

# 一种各向异性多重尺度的湍流模型

郭宽良 陈谦斌

(中国科学技术大学工程热物理系) (美国亚拉巴马大学亨茨维尔校部化学工程系)

(钱伟长推荐, 1990年10月15日收到)

## 摘 要

本文给出了一种适用于复杂湍流流动计算的各向异性、多重尺度的湍流模型(MS/ASM), 这种模型对雷诺应力进行直接的模拟, 并可模拟湍流流动的多重尺度影响. 对自由应力流动、旋转流动和回流的湍流流动的计算表明, 它比常用的单重尺度的 $k-\epsilon$ 模型有明显的改进. 由于计算机工作量增加得不多, 所以它在工程计算中, 具有广泛的应用前景.

**关键词** 湍流模型 多重尺度 各向异性

## 符 号 说 明

$D$ : 射流出口直径或宽度	$x_j$ : 坐标方向, 1: 流动方向, 2: 横向
$D_{ij}$ : 雷诺应力的扩散项	$x$ : 流动方向坐标
$f$ : 壁面近似函数	$y$ : 横向坐标
$H$ : 台阶高度	$\delta_{ij}$ : delta函数
$k_p$ : 产生区的湍流功能	$\epsilon_{ij}$ : 粘性耗散张量
$k_d$ : 耗散区的湍流功能	$\epsilon_p$ : 湍流动能的传递率
$P_{ij}$ : 雷诺应力的产生项	$\epsilon_d$ : 湍流动能的耗散率
$P_r$ : 湍流功能的产生率	$\eta$ : 相似坐标
$R_{ij}$ : 雷诺应力张量	$\nu_t$ : 湍流粘度, 或旋涡粘度
$U_o$ : 射流中心线的平均速度	$\sigma_{k_p}, \sigma_{k_d}$ : 湍流模型中的常数
$U_{j1}$ : 平均速度在 $x_j$ 方向上的分量	$\sigma_{\epsilon_p}, \sigma_{\epsilon_d}$ : 湍流模型中的常数
$u_{j1}$ : 波动速度在 $x_j$ 方向上的分量	$\Phi_{ij}$ : 压力变形张量

## 一、引 言

当前, 工程中的大部分湍流流动计算都是基于与雷诺应力/平均应变率本构方程相关联的旋涡粘度的. 最常用的湍流模型就是用湍流动能 $k$ 和湍流动能耗散率 $\epsilon$ 的当地值来计算旋涡粘度, 而 $k$ 和 $\epsilon$ 可根据它们各自的输运微分方程以及平均流动方程联合求解得到. 这种模型常称为 $k-\epsilon$ 湍流模型<sup>[1]</sup>. 它的主要缺点是: (1) 对湍流中的大小不一, 其物理机理有别的旋涡只

用单重尺度来描述；(2) 在处理梯度型的雷诺应力/平均应变率本构方程时，采用了各向同性的假设。实验观察表明，在湍流流动中由于平均流动的不稳定性产生了大旋涡，大旋涡包含着湍流的大部份能量，大旋涡向小旋涡传递能量，并破碎成小旋涡，小旋涡在粘性力作用下耗散掉，大旋涡和小旋涡有着不同的变化速率。在诸如 $k$ - $\epsilon$ 模型和雷诺应力模型的经典湍流模型中<sup>[2]</sup>，只考虑在大小旋涡能量传递处于平衡状态时的湍流动能的产生和耗散。

另外，在现有的单重尺度模型中，虽然对大小旋涡间的能量传递也进行了某些修正，但一般都没有考虑到旋转对湍流流动结构的影响。实验证明，旋转的主要影响源于科氏力(Coriolis)，它使湍流的耗散率减小，湍流的长度增大，尤其是沿旋转轴方向这种影响更甚。由于产生惯性波，使大小旋涡间的净能量传递减少。为了计及不同旋涡的不同机理，因此必须一起考虑湍流动能的产生、传输和耗散。

