应用数学和力学，第12卷第11期（1991年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶非线性无穷边值问题的奇摄动（Ⅱ）

赵 为 礼

（吉林大学数学系，1987年10月27日收到）

摘 要

本文讨论了含小参数$\varepsilon>0$的二阶非线性奇摄动无穷边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y'),\\ y^{(i)}(0)=\alpha_i,\ \ y(\infty)=\beta\end{cases}$$

（其中α_i，β为常数，$i=0$，1）之解的存在性，并且给出了解的渐近估计式．

关键词 奇摄动 非线性 无穷边值问题 解的存在性 渐近估计

一、引 言

文[1]～[6]曾以拟线性双曲型方程组Riemann问题间断解的展平为背景，讨论了某些二阶拟线性奇摄动无穷边值问题．本文拟就含小参数$\varepsilon>0$的一般二阶非线性奇摄动无穷边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y') & (1.1)\\ y^{(i)}(0)=\alpha_i,\ \ y(\infty)=\beta & (1.2_i)\end{cases}$$

（其中α_i，β为常数，$i=0$，1）之当退化问题

$$\begin{cases}0=f(x,u,u') & (1.3)\\ u(\infty)=\beta & (1.4)\end{cases}$$

具有适当光滑解的情形进行某些探讨．可想而知，这对于过渡到具有间断退化解的一般二阶非线性无穷边值问题的奇摄动这一较为困难的问题的研究，也将会是有益的．

设I为某区间．如所周知，若存在函数$\bar{\omega}(x)\in C^2(I)$，使得

$$\varepsilon\bar{\omega}''(x)\leqslant f(x,\bar{\omega}(x),\bar{\omega}'(x))\qquad(x\in I),$$

则称$\bar{\omega}(x)$为方程（1.1）于I上的上解；若存在函数$\underline{\omega}(x)\in C^2(I)$，使得

$$\varepsilon\underline{\omega}''(x)\geqslant f(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x))\qquad(x\in I),$$

则称$\underline{\omega}(x)$为方程（1.1）于I上的下解．若上述两不等式中前（后）一不等式于I上恒严格

---

* 江福汝、戴世强推荐．

成立，则称$\bar{\omega}(x)(\underline{\omega}(x))$为方程（1.1）于$I$上的严格上（下）解．很明显，若$\underline{\omega}(x)<\bar{\omega}(x)$ $(x\in I)$，并且$f(x,y,z)$于区域

$$G=\{(x,y,z)\,|\,x\in I,\underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant\bar{\omega}(x),|z|<\infty\}$$

上连续，则只要$\bar{\omega}(x)(\underline{\omega}(x))$是方程（1.1）于$I$上的严格上（下）解，对于$I$的任何内点$x_1$以及任何$y_1\in(\underline{\omega}(x_1),\bar{\omega}(x_1))$，曲线$y=\bar{\omega}(x)(\underline{\omega}(x))$便对方程(1.1)之从（$t_1$，$x_1$）出发的积分曲线是"不切"的，即此积分曲线若于$I$内某点与$y=\bar{\omega}(x)(\underline{\omega}(x))$相交，则必不相切．

本文在能够保证（至少对于充分大的x而言）构造出上述的$\bar{\omega}(x)$与$\underline{\omega}(x)$，使得极限式

$$\lim_{x\to\infty}\bar{\omega}(x)=\lim_{x\to\infty}\underline{\omega}(x) \tag{1.5}$$

成立的条件下，首先对具有较一般的退化解的情形讨论了边值问题(1.1)、$(1.2_i)(i=0,1)$解的存在性，并且除定理1仅得到(1.1)、(1.2_0)解的收敛性外，其余结果都给出了(1.1)、(1.2_i)（$i=0$，1）解的渐近估计式；其次，就具有定常退化解的情形对上述问题作了进一步讨论．

至于在（1.5）式不成立的情形下边值问题(1.1)、$(1.2_i)(i=0,\ 1)$解的存在性与渐近估计，作者已于文[12]进行了讨论．该文中还讨论了上述边值问题解的唯一性．

二、具有一般退化解的情形

首先讨论边值问题(1.1)、(1.2_0)．为叙述方便起见，以H_j（$j=1$，2）表示如下条件：

H_1：退化问题(1.3)、(1.4)于$0\leqslant x<\infty$上存在解$u=u(x)$．

H_2：$f(x,y,z)$在区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x<\infty,|y-u(x)|\leqslant M,|z|<\infty\}$$

