应用数学和力学，第12卷第11期（1991年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义H-空间的理论及其应用*

车 素 兵

（徐州师院数学系，1990年5月30日收到）

摘 要

本文给出了广义H-空间的完备性特征性质和紧性特征性质，同时也研究了这一空间的度量化定理．作为这些理论的应用，我们得到了 Menger 概率度量空间的完备性特征和紧性特征，给出了该空间的度量化函数的具体形式．

关键词 一致空间 H-空间 概率度量空间 度量化．

一、引 言

本文中，以R表示一切实数的集合，即 $R=(-\infty, +\infty)$，R^+ 表示一切非负实数的集合，即$R^+=[0, +\infty)$，$\mathscr{D}$表示一切分布函数的集合([3])，并令

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0);\\ 0 & (t\leqslant 0).\end{cases}$$

设E是一非空的抽象集合，映射F：$E\times E\to\mathscr{D}$称为是 E 上的对称伪概率度量（简称为SPM，记$F(x, y)=F_{x,y}$，而$F_{x,y}(t)$表示分布函数在 $t\in R$ 处的值)，如果满足下列条件：

(SPM-1) $F_{x,y}(0)=0$，当$x=y$时，$F_{x,y}(t)=H(t)$ ($\forall t\in R$；$\forall x,y\in E$)，

(SPM-2) $F_{x,y}=F_{y,x}$ ($\forall x,y\in E$)

设I是一指标集，令

$$\mathscr{F}=\{F^\alpha | F^\alpha\text{是}E\text{上的SPM}，\alpha\in I\}.$$

本文以下处处假定$\mathscr{F}$满足以下三个条件：

(UF1) $\forall x,y\in E$，若$x\neq y$，则存在$F^\alpha\in\mathscr{F}$，使得$F^\alpha_{x,y}\neq H$；

(UF2) $\forall F^\alpha,F^\beta\in\mathscr{F}$，存在$F^\gamma\in\mathscr{F}$，使得$\forall t\in R$，$\forall x,y\in E$，成立

$$F^\gamma_{x,y}(t)\leqslant\min\{F^\alpha_{x,y}(t), F^\beta_{x,y}(t)\};$$

(UF3) $\forall F^\alpha\in\mathscr{F}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$F^\beta\in\mathscr{F}$，使得$\forall x,y, z\in E$，当

$$F^\beta_{x,y}(\delta)>1-\delta,\ F^\beta_{y,z}(\delta)>1-\delta$$

时成立$F^\alpha_{x,z}(\varepsilon)>1-\varepsilon$.

---

* 张石生推荐．徐州师院科学基金资助项目．

定义1.1 设E是一非空的集合，$\mathscr{F}$是满足(UF1)～(UF3)的E上的SPM族，称二元对$(E, \mathscr{F})$为广义H-空间。

依定义不难直接验证以下命题成立：

命题1.1 设E是一非空的抽象集合，$\mathbb{P}=\{P_\alpha | P_\alpha$是$E$上的伪度量([6])，$\alpha\in I\}$，且满足以下条件：

(UP1) $\forall P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}\in\mathbb{P}$，$\max\{P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}\}\in\mathbb{P}$；

(UP2) $\forall x,y\in E$，若$x\neq y$，则存在$P_\alpha\in\mathbb{P}$，使得$P_\alpha(x,y)>0$。

则$(E, \bar{\mathscr{F}})$是广义H-空间，其中

$$\bar{\mathscr{F}}=\{\bar{F}^\alpha | \bar{F}^\alpha_{x,y}(t)=H(t-P_\alpha(x,y)),\ t\in R\}.$$

命题1.2 若$(E, P, \varDelta)$是一几乎概率度量空间([2, 定义 1.2])，则(E, P)是广义H-空间。

注1.1 广义H-空间的概念统一和发展了文献[2, 8]中相应的概念。

注1.2 如果F是一个H-概率度量([1])，由命题1.2可知(E, F)是广义H-空间。

二、广义H-空间上的拓扑及其性质

设$(E, \mathscr{F})$是一广义H-空间，对任意的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$F^\alpha\in\mathscr{F}$，定义

$$U(\varepsilon,\lambda;\ F^\alpha)=\{(x,y)\in E\times E | F^\alpha_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\} \tag{2.1}$$

$$\mathscr{B}=\{U(\varepsilon,\lambda;\ F^\alpha) | \varepsilon>0,\ \lambda>0,\ F^\alpha\in\mathscr{F}\} \tag{2.2}$$