在本文中，将首先给出基于Hanjalic等人<sup>[3]</sup>提出的多重尺度概念的模型，这种模型可通过将湍流动能能谱分成一组波数区，积分能谱密度方程求得每个波数区的能量变化，并考虑相邻波数区之间的能量传递来得到。然后说明模型的新近发展，它包括了旋转和各向异性的影响。最后将讨论对齐次旋转流动、自由应力流动和回流等湍流流动的计算结果与实验结果及其它单重尺度模型比较。

## 二、湍流模型

多重尺度概念已在[3,4]中详细说明，下面概要给出这种湍流模型的对流-扩散型方程组。大旋涡包含的湍流动能和能量传递率的方程分别为

$$\frac{\partial k_p}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_p}{\partial x_j} \right) + P_p - \epsilon_p \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \epsilon_p}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon_p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon_p}{\partial x_j} \right) + C_{p1} \frac{P_p \epsilon_p}{k_p} - C_{p2} \frac{\epsilon_p^2}{k_p} - C_{p3} \Omega \epsilon_p \quad (2.2)$$

式中 $P_p$ 为湍流动能产生率，它可表示为

$$P_p = -\overline{u_i u_j} \partial U_i / \partial x_j$$

同样，小旋涡的湍流动能和湍流动能耗散率方程分别为

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_t}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k_t}{\partial x_j} \right) + \epsilon_p - \epsilon_t \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \epsilon_t}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon_t}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon_t}{\partial x_j} \right) + C_{t1} \frac{\epsilon_p \epsilon_t}{k_t} - C_{t2} \frac{\epsilon_t^2}{k_t} - C_{t3} \Omega \epsilon_t \quad (2.4)$$

在上述方程中， $\Omega$ 表示局部平均涡量或旋转坐标的角速度。方程(2.1)~(2.4)中的系数是基于渐近的齐次湍流和其它简化的流动情况确定的，详细推导类似于参考文献[4]，各个系数均在表1中给出。

如上述湍流模型方程用来构造基于Boussinesq假设的旋涡粘度的话，则旋涡粘度的表达式可写成

$$\nu_t = C_\mu (k_p + k_t)^2 / \epsilon_p \quad (2.5)$$

以及雷诺应力张量可表示为

$$\overline{u_i u_j} \equiv R_{ij} = -\nu_t S_{ij} + (2/3) \delta_{ij} k \quad (2.6)$$

式中

表1 多重湍流模型中的常数和函数形式

常数或函数	数值或形式
$C_{P_1}$	1.42
$C_{P_2}$	$1.90(1 - 0.2k_i/k_p + 0.2k^2/k_p^2)$
$C_{P_3}$	0.042
$C_{t_1}$	$0.96(1 + 0.01\epsilon_i/\epsilon_p)$
$C_{t_2}$	1.12
$C_{t_3}$	$0.042(1 + 0.08\epsilon_i/\epsilon_p)$
$\sigma_{k_p}$	0.75
$\sigma_{k_i}$	0.75
$\sigma_{\epsilon_p}$	1.00
$\sigma_{\epsilon_i}$	1.00

$$S_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) / 2 \quad (2.7)$$

$$k = \overline{u_i u_i} / 2 \quad (2.8)$$

正如在很多文献中所讨论的,方程(2.6)中用的线性各向同性的本构方程不能对雷诺正应力差提供正确的预示.例如,对充分开展的通道内的湍流流动,方程(2.6)给出的结果是:三个方向上的雷诺正应力皆为相等,即

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} \quad (\overline{u_1 u_1} = \overline{u_2 u_2} = \overline{u_3 u_3})$$

它表示湍流是各向同性的,这和实验结果不符合.在本文中,将考虑湍流的各向异性.雷诺应力分量 $R_{ij}$ 的输运方程为如下形式<sup>[5,6]</sup>:

$$D(\rho R_{ij}) / Dt - D_{ij} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (2.9)$$

方程(2.9)的左端分别为 $R_{ij}$ 的对流项和扩散项,其右端的三项分别表示产生项、压力变形项和粘性耗散项.要求解该方程仍需对 $D_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$ 和 $\epsilon_{ij}$ 作出假定.至今,方程(2.9)仍代表着工程计算中最复杂的湍流模型,它可自动计及各向异性性质和其它的复杂变形,但是,需要多求解的雷诺应力输运方程(三维流动有6个方程)将耗费巨大的计算工作量.因此,本工作中保留了这种模型的优点,并将偏微分方程组化为代数方程组形式,所以称为代数应力模型(ASM)<sup>[7]</sup>.