上连续可微（其中$M>0$为常数，且$|\alpha_0-u(0)|<M$），并且满足Nagumo条件，即

$$|f(x,y,z)|\leqslant\varphi(|z|),\quad (x,y,z)\in\Omega.$$

其中$\varphi(s)$为定义于$0\leqslant s<\infty$上的正值连续函数，使得

$$\int_0^\infty\frac{sds}{\varphi(s)}=\infty.$$

引理1　假设条件H_1，H_2成立．若存在$\bar{\omega}_\varepsilon(x)$，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\in C[0,\infty)$，使得

1°．$-M<\underline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)<0<\bar{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)<M\qquad(0<x<\infty)$，

$\underline{\omega}_\varepsilon(0)\leqslant\alpha_0\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(0)$，$\underline{\omega}_\varepsilon(\infty)=\bar{\omega}_\varepsilon(\infty)$；

2°．于$[0,\infty)$上，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$与$\bar{\omega}_\varepsilon(x)$至多只在某一点$x_0\in(0,\infty)$处不可微，而$\underline{\omega}'(x_0\pm0)$，$\bar{\omega}'(x_0\pm0)$皆存在，并且

$$\underline{\omega}'_\varepsilon(x_0-0)\leqslant\underline{\omega}'_\varepsilon(x_0+0),\quad \bar{\omega}'_\varepsilon(x_0-0)\geqslant\bar{\omega}'_\varepsilon(x_0+0);$$

3°．曲线$y=\underline{\omega}_\varepsilon(x)$与$y=\bar{\omega}_\varepsilon(x)(0\leqslant x<\infty)$在前述意义下是"不切"的．

则边值问题(1.1)、(1.2_0)存在解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty).$$

证明　根据文[7]定理2（略加变通）可知，对任一自然数n，边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y'),\\ y(0)=\alpha_0,\ y(n)=u(n)\end{cases}$$

存在解$y=y_n(x,\varepsilon)$，满足不等式

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y_n(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant n)\tag{2.1}$$

由文[7]引理1易见，$\{y_n'(0,\varepsilon)\}$存在收敛子序列，记其极限为ν_ε。则由（2.1）式，根据解对初值的连续性以及延展定理便知，方程（1.1）之满足初始条件$y(0,\varepsilon)=\alpha_0$，$y'(0,\varepsilon)=\nu_\varepsilon$的解$y=y(x,\varepsilon)$必于$[0,\infty)$上存在，并且于其上满足

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x).$$

据此及1°立见$y(\infty,\varepsilon)=\beta$。故$y=y(x,\varepsilon)$即为所求。引理证完。

记　H_3：存在$k>0$，使得

$$f_z(x,y,z)\leqslant -k,\qquad (x,y,z)\in\Omega.$$

H_4：存在σ，A，$X>0$，使得当$x\geqslant X$，$|y-u(x)|\leqslant M$时，

$$|f_x(x,u(x),u'(x))|+|f_y(x,y,u'(x))|\leqslant A\exp[-\sigma x].$$

则我们有如下的

定理1　假设条件$H_1\sim H_4$成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2_0)有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且对任意$\delta>0$，极限式

$$\lim_{\varepsilon\to0}y(x,\varepsilon)=u(x)\tag{2.2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}y'(x,\varepsilon)=u'(x)\tag{2.3}$$

皆于$\delta\leqslant x<\infty$上一致地成立。

证明　按条件$H_1\sim H_3$，方程$f(x,y,z)=0$于$0\leqslant x<\infty$，$|y-u(x)|\leqslant M$上存在（唯一）连续可微解$z=\psi(x,y)$。从而$u=u(x)\in C^2[0,\infty)$是微分方程

$$u'=\psi(x,u)\tag{2.4}$$

的解。今取$x_0\geqslant X$，使得

$$l\overset{\Delta}{=}A\exp[-\sigma x_0]<\sigma k\tag{2.5}$$

从而存在$L>0$，使得当$0\leqslant x\leqslant x_0$，$|u-u(x)|\leqslant M$时

$$|\psi(x,u)|<L\tag{2.6}$$

无妨设$\alpha_0>u(0)$（其余情形类似处理）。按解对初值的连续性及解的唯一性定理，当$\delta_0>0$充分小时，方程（2.4）分别满足初始条件$u|_{x=x_0}=u(x_0)-\delta_0$与$u|_{x=x_0}=u(x_0)+\delta_0$的解$u_1(x)$与$u_2(x)$于$0\leqslant x\leqslant x_0$上有定义，满足

$$u_1(x)<u(x)<u_2(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant x_0),$$