定理2.1 设$(E, \mathscr{F})$是广义H-空间，$\mathscr{B}$是由(2.2)式定义的集族，则以下结论成立：

(BU1) $\forall V_1, V_2\in\mathscr{B}$，$\exists V\in\mathscr{B}$，使得$V\subset V_1\cap V_2$；

(BU2) $\forall V\in\mathscr{B}$，$\exists W\in\mathscr{B}$，使得$2W\subset V$；

(BU3) $\bigcap\mathscr{B}=\{(x, x) | x\in E\}\triangleq\varDelta$。

证明 (BU1) 设$V_1=U(\varepsilon_1, \lambda_1;\ F^{\alpha_1})$，$V_2=U(\varepsilon_2, \lambda_2;\ F^{\alpha_2})$，其中$F^{\alpha_1}$，$F^{\alpha_2}\in\mathscr{F}$，由(UF2)知存在$F^\beta\in\mathscr{F}$，使得$\forall t\in R$，$\forall x, y\in E$，成立

$$F^\beta_{x,y}(t)\leqslant\min\{F^{\alpha_1}_{x,y}(t),\ F^{\alpha_2}_{x,y}(t)\} \tag{2.3}$$

令$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，$\lambda=\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$，$V=U(\varepsilon, \lambda;\ F^\beta)$，则$V\in\mathscr{B}$且$V\subset V_1\cap V_2$，事实上，$\forall(x, y)\in V$，成立

$$F^\beta_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda.$$

由(2.3)知

$$F^{\alpha_1}_{x,y}(\varepsilon_1)\geqslant F^{\alpha_1}_{x,y}(\varepsilon)\geqslant F^\beta_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\geqslant1-\lambda_1;$$

$$F^{\alpha_2}_{x,y}(\varepsilon_2)\geqslant F^{\alpha_2}_{x,y}(\varepsilon)\geqslant F^\beta_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\geqslant1-\lambda_2.$$

以上两式表明$(x, y)\in V_1\cap V_2$。故(BU1)成立。

(BU2) $\forall V\in\mathscr{B}$，设$V=U(\varepsilon, \lambda;\ F^\alpha)$，其中$F^\alpha\in\mathscr{F}$，$\varepsilon>0$，$\lambda>0$。令$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon, \lambda\}$，因$\varepsilon_0>0$，故由(UF3)知存在$\delta>0$，$F^\beta\in\mathscr{F}$，使得$\forall x,y,z\in E$，当

$$F^\beta_{x,y}(\delta)>1-\delta,\ F^\beta_{y,z}(\delta)>1-\delta$$

时成立

$$F^{\alpha}_{x,z}(\varepsilon_0)>1-\varepsilon_0 \tag{2.4}$$

取$W=U(\delta,\ \delta;\ F^{\beta})$，则$W\in\mathscr{B}$. 对任意的$(x,\ z)\in 2W$，依$2W$的定义（[6，$p522$]）知存在$y\in E$，使得$(x,\ y)\in W$，$(y,\ z)\in W$，故

$$F^{\beta}_{x,y}(\delta)>1-\delta,\ F^{\beta}_{y,z}(\delta)>1-\delta.$$

由(2.4)式知

$$F^{\alpha}_{x,z}(\varepsilon_0)>1-\varepsilon_0$$

故

$$F^{\alpha}_{x,z}(\varepsilon)\geqslant F^{\alpha}_{x,y}(\varepsilon_0)>1-\varepsilon_0\geqslant 1-\lambda$$

所以$(x,\ z)\in U(\varepsilon,\ \lambda;\ F^{\alpha})$，因此$2W\subset V$.