推导代数应力模型表达式有多种方法,这里采用的方法类似于Mellor和Yamada<sup>[8]</sup>所建议的,严格类似于各向异性 $(\overline{u_i u_j} - 2\delta_{ij}k/3)$ 输运方程的线性代数应力方程的推导,在推导中不用施加Rodi<sup>[2]</sup>所用的 $\overline{u_i u_j} / k = \text{constant}$ 的限制.最后,方程(2.9)可简化为

$$P_{ij} - (2/3)\delta_{ij}P_k + \Phi_{ij} \cong 0 \quad (2.10)$$

应该说明的是, $\Phi_{ij}$ 的模拟应该和推导方程(2.10)的数量级分析相一致.本文中所用的表达式为

$$\Phi_{ij} = -c_1 \rho \frac{\epsilon_i}{k_i} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (k_p + k_i) \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (2.11)$$

和

$$P_{ij} = \overline{u_i u_j} \partial U_i / \partial x_j \quad (2.12)$$

$$P_k = P_{ii} / 2 \quad (2.13)$$

方程(2.11)右端的第一项只和湍流波动速度有关,它可表达为Rotta的线性返回各向同性模型<sup>[6]</sup>.这里值得指出的是,湍流时间尺度在多重尺度模型中应该用小旋涡的.系数 $c_1$ 大于1,上述模型就可趋于各向同性.本工作中, $c_1$ 取为 $1.8 - 0.5f$ ,这里的 $f$ 是壁面校正项,它反映了对压力变形项在壁面法向上分布的影响,这已在很多文献中讨论过<sup>[6,9]</sup>.本工作采用的近似函数形式为

$$f = 1 - (y/D)^2$$

式中的 $y$ 为离壁面的距离, $D$ 为通道的半宽度.

方程(2.11)右端的第二项称为压力变形张量的平均变形部分.在模拟该项时,采用了文献[5]的湍流动能的产生是各向同性化的做法.由于湍流动能的产生是在大旋涡区,所以时间尺度应该用大旋涡的.这里 $c_2$ 取为 $c_2 = 0.85 - 0.06f$ .

对于壁面限定的流动, $k_i/k_p$ 的比值可基于壁面函数方法来求得<sup>[2]</sup>.在实际计算中,壁面

函数是根据近壁为平衡状态的假定和对数速度分布求得的,详细推导和表达式可见文献[4].

### 三、结果和讨论

为了检验给出的模型,本文分别对均匀旋转的齐次湍流,自由应力流动,平面和轴对称回流流动进行了计算.现对计算结果分别讨论如下:

#### (1) 旋转的齐次湍流

由于科氏力的作用,使湍流结构发生了变化:在旋转轴方向上湍流长度尺度增大,大旋涡向小旋涡的能量传递减小<sup>[9]</sup>.在图1中给出了对三种参数条件的计算结果和实验数据的比较,三种参数条件取自 Wigeland和Nagib<sup>[10]</sup>,已列于表2.

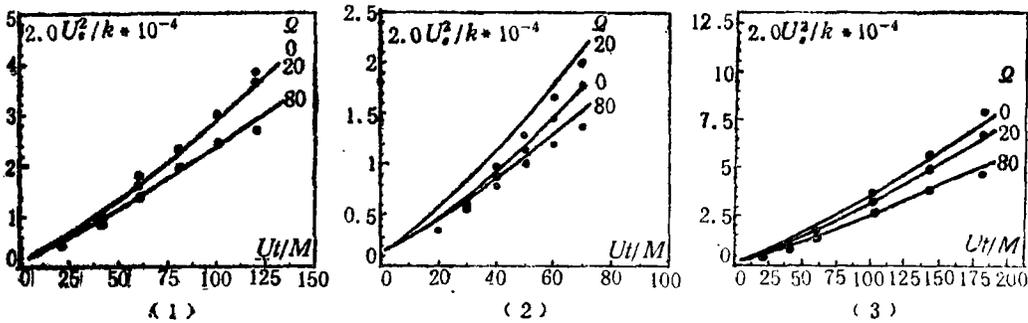


图1 旋转的齐次湍流随时间的衰减

表2 Wigeland和Nagib (1978)的实验数据 (Ut/M=20)

