville 方 程

Liouville方程为一二阶齐次线性方程，形如

$$d^2y/dt^2+[\lambda+g(t)]y=0 \tag{3.1}$$

其中λ为参数，$g(t)$为t的实函数。令方程(3.1)满足初始条件

$$y(t_0)=y_0,\ dy/dt|_{t=t_0}=y_1 \tag{3.2}$$

的解为

$$y=\varphi(t,t_0,y_0,y_1) \tag{3.3}$$

显然，若$g(t)\in C[a,\infty)$，解(3.3)存在唯一．在此，我们假定解(3.3)的存在区间可以扩展到无穷．若条件(3.2)受到扰动，即

$$y(t_0)=y_0+\varDelta_0,\ dy/dt|_{t=t_0}=y_1+\varDelta_1 \tag{3.4}$$

方程(3.1)适合(3.4)的解可记为

$$\varphi_\varDelta=\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta_0,y_1+\varDelta_1) \tag{3.5}$$

类似地，方程(3.1)适合条件

$$y(t_0)=y_0,\ dy/dt|_{t=t_0}=y_1+\varDelta_1 \tag{3.6}$$

的解为

$$y(t)=\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1) \tag{3.7}$$

易知，当$|\varDelta_0|$和$|\varDelta_1|$充分小时，解(3.5)的存在区间无限．

考虑初值问题

$$dy/dt=F(t,y),\qquad y(t_0)=y_0 \tag{3.8}$$

其中

$$F(t,y)=y_1+\varDelta_1-\int_{t_0}^{t}[\lambda+g(\tau)]yd\tau \tag{3.9}$$

让$\psi(t,t_0,y_0)$表示(3.8)的解，于是有

$$\psi(t,t_0,y_0)\equiv\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1) \tag{3.10}$$

若(3.8)中的初始条件用

$$y(t_0)=y_0+\varDelta_0 \tag{3.11}$$

代替，则解$\psi(t,t_0,y_0)$将被$\psi(t,t_0,y_0+\varDelta_0)$代替，因此

$$\psi(t,t_0,y_0+\varDelta_0)\equiv\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta_0,y_1+\varDelta_1) \tag{3.12}$$

利用中值定理和解对初值的可微性，可得

$$\psi(t,t_0,y_0+\varDelta_0)-\psi(t,t_0,y_0)=\varDelta_0\,\partial\psi(t,t_0,\zeta)/\partial y_0 \tag{3.13}$$

其中ζ介于y_0和$y_0+\varDelta_0$之间．利用(3.10)、(3.12)和解对初值的可微性定理，可将(3.13)改写为

$$\begin{aligned}&\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta_0,y_1+\varDelta_1)-\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1)\\&\quad=\varDelta_0\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial y}F[\tau,\psi(\tau,t_0,\zeta)]d\tau\right\}\end{aligned} \tag{3.14}$$

将(3.9)代入(3.14)得到

$$\begin{aligned}&\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta_0,y_1+\varDelta_1)-\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1)\\&\quad=\varDelta_0\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

再考虑初值问题

$$dy/dt=G(t,y,\mu),\quad y(t_0)=y_0 \tag{3.16}$$

其中

$$G(t,y,\mu)=y_1+\mu-\int_{t_0}^{t}[\lambda+g(\tau)]yd\tau \tag{3.17}$$

μ为一参数，可以看出

$$d^2y/dt^2=dG(t,y,\mu)/dt=-[\lambda+g(t)]y \tag{3.18}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{t=t_0\\ \mu=0}}=G(t_0,y,0)=y_1,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{t=t_0\\ \mu=\varDelta_1}}=G(t_0,y,\varDelta_1)=y_1+\varDelta_1 \tag{3.19}$$

记$\psi_\mu(t,t_0,y_0,\mu)$为(3.16)的解．由(3.18)和(3.19)可知

$$\psi_\mu(t,t_0,y_0,0)\equiv\varphi(t,t_0,y_0,y_1) \tag{3.20}$$

$$\psi_\mu(t,t_0,y_0,\varDelta_1)\equiv\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1) \tag{3.21}$$