(BU3) 由 (SPM-1) 及$\mathscr{B}$的定义易知$\varDelta\subset\bigcap\mathscr{B}$，另一方面，$\forall(x,\ y)\in\bigcap\mathscr{B}$知 $\forall F^{\alpha}\in\mathscr{F}$，$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，都有$(x,\ y)\in U(\varepsilon,\ \lambda;\ F^{\alpha})$，故$F^{\alpha}_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda$. 令$\lambda\to 0$得$F^{\alpha}_{x,y}(\varepsilon)\geqslant 1$. 推得$F^{\alpha}_{x,y}=H$. 由(UF1)知$x=y$. 故$(x,\ y)=(x,\ x)\in\varDelta$. 综上可知$\varDelta=\bigcap\mathscr{B}$成立. 证毕.

令 $$\mathscr{U}=\{A\subset E\times E\mid\exists V\in\mathscr{B},\ 使得V\subset A\} \tag{2.5}$$

$$\mathscr{O}=\{G\subset E\mid\forall x\in G,\ \exists V\in\mathscr{B},\ 使得B(x,\ V)\subset G\} \tag{2.6}$$

其中 $B(x,\ V)=\{y\in E\mid(x,\ y)\in V\}$.

由定理2.1以及文献[6，命题8.1.4，命题8.1.1，命题8.1.20]可知以下定理成立：

定理2.2 设 $(E,\ \mathscr{F})$ 是广义H-空间，则

(i) 由(2.5)式定义的集族$\mathscr{U}$是E上的一致结构，且该一致结构的基为$\mathscr{B}$.

(ii) $\forall F^{\alpha}\in\mathscr{F}$，$F^{\alpha}$关于$\mathscr{U}$是一致的（即$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\exists V\in\mathscr{U}$，使得当$(x,y)\in V$时，$F^{\alpha}_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda$).

(iii) (2.6)式定义的集族$\mathscr{O}$是E上的拓扑，且拓扑空间 $(E,\ \mathscr{O})$ 是 Tychonoff 空间.

注2.1 由命题1.2可知文献[2，定理1.1]是定理2.2的特例.

注2.2 若 $(E,\ F;\ \varDelta)$ 是具连续t-范数的Mengex概率度量空间，在定理2.2中，取$\mathscr{F}=\{F\}$，可知定理2.2的结论(iii)包含文献[8，定理7.2]为特例.

本文以下均假定广义H-空间 $(E,\ \mathscr{F})$ 上的一致结构与拓扑结构分别由(2.5)，(2.6)式所定义，因此，一致空间，拓扑空间上的有关概念，结论当然可以在$(E,\ \mathscr{F})$上建立. 但考虑到该空间的特殊结构，我们可以建立一些更为有用的结论. 为叙述方便起见，我们引入完备一致空间的概念：

定义2.1([6]) 设$(X,\ \mathscr{U})$是一个一致空间，$\mathscr{A}$是X的一个子集族，如果$\forall V\in\mathscr{U}$，$\exists A\in\mathscr{A}$，使得$A\times A\subset V$，则称$\mathscr{A}$含有一个任意小的集合.

一致空间$(X,\ \mathscr{U})$称为完备的，如果X的任一由一致结构$\mathscr{U}$导出的拓扑所产生的闭集族L，若L具有有限交性质且含有一个任意小的集合，则$\bigcap L\neq\phi$.

依定义及 (2.5) 式可推知以下结论成立：

命题2.1 设$(E,\ \mathscr{F})$是广义H-空间，则E的子集族$\mathscr{A}$含有一个任意小的集合的充分必要条件是：$\forall F^{\alpha}\in\mathscr{F}$，$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\exists A\in\mathscr{A}$，使得$\forall x$，$y\in A$，成立$F^{\alpha}_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda$.

为了进一步寻求集族$\mathscr{A}$含有任意小集合的特征性质，我们引入：

定义2.2 设$(E,\ \mathscr{F})$是广义H-空间，$\forall A\subset E$，$\forall F^{\alpha}\in\mathscr{F}$，称

$$D_A^\alpha(t)=\sup_{s<t}\inf_{p,q\in A}F^\alpha_{p,q}(s),\ t\in R \tag{2.7}$$

为由F^α诱导出的集A的伪概率直径。若$\forall\alpha\in I$，$\sup\limits_{t>0}D_A^\alpha(t)=1$，则称$A$是概率有界集。

依定义易知：A是概率有界集的充分必要条件是$\forall\alpha\in I$，$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x,y\in A}F^\alpha_{x,y}(t)=1$。

