应用数学和力学，第12卷第11期（1991年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不动泛系定理的某些新结果*

刘怀俊

（武汉大学，1990年8月29日收到）

摘　要

本文讨论了复补算子的不动泛系定理，给出了泛浑沌与泛怪引子的存在条件，进而利用所得结果证明一些关于多值映射的不动点定理，后者补充与发展了Kakutani的结果。

关键词　复补算子　泛浑沌　泛怪引子

一、引　言

不动泛系定理是一类刻划广义转化下的广义稳定性、平衡性与相对不变的集合、结构与性状的定理[4~6]．关于泛系运算不变的集合是不动泛系定理所研究的具体内容之一，所以不动泛系定理补充和发展了传统的不动点理论，它不需要诸如线性、连续性、紧性、凸性、拓扑性等这样一些苛刻条件，在泛系方法论框架下，文[3]用新的观点研究非线性问题，引入了一些新概念，文[1，2]指出对泛浑沌、泛引子与泛怪引子的研究可转化为对一类子集的研究．本文主要讨论泛浑沌与泛怪引子的存在性并对多值映射给出一些不动点定理，从而补充和发展了Kakutani等人所获得的有关成果．

设G为非空集，G上的二元关系是$G\times G$的一个子集，对$g\subset G\times G$，$D\subset G$，x，$y\in D$定义下列运算

$$x\circ g=\{y\in G\mid (x,\ y)\in g\},$$
$$D\circ g=\bigcup_{x\in D}x\circ g=\{y\in G\mid \exists\, x\in D,\ (x,\ y)\in g\},$$

$$g*y=\{x\in G\mid (x,\ y)\,\overline{\in}\, g\},$$
$$g*D=\bigcap_{y\in D}g*y=\{x\in G\mid \forall\, y\in D,\ (x,\ y)\,\overline{\in}\, g\} \tag{1.1}$$

类似地可定义$g\circ y$，$g\circ D$．$x*g$，$D*g$．容易看到

$$g*D=G-g\circ D.$$

因此，我们称这种由(1.1)所确定的对集合的运算为复补算子．

定义1.1[3]　设$g\subset G\times G$，$D\subset G$，$D^2\cap g=\phi$，则称D为关于g的泛浑沌（或内稳定性）．

---

* 吴学谋推荐，高等学校博士学科点基金资助．

若对所有的$x \in G-D$，$x \circ g \cap D \neq \phi$，则称$D$为关于$g$的泛引子（或外稳定性）. 若$D$同时为关于$g$的泛浑沌与泛引子，则称$D$为关于$g$的泛怪引子（或核）.

文[1]已证明定义1.1与下述定义等价：

定义1.2 若$D \subset g*D$，则称D为关于g的泛浑沌.若$D \supset g*D$，则称D为关于g的泛引子. 若$D=g*D$，则称D为关于g的泛怪引子.

从定义1.2可以看到：泛怪引子、泛浑沌与泛引子分别对应于下列三类不动子集

$$FS_{\mathrm{I}}(g)=\{D \mid D \subset G,\ D \neq \phi,\ D=g*D\},$$

$$FS_{\mathrm{II}}(g)=\{D \mid D \subset G,\ D \neq \phi,\ D \subset g*D\},$$

$$FS_{\mathrm{III}}(g)=\{D \mid D \subset G,\ D \neq \phi,\ D \supset g*D\}.$$

二、存 在 定 理

从复补算子的定义容易得出：若g是G上的半序关系，则$g*G$就是半序集(G, g)的所有极大元之集. 所以当g为一般的二元关系时，$g*G$的元素可以看成G的广义极大元.

若$g*G \neq \phi$，令$D \triangleq g*G$，则$D \subset g*D$.于是有

定理2.1 若$g*G \neq \phi$，则$D \triangleq g*G$是关于g的泛浑沌.

条件C 若不存在$\{x_i \in G \mid i=1, 2, \cdots\}$使$(x_i, x_{i+1}) \in g$，则称$g$满足条件C.

定理2.2 二元关系g满足条件C的必要充分条件是对任意的$D \subset G$，有

$$(g*D) \cap D \neq \phi \tag{2.1}$$

证 充分性 设存在$\{x_i \in G \mid i=1, 2, \cdots\}$使$(x_i, x_{i+1}) \in g$. 令$D_0=\{x_1, x_2, \cdots\}$，显然$D_0 \neq \phi$，$(g*D_0) \cap D_0=\phi$，此与(2.1)矛盾.

必要性 设有G的非空子集D，使$(g*D) \cap D=\phi$，取$x_1 \in D$，则$x_1 \overline{\in} g*D$，由复补算子的定义知必有$x_2 \in D$使$(x_1, x_2) \in g$，显然$x_2 \overline{\in} (g*D)$，这就意味着有$x_3 \in D$使$(x_2, x_3) \in g$，而$x_3 \overline{\in} (g*D)$，如此类推，得出$\{x_i \in G \mid i=1, 2, \cdots\}$使$(x_i, x_{i+1}) \in g (i=1, 2, \cdots)$. 亦即$g$不满足条件C.这一矛盾证明了(2.1)的必要性.