并且$u_2(0)<\alpha_0$。对于任给的$\delta>0$(无妨设$\delta<X$)，显然存在$\xi_0\in(0,\delta)$，使得方程（2.4）满足初始条件$u|_{x=0}=\alpha_0$的解$u=u_3(x)$于$0\leqslant x\leqslant\xi_0$上有定义。取$\eta_0>0$充分小，使得$u(0)+\eta_0<u_2(0)$；并记（2.4）之满足$u|_{x=0}=u(0)+\eta_0$的解为$u_4(x)$。则它显然于$0\leqslant x\leqslant\xi_0$上有定义，并且

$$u_4(x)<u_2(x)<u_3(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant\xi_0).$$

根据A. Тихонов定理[8]，方程（1.1）满足初始条件$y|_{x=0}=u_i(0)$，$y'|_{x=0}=u_i'(0)$的解$y=y_i(x,\varepsilon)(i=3,4)$于$0\leqslant x\leqslant\xi_0$上有定义，并且于其上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to0}y_i(x,\varepsilon)=u_i(x)\qquad(i=3,\ 4).$$

于是由文[7]定理2（略作明显变通）知，当$\varepsilon>0$充分小时，方程（1.1）满足边界条件$y|_{x=0}=\alpha_0$，$y|_{x=\xi_0}=u_2(\xi_0)$的解$y=y_2(x,\varepsilon)$存在，并且

$$y_4(x,\varepsilon)\leqslant y_2(x,\varepsilon)\leqslant y_3(x,\varepsilon)\qquad(0\leqslant x$$

再据文[9]定理1还知，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_2'(\xi_0,\varepsilon)=u_2'(\xi_0).$$

故由Тихонов定理知，于$\xi_0\leqslant x\leqslant x_0$上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_2^{(j)}(x,\varepsilon)=u_2^{(j)}(x) \qquad (j=0,1) \tag{2.7}$$

此外，当$\varepsilon>0$充分小时，方程(1.1)满足初始条件$y|_{x=0}=u_1(0)$，$y'|_{x=0}=u_1'(0)$的解$y=y_1(x,\varepsilon)$存在于$0\leqslant x\leqslant x_0$上，并且于其上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_1^{(j)}(x,\varepsilon)=u_1^{(j)}(x) \qquad (j=0,\ 1) \tag{2.8}$$

于是，当$\varepsilon>0$充分小时，

$$y_1(x,\varepsilon)<u(x)<y_2(x,\varepsilon) \qquad (0\leqslant x\leqslant x_0).$$

并且当正数ε，δ_0充分小时，$\sup\limits_{\delta\leqslant x\leqslant x_0}(y_2(x,\varepsilon)-y_1(x,\varepsilon))$可以任意小。显而易见，$y=y_i(x,\varepsilon)$ $(i=1,\ 2)$具有"不切"性。此外，若记$y_i(x_0,\varepsilon)-u(x_0)=\beta_i(\varepsilon)$ $(i=1,\ 2)$，则由(2.6)～(2.8)式知，当$\varepsilon>0$充分小时，

$$\frac{\delta_0}{2}<-\beta_1,\beta_2<2\delta_0,\ |y_i'(x_0,\varepsilon)-u'(x_0)|\leqslant 2L \quad (i=1,\ 2) \tag{2.9}$$

据$u(x)$的光滑性，由条件H_3，H_4可得

$$|u''(x)|\leqslant \frac{A}{k}\exp[-\sigma x]+\frac{A}{k}|u'(x)|\exp[-\sigma x] \qquad (x_0\leqslant x<\infty).$$

从而不难估出

$$|u'(x)|\leqslant|u'(x_0)|\exp\left[\frac{A}{k}\int_{x_0}^{x}\exp(-\sigma t)dt\right]$$
$$+\frac{A}{k}\int_{x_0}^{x}\exp[-\sigma s]\exp\left[\frac{A}{k}\int_{s}^{x}\exp[-\sigma t]dt\right]ds \quad (x_0\leqslant x<\infty).$$

故存在$N>0$，使得

$$|u''(x)|<N\exp[-\sigma x] \qquad (x_0\leqslant x<\infty) \tag{2.10}$$

令 $$\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)=u(x)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2-4\varepsilon l}}\{[M_1+\lambda_2\beta_2-(\lambda_2+\sigma)N_\varepsilon\exp[-\sigma x_0]]\exp[\lambda_1(x-x_0)]$$
$$-[M_1+\lambda_1\beta_2-(\lambda_1+\sigma)N_\varepsilon\exp[-\sigma x_0]]\exp[\lambda_2(x-x_0)\}$$
$$+N_\varepsilon\exp[-\sigma x] \qquad (x_0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x)=u(x)-\frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2-4\varepsilon l}}\{[M_1-\lambda_2\beta_1-(\lambda_2+\sigma)N_\varepsilon\exp[-\sigma x_0]]\exp[\lambda_1(x-x_0)]$$
$$-[M_1-\lambda_1\beta_1-(\lambda_1+\sigma)N_\varepsilon\exp[-\sigma x_0]]\exp[\lambda_2(x-x_0)]\}$$
$$-N_\varepsilon\exp[-\sigma x] \qquad (x_0\leqslant x<\infty).$$