命题2.2 设$(E,\mathscr{F})$是广义H-空间，$\mathscr{A}$是E的一个子集族，则$\mathscr{A}$含有一个任意小的集合的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\alpha\in I$，存在$A\in\mathscr{A}$，使得$D_A^\alpha(\varepsilon)>1-\lambda$。

证 充分性由命题2.1及伪概率直径的定义立得所证。

必要性：$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$F^\alpha\in\mathscr{F}$，因$\mathscr{A}$含有一个任意小的集合，故存在$A\in\mathscr{A}$，使得$\forall x,\ y\in A$，成立

$$F^\alpha_{x,y}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\frac{\lambda}{2}.$$

当然$\inf\limits_{x,y\in A}F^\alpha_{x,y}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\geqslant1-\frac{\lambda}{2}$。所以，$D_A^\alpha(\varepsilon)\geqslant\inf\limits_{x,y\in A}F^\alpha_{x,y}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\geqslant1-\frac{\lambda}{2}>1-\lambda$。证毕。

由命题2.2可知以下事实成立：

定理2.3 广义H-空间是完备的一致空间的充分必要条件是：对E的任一由(2.6)式所定义的E上的拓扑$\mathscr{O}$所产生的闭集族L，如果L具有有限交性质，而且对任意的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\alpha\in I$，存在$c\in L$，使得$D_c^\alpha(\varepsilon)>1-\lambda$，则$\bigcap L\neq\phi$。

推论2.1 设$(E,F;\Delta)$是Menger概率度量空间，Δ是连续的t-范数，则一致空间$(E,F;\Delta)$完备的充分必要条件是：对E的任一闭集族L，如果L具有有限交性质，而且对任意的$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在$c\in L$，使得$D_c(\varepsilon)>1-\lambda$，则$\bigcap L\neq\phi$。

其中$D_c(t)=\sup\limits_{s<t}\inf\limits_{p,q\in c}F_{p,q}(s)$。

由推论2.1及文献[6，定理8.3.20]可得：

推论2.2 在推论2.1的条件下，若对E的任一闭集族L，如果L具有有限交性质且$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\exists\,c\in L$，使得当$D_c(\varepsilon)>1-\lambda$时推出$\bigcap L\neq\phi$，则$(E,F;\Delta)$是完备的。

由[6，定理8.3.20，定理8.3.16]又可得下列事实：

定理2.4 广义H-空间$(E,\mathscr{F})$是紧空间的充分必要条件是：

(i) $\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$F^\alpha\in\mathscr{F}$，存在一个有限集$A\subset E$，使得$\forall x\in E$，存在$a\in A$，$F^\alpha_{x,a}(\varepsilon)>1-\lambda$；

(ii) $(E,\mathscr{F})$中的每一柯西网收敛于E中的点。

推论2.3 具有连续t-范数Δ的Menger概率度量空间$(E,F;\Delta)$是紧空间的充分必要条件是$(E,F;\Delta)$是全有界且完备的。

注2.3 因为H-空间，几乎概率度量空间都是广义H-空间的特例，由定理2.3，定理2.4我们又可以得到这两类空间上的完备性、紧性特征，限于篇幅，不再赘述。

三、度量化定理及Menger空间上的度量函数的具体形式

定理3.1 设$(E,\mathscr{F})$是广义H-空间，则$\forall F^\alpha\in\mathscr{F}$，存在$V_1^\alpha,\cdots,V_n^\alpha,\cdots\in\mathscr{U}$，满足：

$$3V^{\alpha}_{n+1}\subset V^{\alpha}_{n}\cap U\left(\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^{n+1}};\ F^{\alpha}\right)\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{3.1}$$

证 取$V^{\alpha}_{1}=U(1/4,\ 1/4;\ F^{\alpha})$，因$V^{\alpha}_{1}\in\mathscr{U}$，故存在$W_1\in\mathscr{U}$，使得$2W_1\subset V^{\alpha}_{1}$。对$W_1\in\mathscr{U}$，存在$\widetilde{W}_1\in\mathscr{U}$，使得$2\widetilde{W}_1\subset W_1$。注意到$\widetilde{W}_1\subset 2\widetilde{W}_1$，故有

$$3\widetilde{W}_1\subset W_1+W_1\subset 2W_1\subset V^{\alpha}_{1}.$$

取$V^{\alpha}_{2}=\widetilde{W}_1$，则

$$3V^{\alpha}_{2}\subset V_1\cap U\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4};\ F^{\alpha}\right)=V^{\alpha}_{1}.$$