定理2.3 若二元关系g满足条件C，则存在G的非空子集D，使$D=g*D$.

证 设$P(G)$为G的所有子集按包含关系构成的半序集.因g满足条件C，则由定理2.2知$D' \triangleq g*G \neq \phi$，且$D' \subset g*D'$，$D' \subset g*(g*D')$.

令

$$B=\{U \subset G \mid U \subset g*U,\ U \subset g*(g*U)\},$$

因$D' \in B$，知$B \neq \phi$.下面证明存在$D \in B$，使$D=g*D$.

设M为B的极大链，令$D=\bigcup_{U \in M} U$. 为证明$D \in B$，首先证明$D \subset g*(g*D)$. 因为$M \subset B$，故对任意$U \in M$，$U \subset g*(g*U)$，于是

$$\bigcup_{U \in M} U \subset \bigcup_{U \in M} g*(g*U),$$

即

$$D \subset \bigcup_{U \in M} g*(g*U).$$

另一方面，对任意$U \in M$，$g*(g*U) \subset g*(g*D)$，所以$\bigcup_{U \in M} g*(g*U) \subset g*(g*D)$，得$D \subset g*(g*D)$.

现在证明$D\subset g*D$.假若$D\not\subset g*D$，注意到$D=\bigcup_{X\in M}X$，就有$g*D=\bigcap_{X\in M}g*X$．这就意味着有$U\in M$，使$D\not\subset g*U$，即$g*U$不可能是$D=\bigcup_{X\in M}X$的上界.因而存在$V\in M$使$V\not\subset g*U$．因为$U\subset g*U$，$V\subset g*V$，且M是一链，故抑或$U\subset V$，抑或$V\subset U$.因为$V\not\subset g*U$，故$V\not\subset U$.如果$U\subset V$，则有$g*U\supset g*V\supset V$.这与$V\not\subset g*U$矛盾.故$D\subset g*D$.

这样，我们证明了$D\in B$.最后还需证明$D=g*D$.设D为$g*D$真子集，则$W\triangleq g*D-D\neq\phi$，且$g*D=D\cup W$，故$g*W\supset g*(g*D)\supset D$.由定理2.2，$H\triangleq(g*W)\cap W\neq\phi$，因此$g*W\supset D\cup H$，$g*H\supset g*W\supset D\cup H$，令$D'=D\cup H$．则$g*D'=(g*D)\cap(g*H)\supset D\cup H=D'$，又$g*D'\subset g*D=D\cup W$,因此$g*(g*D')\supset(g*D)\cap(g(*W)\supset D\cup H=D'$,故$D'\in B$.因为$D'\supset D$,故对任意$U\in M$均有$D'\supset U$.这样，$M$就不是$B$中的最大链，此与假设矛盾．证毕．

现设g不满足条件C，即存在$\{x_i\in G|i=1,2,\cdots\}$使$(x_i,x_{i+1})\in g$．由此，则对任意的$m\geqslant 2$，$g^m\neq\phi$.于是有

定理2.4 设有正整数$m\geqslant 2$，使$g^m=\phi$，则存在G的子集D，使$D=g*D$.

由复补算子的定义，不难得到下列结果

定理2.5 设$y\in D\subset G$，$\bar{g}=G^2-g$，则

1） $g*y=\bar{g}\circ y$.

2） $g*y\supset g*D$.

利用以上结论，我们来研究多值映射的不动点定理.

设f为从G到G的多值映射，f的图象

$$U=\{(x,y)|y=f(x)\}$$

是G上的二元关系，若$g=G^2-U^{-1}$满足定理2.3的条件，则存在$D\subset G$，$D\neq\phi$，使$D=g*D$.这样，对任意$x\in D$，有$x\in g*D\subset g*x=U^{-1}\circ x=f(x)$.于是有

定理2.6 设f为G到G的多值映射，f的图象为U，如果$g=G^2-U^{-1}$满足定理2.3的条件，则必存在$x\in G$，使$x\in f(x)$.

同样，由定理2.4可得

定理2.7 若f为G到G的多值映射，U为f的图象，$g=G^2-U^{-1}$且$g^m=\phi$（$m\geqslant 2$），则必存在$x\in G$，使$x\in f(x)$.

三、条件C的某些特殊形式

本节，考虑G为有限集，即$|G|=N<+\infty$的情形，目的在于给出一些条件C的等价条件.

定理3.1 若g满足条件C，则$g^t\cap I=\phi$.