其中$\lambda_{1,2}=\dfrac{-k\mp\sqrt{k^2-4\varepsilon l}}{2\varepsilon}$，$N_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon N}{k\sigma-l-\varepsilon\sigma^2}$，常数$M_1>2\max\left\{\dfrac{l\delta_0}{k},\ L\right\}$。则由(2.5)，(2.9)式及

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lambda_1+\frac{k}{\varepsilon}\right)=\frac{l}{k},\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_2=-\frac{l}{k}$$

可知，对于固定的充分小的δ [illegible] 当$\varepsilon>0$充分小时，

$$(x_0\leqslant x<\infty),$$

$$\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)<u'(x)<\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x) \qquad (x_0<x<\infty),$$

从而

$$f(x,\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x),\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x))=\int_0^1 f_z(x,\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x),u'(x)+\theta(\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)-u'(x)))d\theta$$

$$\cdot(\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)-u'(x))+\int_0^1 f_y(x,u(x)+\theta(\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)-u(x)),u'(x))d\theta$$

$$\cdot(\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)-u(x))>-k(\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)-u'(x))-l(\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)-u(x))$$

$$-\varepsilon N\exp[-\sigma x]+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\bar{\omega}''_{1,\varepsilon}(x) \qquad (x_0<x<\infty),$$

$$f(x,\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x),\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x))<-k(\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)-u'(x))-l(\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x)-u(x))$$

$$+\varepsilon N\exp[-\sigma x]+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\underline{\omega}''_{1,\varepsilon}(x) \qquad (x_0<x<\infty);$$

此外，

$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)=y_1(x_0,\varepsilon),\ \underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0+0)>y'_1(x_0-0,\varepsilon),$$

$$\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)=y_2(x_0,\varepsilon),\ \bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0+0)<y'_2(x_0-0,\varepsilon),$$

$$y_1(0,\varepsilon)\leqslant\alpha_0\leqslant y_2(0,\varepsilon),\ \underline{\omega}_{1,\varepsilon}(\infty)=\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(\infty).$$

于是函数

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=\begin{cases}y_1(x,\varepsilon), & (0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x), & (x_0\leqslant x<\infty),\end{cases}$$

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=\begin{cases}y_2(x,\varepsilon), & (0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x), & (x_0\leqslant x<\infty)\end{cases}$$

满足引理1所要求的全部条件．从而当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2$_0$)存在解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x) \qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{2.11}$$

据此立见(2.2)式成立。

下面证明(2.3)式成立．容易看出，当$\varepsilon>0$充分小时，$v(x,\varepsilon)=y'(x,\varepsilon)-u'(x)$满足方程

$$\varepsilon v'=p(x,\varepsilon)v+q(x,\varepsilon) \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

其中，

$$p(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_z(x,y(x,\varepsilon),u'(x)+\theta v(x,\varepsilon))d\theta,$$

$$q(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_y(x,u(x)+\theta(y(x,\varepsilon)-u(x)),\ u'(x))d\theta$$

$$\cdot(y(x,\varepsilon)-u(x))-\varepsilon u''(x).$$

无妨设(2.2)式于$\delta/2\leqslant x<\infty$上一致地成立．则不难证明在$\delta/2\leqslant x<\infty$上一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}q(x,\varepsilon)=0 \tag{2.12}$$

由(2.11)式及$u(x)$的光滑性易见，存在$c>0$，对每一充分小的$\varepsilon>0$，恒有$x_\varepsilon\in(\delta/2,3\delta/4)$，使得$|v(x,\varepsilon)|\leqslant c/\delta$．再依条件$H_3$便得

$$|v(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{c}{\delta}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-x_\varepsilon)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_\varepsilon}^x|q(t,\varepsilon)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt$$

$$(x_\varepsilon\leqslant x<\infty).$$

据此及 (2.12) 式立见 (2.3) 式成立。定理证完。

若再假设

H_6：于$0\leqslant x<\infty$，$|y-u(x)|\leqslant M$上恒有

$$f_y(x,y,u'(x))>0;$$

或者将条件H_4更之为

$\tilde{H}_4$：存在l，$A>0$，以及$\sigma>l/k$，使得

$$|f_y(x,y,u'(x))|\leqslant l \quad (0\leqslant x<\infty,|y-u(x)|\leqslant M),$$

$$|f_x(x,u(x),u'(x))|+|f_y(x,u(x),u'(x)|\leqslant A\exp[-\sigma x] \quad (0\leqslant x<\infty),$$