	情况(1): M=0.0039(m)			情况(2): M=0.00625(m)			情况(3): M=0.00254(m)		
	0	20	80	0	20	80	0	20	80
$\Omega(s^{-1})$	0	20	80	0	20	80	0	20	80
$U(m/s)$	8.69	8.66	8.82	5.33	5.45	5.48	8.51	8.58	8.79
$U_x(m/s)$	8.69	8.67	8.96	5.33	5.46	5.71	8.51	8.59	8.93
$k(m^2/s^2)$	0.10625	0.10105	0.1157	0.0425	0.0453	0.04975	0.0885	0.0887	0.09845
$\epsilon(m^2/s^3)$	17.67	16.45	18.19	2.649	3.591	3.300	24.27	22.56	22.42

对不同的旋转速率和不同的流动条件下湍流强度的衰减本文给出的模型都能提供很精确的预示,和实验结果符合得都很好.即使在第(2)种情况下,由于初始的时间尺度不同,因此 $\Omega=20s^{-1}$ 时的湍流衰减得更快.在相同的初始条件下,湍流强度的衰减随旋转速率增大而减小,计算结果和实验数据是符合一致的.但标准的k-ε模型不能预示这种变化.

#### (2) 自由应力流动——射流

在建立湍流模型的过程中,重要的一步就是用模型来预示自由应力流动.本工作对三种射流的充分开展区(自模拟区)进行了计算,所用数值方法是基于较精确的Keller箱式格式的差分法,有关数值格式和在湍流应力流与非旋转环境流体之间的突变边界的计算方法可参阅[11].这里所用的多重尺度模型采用了方程(2.5)给出的旋涡粘度表达式(MS/EV模型).

在表3中给出了用MS/EV模型以及其它几种单重尺度模型对平面射流、轴对称射流和径向射流的扩展比与实验数据的比较.实验表明,轴对称射流的扩展比要比平面射流的小20%左右.由于在MS/EV模型中包括了旋转的时间尺度,具有因旋涡扭曲机理使含能旋涡向耗散旋涡的能量传递增大的影响,所以计算得到的轴对称射流扩展比和实验数据比较接近.总括地说,对这三种射流扩展比的计算,本文给出的模型(MS/EV)提供了最好的预示.

表3 射流扩展比的计算结果和实验数据的比较

模 型	平 面 射 流	轴 对 称 射 流	径 向 射 流
$k-\varepsilon$ [15]	0.110	0.125	0.094
Morse[16]	0.102	0.085	0.099
Pope[17]	0.110	0.091	0.042
Hanjalic和Launder[18]	0.119	0.107	0.077
Chen和Guo[11]	0.111	0.084	0.094
实验值	0.100~0.110	0.086~0.09	0.098~0.110