注意到$V^{\alpha}_{2}\cap U(1/2^3,\ 1/2^3;\ F^{\alpha})\in\mathscr{U}$，在以上的证明过程中以$V^{\alpha}_{2}\cap U(1/2^3,\ 1/2^3;\ F^{\alpha})$代替$V^{\alpha}_{1}$同理可证存在$V^{\alpha}_{3}\in\mathscr{U}$，使得

$$3V^{\alpha}_{3}\subset V^{\alpha}_{2}\cap U\left(\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^3};\ F^{\alpha}\right)$$

归纳假定已定义了V^{α}_{1}，V^{α}_{2}，…，$V^{\alpha}_{n}\in\mathscr{U}$，满足条件

$$3V^{\alpha}_{i+1}\subset V^{\alpha}_{i}\cap U\left(\frac{1}{2^{i+1}},\ \frac{1}{2^{i+1}};\ F^{\alpha}\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n-1).$$

因$V^{\alpha}_{n}\cap U(1/2^{n+1},\ 1/2^{n+1};\ F^{\alpha})\in\mathscr{U}$，仿上可知存在$V^{\alpha}_{n+1}\in\mathscr{U}$，使得

$$3V^{\alpha}_{n+1}\subset V^{\alpha}_{n}\cap U\left(\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^{n+1}};\ F^{\alpha}\right).$$

如此继续下去即知$(E,\ \mathscr{F})$上存在满足(3.1)式的集序列$\{V^{\alpha}_{n}\}_{n=1}^{\infty}$。证毕。

推论3.1 设$(E,\ \mathscr{F})$是广义H-空间，$\mathscr{F}=\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$是一可数族，则存在$V^i_1$，…，$V^i_n$，…$\in\mathscr{U}$，使得以下结论成立：

$$3V^{\alpha}_{n+1}\subset V^{i}_{n}\text{且}F^{i}_{x,y}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)>1-\frac{1}{2^{n+1}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

设$(E,\ \mathscr{F})$是一广义H-空间，$\forall\alpha\in I$，V^{α}_{1}，V^{α}_{2}，…V^{α}_{n}，…为满足(3.1)式条件的集序列，令$V^{\alpha}_{0}=E\times E$，$\forall(x,\ y)\in E\times E$，定义

$$f_\alpha(x,y)=\begin{cases}0,\ (x,\ y)\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}V^{\alpha}_{n};\\ \dfrac{1}{2^n},\ n=\max\{m\,|\,(x,y)\in V^{\alpha}_{m}-V^{\alpha}_{m+1}\}\end{cases}\tag{3.2}$$

$$\rho_\alpha(x,y)=\inf\left\{\sum_{j=0}^{m}f_\alpha(x_{j-1},x_j)\,|\,x_0,x_1,\cdots,x_m\in E,x_0=x,x_m=y\right\}\tag{3.3}$$

$$\rho(x,\ y)=\sup_{\alpha\in I}\{\rho_\alpha(x,\ y)\}\tag{3.4}$$

注意到

$$V^{\alpha}_{n+1}\subset 3V^{\alpha}_{n+1}\subset V^{\alpha}_{n}\cap U\left(\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^{n+1}};\ F^{\alpha}\right)\subset V^{\alpha}_{n}\tag{3.5}$$

因此(3.2)式定义的函数是合理的，且由文献[6，定理 8.1.10] 及其该定理的证明过程可知

ρ_α是E上的伪度量且成立:

$$\frac{1}{2}f_\alpha(x, y)\leqslant\rho_\alpha(x, y)\leqslant f_\alpha(x, y)\leqslant 1 \tag{3.6}$$

综合以上的讨论可得以下命题:

定理3.2 广义H-空间$(E, \mathscr{F})$上存在一伪度量族 $\mathbb{P}=\{\rho_\alpha\}$,使得对每一自然数$n$, $\forall\alpha\in I$,成立:

$$V_n^\alpha\subset\left\{(x, y)\mid\rho_\alpha(x, y)\leqslant\frac{1}{2^n}\right\}\subset V_{n-1}^\alpha \tag{3.7}$$

其中$V_0^\alpha=E\times E$, $V_1^\alpha,\cdots,V_n^\alpha$为满足(3.1)式条件的$E$中的集序列,$V_n^\alpha\in\mathscr{U}$ $(n=1,2,\cdots)$.