则还将获得边值问题(1.1)、(1.2$_0$)之解的渐近估计式。

定理2 假设条件$H_1\sim H_5$成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2$_0$)有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant|\alpha_0-u(0)|\exp[-c_1x]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_2\varepsilon \quad (0\leqslant x<\infty) \tag{2.13}$$

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c_3}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_4\varepsilon \quad (\varepsilon\leqslant x<\infty) \tag{2.14}$$

其中c_i $(i=1,2,3,4)$ 为正的常数。

证明 按定理1的证明知，存在$R>0$，使得

$$|u''(x)|<R \quad (0\leqslant x<\infty).$$

选取$x_0\geqslant X$，使得 (2.5) 式成立。根据条件H_2，H_6，存在$l_1>0$，使得当$0\leqslant x\leqslant x_0$，$|y-u(x)|\leqslant M$时，

$$f_y(x,y,u'(x))>l_1.$$

并且

$$\frac{N}{k\sigma-l}\exp[-\sigma x_0]<\frac{R}{2l_1} \tag{2.15}$$

令

$$\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)=u(x)+|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]+\frac{R\varepsilon}{l_1} \quad (0\leqslant x\leqslant x_0),$$

$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x)=u(x)-|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]-\frac{R\varepsilon}{l_1} \quad (0\leqslant x\leqslant x_0).$$

其中 $\lambda=\dfrac{-k-\sqrt{k^2+4\varepsilon l_1}}{2\varepsilon}$。则当$\varepsilon>0$充分小时，

$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x)<u(x)<\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x) \quad (0\leqslant x\leqslant x_0),$$

$$\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)\leqslant u'(x)\leqslant\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x) \quad (0\leqslant x<x_0);$$

从而

$$f(x,\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x),\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x))>-k(\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x)-u'(x))+l_1(\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)-u(x))$$
$$-\varepsilon R+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\bar{\omega}''_{1,\varepsilon}(x) \quad (0\leqslant x<x_0);$$

同理，

$$f(x,\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x),\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x))<\varepsilon\underline{\omega}''_{1,\varepsilon}(x) \quad (0\leqslant x<x_0),$$

此外，显而易见$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(0)<\alpha_0<\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(0)$，记

$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)-u(x_0)=\beta_1(\varepsilon),\quad \bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)-u(x_0)=\beta_2(\varepsilon) \tag{2.16}$$

则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_2(\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{R}{l_1} \tag{2.17}$$

不言而喻，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0-0)-u'(x_0))=\lim_{\varepsilon\to 0}(\bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0-0)-u'(x_0))=0 \tag{2.18}$$

并且，(2.10)式成立。

今按与定理 1 中构造$\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x)$，$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x)$完全相同的形式依次作出函数$\bar{\omega}_{2,\varepsilon}(x)$，$\underline{\omega}_{2,\varepsilon}(x)$ $(x_0\leqslant x<\infty)$；而其中的记号，除β_1，β_2的意义如（2.16）式以及正的常数$M_1<kR/4l_1$之外，余者一概如定理 1 的证明中所述。于是，注意(2.5)，(2.15)，(2.17)，(2.18)式，仿定理 1 便不难证明当$\varepsilon>0$充分小时，$\bar{\omega}_{2,\varepsilon}(x)$，$\underline{\omega}_{2,\varepsilon}(x)$分别是方程（1.1）于$[x_0,\infty)$上的严格上、下解，并且

$$\underline{\omega}_{2,\varepsilon}(x)<u(x)<\bar{\omega}_{2,\varepsilon}(x)\qquad (x_0\leqslant x<\infty),$$
$$\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)=\underline{\omega}_{2,\varepsilon}(x_0),\quad \underline{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0-0)<\underline{\omega}'_{2,\varepsilon}(x_0+0),$$
$$\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x_0)=\bar{\omega}_{2,\varepsilon}(x_0),\quad \bar{\omega}'_{1,\varepsilon}(x_0-0)>\bar{\omega}'_{2,\varepsilon}(x_0+0).$$

记

$$\underline{\omega}_{\varepsilon}(x)=\begin{cases}\underline{\omega}_{1,\varepsilon}(x), & (0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \underline{\omega}_{2,\varepsilon}(x), & (x_0\leqslant x<\infty),\end{cases}$$

$$\bar{\omega}_{\varepsilon}(x)=\begin{cases}\bar{\omega}_{1,\varepsilon}(x), & (0\leqslant x\leqslant x_0),\\ \bar{\omega}_{2,\varepsilon}(x), & (x_0\leqslant x<\infty).\end{cases}$$