在图2~4中，画出了这三种射流的无量纲平均速度分布。用其它几种模型算得的平均速度在射流的中心部位和实验结果比较符合，但在射流边缘处偏离较大。这是由于在自由湍流

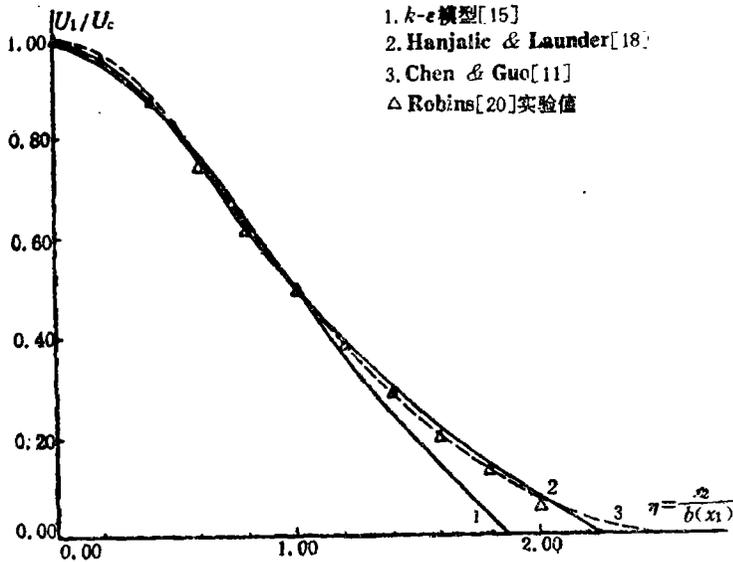


图 2 平面射流的平均速度分布

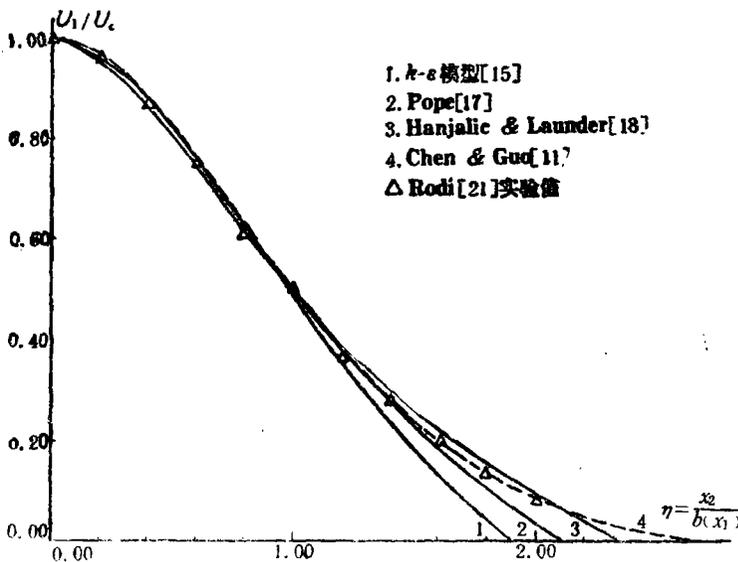


图 3 轴对称射流的平均速度分布

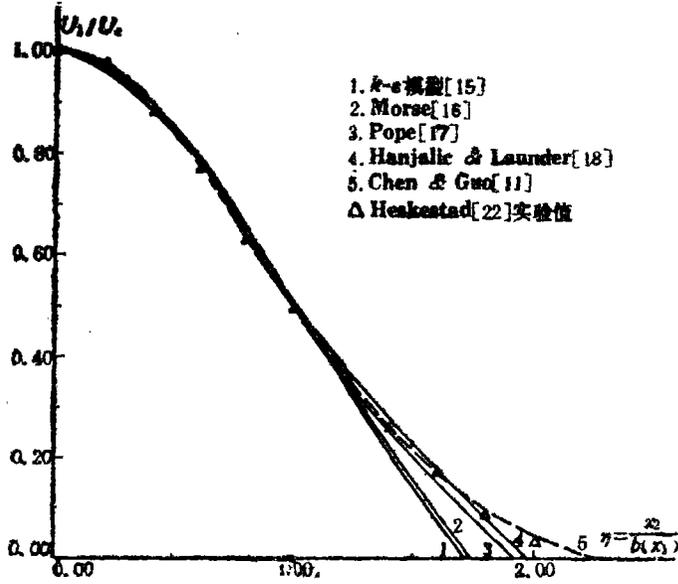


图 4 径向射流的平均速度分布

和非湍流交界处存在着间断性以及这些湍流模型没有明显地模拟这些不稳定性,MS/EV模型似乎给出了更好的预示以及较大的射流宽度。

(3) 平面后台阶流动

在求解这种有回流的平面后台阶流动和轴对称扩张管道内的流动问题时,控制微分方程具有椭圆性质.方程的离散化采用控制容积法,网格为非错列网格.对流项使用二阶上风格式.时间推进应用 PISO<sup>[12]</sup>算法,在每个时间步用满足连续性的压力增量方程重新求解动量方程,直到得到稳态解.详细数值方法可参阅[13].