利用中值定理和解对参数的可微性，得到

$$\psi_\mu(t,t_0,y_0,\varDelta_1)-\psi_\mu(t,t_0,y_0,0)=\varDelta_1\,\partial\psi_\mu(t,t_0,y_0,\eta)/\partial\mu \tag{3.22}$$

其中η介于0和$\varDelta_1$之间．利用解对参数的可微性定理，(3.22)可改写为

$$\begin{aligned}&\psi_\mu(t,t_0,y_0,\varDelta_1)-\psi_\mu(t,t_0,y_0,0)\\&=\varDelta_1\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial y}G[\tau,\psi_\mu(\tau,t_0,y_0,\eta),\mu]d\tau\right\}\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\partial G}{\partial\mu}\cdot\exp\left[-\int_{t_0}^{\tau}\frac{\partial G}{\partial y}ds\right]d\tau\end{aligned} \tag{3.23}$$

由(3.17)、(3.20)和(3.21)，可将(3.23)改写为

$$\begin{aligned}&\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1)-\varphi(t,t_0,y_0,y_1)\\&=\varDelta_1\exp\left\{\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}-[\lambda+g(s)]ds\right\}\cdot\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}d\tau\end{aligned} \tag{3.24}$$

从(3.3)和(3.5)不难看出

$$\begin{aligned}|\varphi_\varDelta-\varphi|\leqslant&|\varphi(t,t_0,y_0+\varDelta_0,y_1+\varDelta_1)-\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1)|\\&+|\varphi(t,t_0,y_0,y_1+\varDelta_1)-\varphi(t,t_0,y_0,y_1)|\end{aligned} \tag{3.25}$$

把(3.15)和(3.24)代入(3.25)，可得到

$$\begin{aligned}|\varphi_\varDelta-\varphi|\leqslant&\frac{\varDelta_0}{\exp\left\{\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}}\\&+\varDelta_1\cdot\frac{\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}d\tau}{\exp\left\{\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}}\end{aligned} \tag{3.26}$$

从(3.26)可得到下列定理

定理6 若

$$\int_{t_0}^{+\infty}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds<+\infty \tag{3.27}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}d\tau\Big/\exp\left\{\int_{t_0}^{+\infty}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}<+\infty \tag{3.28}$$

则未受扰动的解(3.3)稳定．

定理7 若

$$\int_{t_0}^{+\infty}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds=-\infty \tag{3.29}$$

则未受扰动的解(3.3)不稳定．

定理8 若

$$\int_{t_0}^{+\infty}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds=+\infty \tag{3.30}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}d\tau\Big/\exp\left\{\int_{t_0}^{+\infty}d\tau\int_{t_0}^{\tau}[\lambda+g(s)]ds\right\}=0 \tag{3.31}$$

则未受扰动的解(3.3)渐近稳定。

方程(3.1)中的λ和$g(t)$是已知的。一般而言，(3.27)~(3.31)各式是可计算的。因此可估计$|\varphi_\Delta-\varphi|$的上界。上述方法不仅适用于线性方程，对非线性方程同样可行。

参 考 文 献

[1] LaSalle, J. P. and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method, with Applications*, Academic Press, New York (1961).

[2] Rouche, N., P. Habets and M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*, Springer-Verlag, New York (1977).

[3] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York (1969). 中译本，《常微分方程》，人民教育出版社，北京 (1980), 342.

[4] LaSalle, J. P., Stability theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, **4** (1968).

[5] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Function*, 2nd ed., Cambridge (1944).

The Stability on the Solution of the Initial Value Problem

Shao Xiao-huang

(Hangzhou Normal College, Hangzhou)

Abstract

In this paper, using the differentiability of the solution with respect to the initial value and the parameter, we present a method which, different from Liapunov's direct method, will determine the stability of the non-stationary solution of the initial value problem when the nonstationary solution remains unknown.

Key words stability, initial value problem, differentiability