则由引理 1 立见，当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2_0)存在解$y=y(x,\varepsilon)$满足

$$\underline{\omega}_{\varepsilon}(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_{\varepsilon}(x)\quad (0\leqslant x<\infty).$$

据此易见（2.13）式成立。

今往证（2.14）式成立。事实上，由H_2，H_4及$u(x)$的光滑性知，存在$D>0$，使得

$$|f_y(x,y,u'(x))|\leqslant D\quad (0\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant M).$$

此外，仿定理 1 的证明，存在$c>0$，对每一充分小的$\varepsilon>0$，恒有$x_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$，使得$|y'(x_\varepsilon,\varepsilon)-u'(x_\varepsilon)|\leqslant c/\varepsilon$。于是

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-x_\varepsilon)\right]$$
$$+\frac{D}{\varepsilon}|a_0-u(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp[-c_1t]dt$$
$$+(c_2D+R)\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt\qquad (x_\varepsilon\leqslant x<\infty).$$

故（2.14）式成立。定理证完。

定理3　假设条件$H_1\sim H_3$，$\tilde{H}_4$成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2_0)有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant|a_0-u(0)|\exp[c_1x]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]$$
$$+c_2\varepsilon\exp[-\sigma x]\qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{2.19}$$

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c_3}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_4\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]+c_5\varepsilon$$
$$(\varepsilon\leqslant x<\infty) \qquad (2.20)$$

其中 c_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 为正的常数。

证明 根据假设，按 (2.10) 式的证明知，存在$N>0$，使得

$$|u''(x)|<N\exp[-\sigma x] \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]+N_\varepsilon\exp[-\sigma x] \qquad (0\leqslant x<\infty),$$
$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]-N_\varepsilon\exp[-\sigma x] \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

其中 $\lambda=\dfrac{-k-\sqrt{k^2-4\varepsilon l}}{2\varepsilon}$，$N_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon N}{k\sigma-l-\varepsilon\sigma^2}$. 由于当$\varepsilon>0$充分小时，$N_\varepsilon>0$，以及 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(\lambda+\dfrac{k}{\varepsilon}\right)=\dfrac{l}{k}$，根据引理 1 便不难证明当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)、(1.2$_0$)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且满足 (2.19) 式. 据此，仿 (2.14) 式的证明便知，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-x_\varepsilon)\right]$$
$$+\frac{l|\alpha_0-u(0)|}{\varepsilon}\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp[c_1t]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}t\right]\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}(x-t)\right]dt$$
$$+(c_2l+N)\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp[-\sigma t]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt \qquad (x_\varepsilon\leqslant x<\infty).$$

其中 $x_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$；$c>0$为常数. 从而 (2.20) 式成立. 定理证完.

下面来讨论边值问题(1.1)、(1.2$_1$). 以下将条件 H_2中$|u(0)-\alpha_0|<M$ 这一限制条件去掉. 并仍以H_2记之.

引理2 假设条件 H_1, H_2 成立. 若存在方程 (1.1) 于$[0, \infty)$上的上解 $\bar{\omega}_\varepsilon(x)$与下解 $\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，使得

$$-M\leqslant\underline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)\leqslant0\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)\leqslant M \quad (0\leqslant x<\infty),$$
$$\bar{\omega}'_\varepsilon(0)\leqslant\alpha_1\leqslant\underline{\omega}'_\varepsilon(0),\ \underline{\omega}_\varepsilon(\infty)=\bar{\omega}_\varepsilon(\infty),$$

则边值问题(1.1)、(1.2$_1$)有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x) \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

证明 记

$$\mathscr{D}=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x<\infty,\ -\infty<y,\ z<\infty\}.$$

对于$(x,y,z)\in\mathscr{D}$，定义

$$F(x,y,z)=\begin{cases}f(x,u(x)+M,z), & (y>u(x)+M),\\ f(x,y,z), & (|y-u(x)|\leqslant M),\\ f(x,u(x)-M,z), & (y<u(x)-M).\end{cases}$$

则$F(x,y,z)$为定义于 $\mathscr{D}$ 上的连续函数. 根据文[10]定理 5 并借助适当变换容易证明，对任一自然数n，边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=F(x,y,y')\\ y'(0)=\alpha_1,\ y(n)=u(n)\end{cases}$$

存在解$y=y_n(x,\varepsilon)$，满足不等式

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y_n(x,\varepsilon)\leqslant\overline{\omega}_\varepsilon(x)\quad(0\leqslant x\leqslant n)$$