用k-e模型,单重尺度的代数应力模型(k-e/ASM),多重尺度模型和旋涡粘度表达式(MS/EV)以及最新发展的各向异性多重尺度模型(MS/ASM)计算的再附着长度已列于表4.由该表可以看出,用单重尺度模型(k-e和k-e/ASM)所得的再附着长度都偏低,用多重尺度模型预示的结果更接近实验结果。

表4 平面后台阶流动的再附着长度的计算结果和实验的比较

9:1实验 Driver和 Seegmiller [19]				
实验值	k-e	多重尺度	k-e/ASM	MS/ASM
~6.1	4.76	5.94	4.85	5.70

用波动量表示的话,在图5中给出了由k-e/ASM和MS/ASM预示的流动方向和横向上的湍流强度以及雷诺切应力 $\overline{u'v'}$ 和实验结果的比较.湍流量是用进口中心线速度无量纲化的.除近壁处外,MS/ASM预示的结果更接近于实验数据,这两种模型都给出了各向异性的湍流结构.在近壁区的偏离主要是壁面近似函数f的选取还不够好所造成的。

(4) 轴对称扩张管道内的流动

本工作对1:3扩张管道内的流动<sup>[14]</sup>进行了计算.在表5中列出了用上述四种模型得到的再附着长度和实验结果的比较.显然,用多重尺度模型MS预示的结果更符合实验数据.用MS/ASM算得的再附着长度比MS/EV的略短一些.用k-e/ASM和MS/ASM预示的流动方向和径向上的湍流强度已在图6中给出.值得注意的是在 $x/H=2$ 处用MS/ASM得到的结果和实验符合得非常好.在回流区内,这两个模型都给出了非各向同性的结构,但MS/ASM的结果似乎

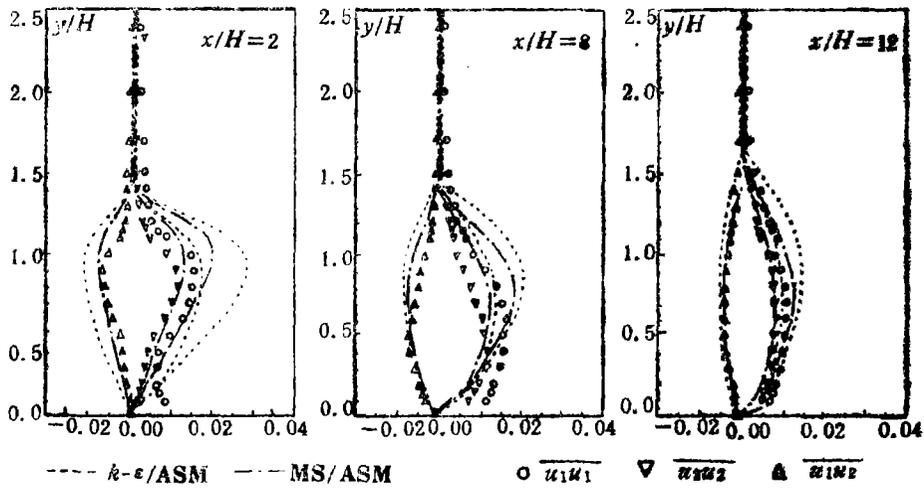


图5 平面后台阶流动的雷诺应力分布

表5 轴对称扩张管道内流动的再附着长度的计算结果和实验数据的比较

3:1(Axis.)实验 Samimy和Nejad[14]				
实验值	$k-\epsilon$	MS	$k-\epsilon/ASM$	MS/ASM
$\sim 9$	7.10	8.82	6.80	8.70

更好一些。当流动再附着后，模型比实验更快地趋于回到各向同性。在MS/ASM模型中，虽然用了不同的湍流时间尺度来模拟这个机理，但是没有改变在常用Rotta模型中所用的系数值。因此在这方面尚需进一步研究。图7中画出了用这两种各向异性模型得到的雷诺切应力和