定理3.3 设$(E, \mathscr{F})$是广义H-空间,则由(3.4)式定义的二元函数是E上的度量函数,且由该度量函数诱导出的E上的拓扑粗于一致结构$\mathscr{U}$诱导的E上的拓扑.

证 由定理3.3可知ρ是E上的伪度量. 只须证$\forall x, y\in E$,若$\rho(x, y)=0$,则$x=y$. 为此先证等式

$$\Delta=\bigcap_{\alpha\in I}\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n^\alpha \tag{3.8}$$

事实上,对任意的$(x, y)\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n^\alpha$,可知$\forall\alpha\in I$,任意的自然数$n$,都有$(x, y)\in V_n^\alpha$,利用(3.5)式可得$F_{x,y}^\alpha(1/2^n)>1-1/2^n$. 由$\alpha$及$n$的任意性及条件(UF1)推知$x=y$.故$(x, y)\in\Delta$. 所以$\bigcap\limits_{\alpha\in I}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n^\alpha\subset\Delta$,而且相反的包含关系是显然的. 因此(3.8)式成立.

因$\rho(x, y)=0$,故$\forall\alpha\in I$, $\rho_\alpha(x, y)=0$,假若$x\neq y$,由(3.8)式可知存在α_i,使得$(x, y)\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n^{\alpha_i}$,故$f_{\alpha_i}(x, y)>0$,由(3.6)式知$\rho_{\alpha_i}(x, y)\neq 0$. 矛盾. 所以$\rho$是$E$上的度量.

由$\rho(x, y)$之定义可得以下等式:

$$\left\{(x, y)\in E\times E:\rho(x, y)\leqslant\frac{1}{2^n}\right\}=\bigcap_{\alpha\in I}\left\{(x,y)\mid\rho_\alpha(x,y)\leqslant\frac{1}{2^n}\right\}$$

因此由(3.7)式又可推知以下关系成立:

$$\left\{(x,y)\in E\times E\mid\rho(x,y)\leqslant\frac{1}{2^n}\right\}\subset\bigcap_{\alpha\in I}V_{n-1}^\alpha.$$

所以由(3.4)式定义的度量函数诱导的拓扑粗于一致结构$\mathscr{U}$诱导的拓扑. 证毕.

令
$$\mathscr{B}_1=\left\{U\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; F^\alpha\right)\mid n=1,2,\cdots,F^\alpha\in\mathscr{F}\right\}$$

$$\mathscr{U}_1=\{A\subset E\times E\mid\exists V\in\mathscr{B}_1,\ 使得A\supset V\}.$$

类似于定理2.1的证明过程可以证明集族$\mathscr{B}_1$满足条件(BU1~BU3). 因此一致结构$\mathscr{U}_1$诱导出E上的一个拓扑,不难看出,该拓扑与(2.6)式定义的拓扑等价. 故利用文献[6,定理8.1.21]可知以下命题成立:

定理3.4 广义H-空间$(E, \mathscr{F})$是可以度量化的充分必要条件是族$\mathscr{F}$是可数的.

注3.1 由注1.1和注1.2可知定理3.4统一和发展了文献[1]和[10]中的结果.