从而由F的定义立见，$y=y_n(x,\varepsilon)$为边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y'),\\ y'(0)=\alpha_1,\ y(n)=u(n)\end{cases}$$

的解．显然，$\{y_n(0,\varepsilon)\}$存在收敛子序列，记其极限为ζ_ε．于是，仿引理1的证明便知，方程(1.1)之满足初始条件$y(0,\varepsilon)=\zeta_\varepsilon$，$y'(0,\varepsilon)=\alpha_1$的解$y=y(x,\varepsilon)$即为边值问题(1.1)、$(1.2_1)$之满足所要求的不等式的解．

定理4 假设条件$H_1\sim H_3$，$\bar{H}_4$成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、(1.2_1)有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{k}|\alpha_1-u'(0)|\exp[c_1x]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_2\varepsilon\exp[-\sigma x]\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{2.21}$$

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant|\alpha_1-u'(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_3\varepsilon\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{2.22}$$

其中 $c_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 为正的常数．

证明 令

$$\overline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-\frac{1}{\lambda}|\alpha_1-u'(0)|\exp[\lambda x]+N_\varepsilon\exp[-\sigma x]\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+\frac{1}{\lambda}|\alpha_1-u'(0)|\exp[\lambda x]-N_\varepsilon\exp[-\sigma x]\quad(0\leqslant x<\infty).$$

其中λ，N_ε的意义均如定理3证明中所述．不难验证当$\varepsilon>0$充分小时，$\overline{\omega}_\varepsilon(x)$，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$满足引理2所要求的全部条件．从而，边值问题(1.1)、(1.2_1)存在满足不等式(2.21)的解$y=y(x,\varepsilon)$．

容易看出，当$\varepsilon>0$充分小时，

$$\begin{aligned}|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant&|\alpha_1-u'(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\\&+\frac{2l}{k}|\alpha_1-u'(0)|\int_0^x\exp[c_1t]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}t\right]\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}(x-t)\right]dt\\&+\int_0^x(c_2l\exp[-\sigma t]+|u''(t)|)\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt\quad(0\leqslant t<\infty).\end{aligned}$$

据此易见(2.22)式成立．证毕．

三、具有定常退化解的情形

本节就边值问题(1.1)、$(1.2_i)(i=0,\ 1)$的退化问题(1.3)、(1.4)具有定常解（无妨设其为零解——此时，自然$\beta=0$）的特殊情形作进一步讨论．即考虑边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y') & (1.1)\\ y^{(i)}(0)=\alpha_i,\ y(\infty)=0 & (1.2_i)'\end{cases}$$

当$\varepsilon=0$时，上述边值问题退化为

$$\begin{cases}0=f(x,u,u') & (1.3)\\ u(\infty)=0 & (1.4)'\end{cases}$$

今以$H_j'(j=1,\ 2,\ 3)$表示如下条件：

H_1'：$f(x,y,z)$在区域

$$\Omega'=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x<\infty,\ |y|\leqslant B,\ |z|<\infty\}$$

上连续可微（其中$B>0$为常数，且对于边值问题(1.1)、$(1.2_0)'$而言，$B\geqslant|\alpha_0|$），并且满足Nagumo条件.

H_2'：存在$k>0$，使得

$$f_z(x,y,z)\leqslant -k,\ (x,y,z)\in\Omega'.$$

H_3'：$f(x,0,0)\equiv 0\qquad (0\leqslant x<\infty)$.

条件H_3'表明，退化问题(1.3)，(1.4)′有解$u\equiv 0(0\leqslant x<\infty)$(再由$H_1'$，$H_2'$可知此零解是唯一的).

引理3 假设条件H_1'，H_3'成立．若存在方程(1.1)于$[0,\ \infty)$上的上解$\bar{\omega}_\varepsilon(x)$与下解$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，使得

$$-B\leqslant\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant 0\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant B\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(0)\leqslant\alpha_0\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(0),\ \ \bar{\omega}_\varepsilon(\infty)=\underline{\omega}_\varepsilon(\infty),$$

则边值问题(1.1)、$(1.2_0)'$有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty).$$

证明 根据引理1的证明，并将文[11]定理7.3的证明略加变通便不难完成本引理的证明.

定理5 假设条件$H_1'\sim H_3'$成立．若

$$f_y(x,y,0)\geqslant 0\qquad(0\leqslant x<\infty,\ |y|\leqslant B),$$

则对任一$\varepsilon>0$，边值问题(1.1)、$(1.2_0)'$恒有解$y=y(x,\varepsilon)$，满足

$$|y(x,\varepsilon)|\leqslant|\alpha_0|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\qquad(0\leqslant x<\infty);$$

若还假定$f_y(x,y,0)$于$0\leqslant x<\infty$，$|y|\leqslant B$内上方有界，则

$$|y'(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{c_1}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_2\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]\qquad(\varepsilon\leqslant x<\infty).$$

其中 $c_i(i=1,\ 2)$为正的常数.