实验的比较，总的说，MS/ASM给出了更好的预示。

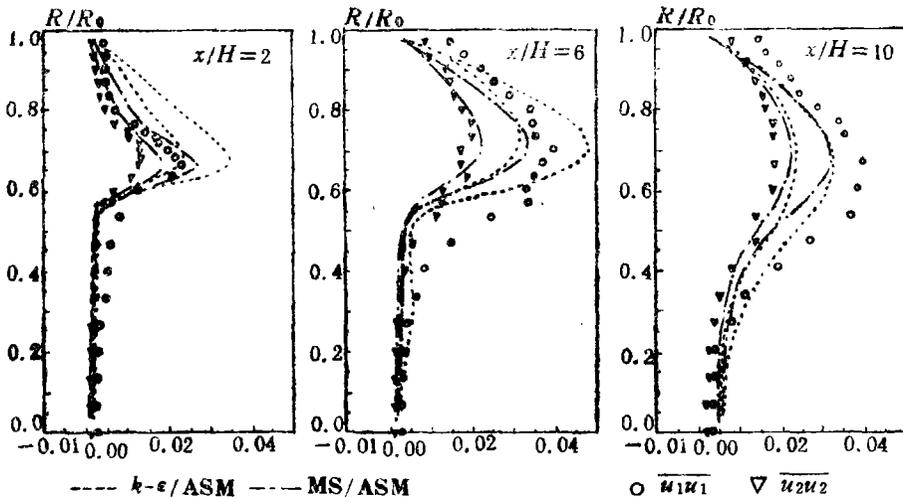


图6 轴对称扩张管道内流动的湍流强度分布

### 四、结 论

本文给出了新近发展的湍流模型，并对旋转流动、自由应力流动和回流流动进行了计算。结果表明，多重尺度模型明显优于单重尺度模型；而且，各向异性多重尺度模型可对工程计算中的二阶湍流量给出很精确的预示；此外，和 $k-\epsilon$ 模型相比，它所需的计算机存储和工作

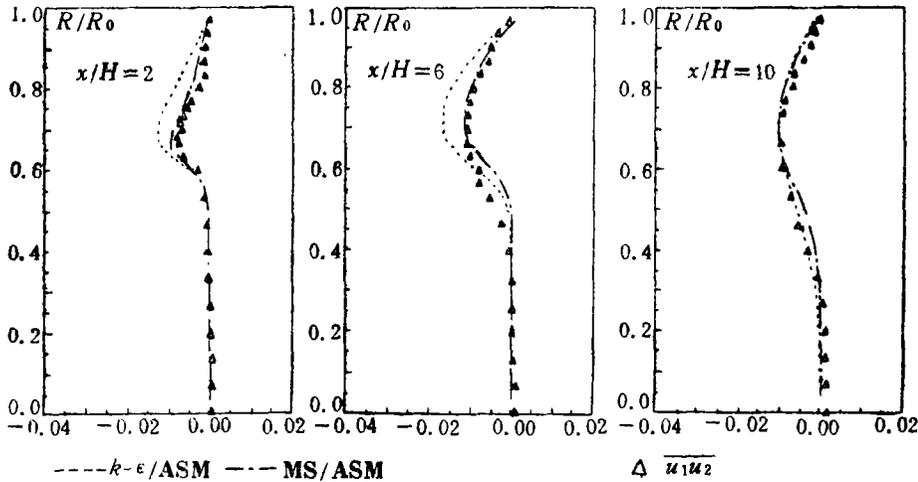


图 7 轴对称扩张管道内流动的雷诺切应力分布

量 (CPU 时间) 增加不多 (如平面后台阶流动, 约增加 20%)。在 MS/ASM 的计算结果和实验数据间的某些偏离主要和压力变形项的模拟, 特别是壁面近似函数有关。为了进一步改进模型的预示精度, 尚需进一步地研究。