证 设$g^t\cap I\neq\phi$，则有正整数n存在，使$g^n\cap I\neq\phi$，因而有$\{x_i\in G|i=0,1,2,\cdots,n-1\}$，使$(x_i,x_{i+1})\in g$，令$y_{kn+i}=x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1;\ k=0,1,2,\cdots)$，则对无穷序列$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1},\cdots$有$(y_i,y_{i+1})\in g$，此与$g$满足条件C矛盾．证毕.

我们注意到，定理3.1的证明并不需要G为有限集的假设，但是这一条件对于定理3.1的逆定理的证明却是必不可少的.

定理3.2 若$g^t\cap I=\phi$，且g不满足条件C，则必存在$\{x_i\in G|i=1,2,\cdots\}$，使

1） 若$j=i-1$，则$(x_j,x_i)\in g$，

2) 若$(x_j, x_i)\in g$，则$i>j$.

证 由于g不满足条件C，则必存在$\{x_i\in G|i=1,2,\cdots\}$，使$(x_i, x_{i+1})\in g$. 由此，当$j=i+1$时，$(x_i, x_j)\in g$.现证明，若$(x_q, x_p)\in g$，则$p>q$.若不然，则有$p\leqslant q$，于是有子列$x_p$，$x_{p+1}$，$\cdots x_q$，使$(x_p, x_{p+1})\in g$，$(x_{p+1}, x_{p+2})\in g$，$\cdots$，$(x_{q-1}, x_q)\in g$以及$(x_q, x_p)\in g$.这样就有：$(x_p, x_p)\in g^n(n=q-p+1)$.此与$g^t\cap I=\phi$矛盾，证毕.

定理3.3 若$|G|=N<+\infty$，且$g^t\cap I=\phi$，则g满足条件C.

证 设条件C不成立，则有$\{x_i\in G|i=1,2,\cdots\}$，使$(x_i, x_{i+1})\in g$，可以证明$\{x_i\}$的元素互不相同.若不然，必有正整数$p$，$q$，$p<q$，使$x_p=x_q$.由此，$(x_p, x_{p+1})\in g$，$(x_q, x_{p+1})\in g$.根据定理3.2，得$q<p+1$，即$q\leqslant p$.此与$p<q$矛盾.由此可知$\{x_i\}$是由$G$的无限个互不相同的元素组成.而这与定理的假设相矛盾.证毕.

推论1 设G为有限集，且$g^t\cap I=\phi$，则有非空子集$D\subset G$，使$D=g*D$.

定理3.4 设$|G|=N<+\infty$，则$g^t\cap I=\phi$当且仅当

$$g^N=\phi. \tag{3.1}$$

证 必要性 设$g^t\cap I=\phi$.但$g^N\neq\phi$.则必有$\{x_i\in G|i=0,1,2,\cdots,N\}$使$(x_i, x_{i+1})\in g$，利用类似于定理3.3的方法，可以证明$\{x_i\}$由$N+1$个元素组成，这与$|G|=N$矛盾.

充分性 设$g^N=\phi$，而$g^t\cap I\neq\phi$,则存在$k\in\{1,2,\cdots,N\}$使$g^k\cap I\neq\phi$.即存在$x_0\in G$使$(x_0, x_0)\in g^k$.由此可得$g^N\neq\phi$.此与(3.1)矛盾.证毕.

推论2 设$|G|=N<+\infty$且$g^N\neq\phi$，则有非空子集$D\subset G$，使$D=g*D$.

参 考 文 献

[1] 覃国光，稳定性与浑沌的一些泛系研究，科学探索学报，(3) (1986).

[2] 覃国光，不动泛系定理及其应用，科学探索学报，(3) (1986).

[3] Wu Xue-mou, Pansystems methodology and nonlinear analysis: New study of bifurcation, catastrophe, chaos and stability, *Procedings of the* 1985 *International Confercnce on Nonlinear Mechanics* (1985).

[4] Wu Xue-mou, Pansystems methodology:Concepts, theorems and applications (I)——(Ⅶ), *Science Exploration*, (1, 2, 4) (1982), (1, 2, 4) (1983), (1, 4) (1984), (1) (1985).(in English)

[5] Wu Xue-mou, Pansystems methodology and its applications:Cybernetics, epitemology, shengkeology and sociology, *Science Exploration*, (3) (1986). (in English)

[6] Liu Huai-jun, Some problems in pansystems approximation theory, *Approximation, Optimization and Computing:Theory and Application*, Elsevier/North Holland, Amsterdam(1990).

Some New Results about Fixed Pansystems Theorems

Liu Huai-jun

(*Math. Dept., Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

In this paper the fixed pansystems theorems concerning the composition-complement-operators are discussed. Some existence conditions of panchaos and strange panattractor are given. And using the results, some fixed point theorems for many-valued mappings are also proved, which complement and develop the results obtained by Kakutani.

Key words composition-complement operator, panchaos, strange panattractor