证明 令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=|\alpha_0|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\qquad(0\leqslant x<\infty)$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=-|\alpha_0|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

则根据引理3并仿(2.20)式的证明便得所证.

定理6 假设条件$H_1'\sim H_3'$成立．若

$$f_y(x,y,0)\geqslant 0\qquad(0\leqslant x<\infty,\ |y|\leqslant B),$$

则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、$(1.2_1)'$有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{\varepsilon}{k}|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{3.1}$$

若还假定$f_y(x,y,0)$于$0\leqslant x<\infty$，$|y|\leqslant B$内上方有界，则

$$|y'(x,\varepsilon)|\leqslant|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c\varepsilon\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty)\qquad(3.2)$$

其中$c>0$为某常数。

证明 令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{k}|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=-\frac{\varepsilon}{k}|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty),$$

则根据引理 2 便知，当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、$(1.2_1)'$有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且(3.1)式成立。此外，当$\varepsilon>0$充分小时，显然有

$$|y'(x,\varepsilon)|\leqslant|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+E\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]\int_0^x\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}t\right]dt$$
$$(0\leqslant x<\infty).$$

其中 $E>0$为某常数。于是，(3.2)式成立。定理证完。

仔细分析定理 3（据引理 3）以及定理 4 的证明便不难分别得到这两条定理之如下的

推论1 假设条件$H_1'\sim H_3'$成立。若$f_y(x,y,0)$于$0\leqslant x<\infty$，$|y|\leqslant M$上有界，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、$(1.2_0)'$有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)|\leqslant|\alpha_0|\exp[c_1x]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$|y'(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{c_2}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_3\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty).$$

其中$c_i(i=1,2,3)$为正的常数。

推论2 在推论 1 的假设条件下，当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)、$(1.2_1)'$有解$y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{k}|\alpha_1|\exp[c_1x]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$|y'(x,\varepsilon)|\leqslant|\alpha_1|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_2\varepsilon\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]\quad(0\leqslant x<\infty).$$

其中$c_i(i=1,2)$为正的常数。

参 考 文 献

[1] 伍卓群，一类常微分方程边值问题的奇摄动——(Ⅰ)方程式的情形，吉林大学自然科学学报，(2)(1963)，91—104.

[2] 周钦德，一类常微分方程奇摄动问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，(4)(1979)，1—19.

[3] 周钦德，一类奇摄动边值问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，(4)(1980)，12—26.

[4] 周钦德，一类奇摄动边值问题近似常数解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，(2)(1981)，12—22.

[5] 周钦德，某类奇摄动边值问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，(3)(1981)，37—50

[6] 赵为礼，一类常微分方程无穷边值问题的奇摄动，吉林大学自然科学学报，(3)(1981)，27—36.

[7] Nagumo, M., Über die differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, *Proc. Phys. Math.*

Soc. Japan, 19, Ser 3(10) (1937), 861—866.

[8] Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных, *Мат. Сб.* 31(73)(1952), 574—586.

[9] Бриш Н. И., О краевых задалах для уравнения $\varepsilon y''=f(x,y,y')$ при малых ε, *ДАН СССР*, XCV, (3)(1954), 429—432.

[10] Klaasen, G. A., Differential inequalities and existence theorems for second and third order boundary value problems, *J. Diff. Eqs.*, 10 (1971), 529—537.

[11] Jackson, L. K., Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, *Adv. Math.*, 2 (1968), 307—363.

[12] 赵为礼，二阶非线性无穷边值问题的奇摄动(Ⅰ)，应用数学和力学，10(1) (1989), 43—50.

Singular Perturbation of Boundary Value Problems for Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations on Infinite Interval (Ⅱ)

Zhao Wei-li

(Department of Mathematics, Jilin University, Changchun)

Abstract

In this paper the existence of solutions of the singularly perturbed boundary value problems on infinite interval for the second order nonlinear equation containing a small parameter $\varepsilon>0$:

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y')\\ y^{(i)}(0)=a_i,\ y(\infty)=\beta\end{cases}$$

is examined, where a_i, β are constants, and $i=0, 1$. Moreover asymptotic estimates of the solutions for the above problems are given.

Key words singular perturbations, nonlinear, boundary value problems on infinite interval, existence of solutions, asymptotic estimates