**致谢** 作者希望借此感谢 Alabama S. C. 提供足够的 CRAY 计算时间和 Seema Singh 女士熟练地完成英文稿的打字。

#### 参 考 文 献

- [1] Nallasamy, M., Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: a review, *Computers & Fluids*, 15(2) (1987), 151—194.
- [2] Rodi, W., Examples of turbulence models for incompressible flows, *AIAA J.*, 20 (1982), 872.
- [3] Hanjalic, K., B.E. Launder and R. Schiestel, Multiple-time-scale concepts in turbulent transport modelling, *Turbulent Shear Flows*, 2 (1980), 36—49.
- [4] Kim, S.W. and C.P. Chen, A multiple-time-scale turbulence model based on variable partitioning of turbulent kinetic energy spectrum, *Numerical Heat Transfer*, Part B, 16 (1989), 193—211; also available as NASA CR-179222 (1987).
- [5] Launder, B. E., Second-moment closure: present...and future? *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 10(4) (1989), 282—300.
- [6] Launder, B.E., Second-moment closure and its use in modelling turbulent industrial flows, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 9 (1989), 963—985.
- [7] Demuren, A.O. and W. Rodi, Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, *J. Fluid Mech.*, 140 (1984), 189—222.
- [8] Mellor, G. L. and T. Yamada, Development of a turbulence closure model for geophysical problem, *Reviews of Geophysical and Spacephysics*, 20 (1982), 851.
- [9] Bardina, J., J.H. Ferziger and R.S. Rogallo, Effect of rotation on isotropic turbulence: computation and modelling, *J. Fluid Mech.*, 154 (1985), 321—336.
- [10] Wigeland, R. A. and H. M. Nagib, Grid-generated turbulence with and without rotation about the streamwise direction, IIT Fluids and Heat Transfer Rep. R78-1, Illinois Inst. of Tech., Chicago, Illinois (1978).

- [11] Chen, C.P. and K.L. Guo, Similarity solutions of jet flows using a multiple-scale turbulence model, AIAA paper 89-1797 (1989).
- [12] Issa, R.I., Solutions of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting, *J. Comp. Physics*, **62** (1985), 40.
- [13] Jiang, Y., H.M. Shang and C.P. Chen, MAST—a multiphase all-speed transient Navier-Stokes code in generalized coordinates, NASA CR, NAG8-092 (1990).
- [14] Samimy, M., A.S. Nejad, et al., Isothermal swirling flow in a damp combustor, AIAA paper 87-1352 (1987).
- [15] Jones, W. P. and B. E. Launder, The predictions of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **15** (1972), 301.
- [16] Morse, A.P., Axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl, Ph.D. Thesis, University of London, England (1977).
- [17] Pope, S.B., An explanation of the turbulent round jet/plane jet anomaly, *AIAA J.*, **16** (1978), 279.
- [18] Hanjalic, K. and B.E. Launder, Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains, *J. Fluid Eng.*, **102** (1980), 39.
- [19] Driver, D.M. and H.L. Seegmiller, Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow, *AIAA J.*, **23**(2) (1985), 163—171.
- [20] Robins, A., The structure and development of a plane turbulent free jet, Ph.D. Thesis, University of London, England (1971).
- [21] Rodi, W., The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence, Ph.D. Thesis, University of London, England (1972).
- [22] Heskestad, G., Hot wire measurements in a radial jet, *J. Appl. Mech.*, **88** (1966), 417.

## A Non-Isotropic Multiple-Scale Turbulence Model

Guo Kuan-liang

(Department of Engineering Thermophysics, University of Science and  
Technology of China, Hefei)

C. P. Chen

(Department of Chemical Engineering, University of Alabama in Huntsville,  
Huntsville, AL 35899, U.S.A.)

### Abstract

This paper describes a newly developed non-isotropic multiple-scale turbulence model (MS/ASM) for complex flow calculations. This model focuses on the direct modeling of Reynolds stresses and utilizes split-spectrum concepts to model multiple-scale effects in turbulence. Validation studies on free shear flows, rotating flows and recirculating flows show that the current model performs significantly better than the single-scale  $k-\epsilon$  model. The present model is relatively inexpensive in terms of CPU time which makes it suitable for broad engineering flow applications.

**Key words** turbulence model, multiple-scale, non-isotropic