特别地，对H-空间(E, F)，我们可在$E\times E$中取一集序列$V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots \in\mathscr{U}$，满足条件

$$V_{n+1}\subset 3V_{n+1}\subset V_n\cap U\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad n=0,1,\cdots \tag{3.9}$$

其中 $V_0=E\times E$，$U\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left\{(x,y)\in E\times E \mid F_{x,y}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)> 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right\}$，$\forall (x, y)\in E\times E$，定义

$$f(x, y)=\begin{cases} 0 & (x=y); \\ \frac{1}{2^n} & (n=\max\{m\mid (x, y)\in V_m-V_{m+1}\}) \end{cases}$$

$$d(x, y)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{m} f(x_{j-1},x_j)\mid x_0,\cdots,x_m\in E,\ x_0=x, x_m=y\right\} \tag{3.10}$$

推论3.2 设(E, F)是H-空间，d为由(3.10) 定义的E 上的二元函数，则以下结论成立：

(i) d是E上的度量函数且$\forall x, y\in E$成立

$$\frac{1}{2}f(x, y)\leqslant d(x, y)\leqslant f(x, y);$$

(ii) $\forall t>0$，$\forall x, y\in E$，若$d(x, y)<t$，则$F_{x,y}(2t)>1-2t$；

(iii) 由度量d诱导出的E上的拓扑与H-空间(E, F)上原来的拓扑等价.

证 (i)和(iii)是定理3.3和定理3.2的推论. 下证(ii)也成立. 不妨设$x\neq y$，设$f(x,y)=1/2^n$，对$t>0$，若$d(x, y)<t$，由(i)知$t>f(x,y)/2=1/2^{n+1}$，依$f(x,y)$ 的定义和(3.9)式可知$F_{x,y}(1/2^n)>1-1/2^n$，所以$F_{x,y}(2t)\geqslant F_{x,y}(1/2^n)>1-1/2^n>1-2t$. 证毕.

推论3.3 设(E, F, Δ)是Menger概率度量空间，Δ连续，d为由(3.10)定义的E上的二元函数，则推论3.2的结论仍然成立.

注3.2 推论3.2和推论3.3在更一般的情况下给出了该空间上度量函数的具体形式且讨论了该度量函数与概率度量函数的关系，利用这种关系，我们可以进一步地讨论H-空间，Menger 概率度量空间上一些更为深入的性质，限于篇幅，不再赘述. 类似的研究请有兴趣的读者参阅文献[12～13].

参 考 文 献

[1] Hicks, T. L. and P. L. Sharm, Probabilistic metric structures: topological classification, *Zbornik Radovo Prirodno-Matematičkog Fakulteta u Novom Sadu, Serija za Matematiku*, **14** (1984), 35-42.

[2] 周忠群，几乎概率度量空间，数学学报，**29**(4)(1986)，569-572.

[3] 张石生，《不动点理论及其应用》，重庆出版社 (1984).

[4] 张石生，概率度量空间中映象的不动点定理及其应用，中国科学，A辑，6 (1983)，495-504.

[5] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland (1983).

[6] Engelking, R., *General Topology*, Warszawa (1977).

[7] Menger, K., Statistical metrics, *Proc.Nat.Acad.of Sci. U. S. A.*, **23** (1942), 535-537.

[8] Schweizer, B. and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10**

(1960), 313–334.

[9] 游兆永、朱林户，科学通报，(8)(1983).

[10] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 673–675.

[11] Hicks, T. L., Fixed point theory in probabilistic metric spaces, *Zbornik Radova Prirodno-Matematičkog Fakulteta u Novom Sadu, Serija za Matematiku*, 13 (1983), 63–72.

[12] Chang Shin-sen, The metrization of probabilistic metric spaces with applications, *Zbornik Radova Prirodno-Matematičkog Fakulteta u Novom Sadu, Serija za Matematiku*, 15(1) (1985), 107–117.

[13] 张石生、车素兵，概率度量空间的度量化及不动点，数学季刊，(2) (1987), 54–60.

[14] Sehgal, V. M. and A. T. Bharucha-Reid, *Math Systems Theory*, 6(2) (1972), 97–102.

The Theory and Applications of Generalized H-Space

Che Su-bing

(*Department of Mathematics, Xuzhou Teachers College, Xuzhou*)

Abstract

This paper brings forward the concept of generalized H-spaces which extends the concepts of H-spaces and almost probabilistic metric spaces. In this paper, the uniformity and properties for generalized H-space are considered. The conditions of metrization and the form of metric functions for generalized H-spaces, H-spaces and Menger PM-spaces are given and the characteristics of completeness and compactness for generalized H-spaces are presented. The results of this paper generalize and unify some recent results of [1～2, 8, 10].

Key words uniform spaces, H-Spaces, probabilistic metric spaces, metrization