

# 非均匀Reissner板弯曲的精确元法\*

纪振义

(安徽建筑工业学院, 1989年9月16日收到)

## 摘 要

本文在阶梯折算法和精确解析法的基础上, 提出构造有限元的新方法——精确元法。该方法不用变分原理, 可适用于任意变系数正定和非正定偏微分方程。利用该方法, 得到 Reissner 板弯曲的一个非协调单元, 它具有十五个自由度。由于节点位移参数仅含有挠度和转角, 因此处理任意边界条件非常容易。文中给出证明, 位移和内力均收敛于精确解。由精确元法所得到的单元不仅用于厚板, 也可用于薄板。文末给出四个算例。算例表明, 利用本文的方法, 可获得满意的结果, 并有较高的数值精度。

**关键词** 精确元法 厚板 非协调元

## 一、引 言

计入横向剪切变形的厚板和薄板在工程中应用很广泛。对 Reissner 板弯曲的分析在工程中是非常重要的。用有限元法求解 Reissner 板弯曲时, 遇到厚薄板统一问题。当是厚板时, 转角和挠度应保持为独立变量; 而当是薄板时, 应满足 Kirchhoff 假定, 在 [1~3] 中采用节减积分的方法解决这一问题。在 [4~5] 中, 使板厚  $h \rightarrow 0$  时剪切刚度趋于  $\infty$  的方法处理了 Reissner 板。在 [6] 中用离散 Kirchhoff 约束的方法获得一个九自由度杂交单元, 可用于薄板。

一般地, 为解决厚薄板统一问题, 单元内的挠度  $w$  至少为三次式, 并且当板厚  $h \rightarrow 0$  时应满足 Kirchhoff 假定; 与  $w$  无关的转角至少为一次式。用常规的方法, 上述条件很难满足。即使满足, 所得到的单元位移参数将包含  $w$  的导数<sup>[7]</sup>, 在边界上很难确定, 使用起来不方便。本文在阶梯折算法<sup>[8]</sup>和精确解析法<sup>[9]</sup>的基础上提出精确元法, 成功地解决了这一问题。该方法不用变分原理, 直接从偏微分方程出发推导单元的刚度矩阵, 适用于一切变系数正定和非正定偏微分方程。利用这个方法, 我们得到了一个十五自由度的三角形 Reissner 板单元。它的节点位移参数仅为挠度和转角, 边界条件容易处理, 并可用于薄板和厚板。该方法与一般有限元法相比, 给出单刚矩阵时, 不需要在单元上进行面积分, 位移和内力在单元节点上具有较好的数值精度。

文末给出算例, 算例表明利用本文的方法, 内力和位移均可获得满意的结果。

\*叶开沅推荐。

## 二、十五自由度Reissner板单元

对一个厚度为 $h(x,y)$ , 弹性模量为 $E(x,y)$ , 泊松比为 $\nu(x,y)$ 的非均匀弹性 Reissner 板, 从[10]我们可得它的平衡方程为

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + F_{\alpha} = 0, \quad Q_{\alpha,\alpha} + q + F_3 = 0 \quad (\text{在}\Omega\text{上}) \quad (2.1)$$

内力与位移的关系为

$$M_{\alpha\beta} = -D(x,y) \frac{1-\nu(x,y)}{2} \left( \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu(x,y)}{1-\nu(x,y)} \psi_{r,r} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu(x,y)}{1-\nu(x,y)} \frac{q(x,y)}{\lambda^2(x,y)} \delta_{\alpha\beta}, \quad Q_{\alpha,\alpha} = C(x,y)(w_{,\alpha} - \psi_{\alpha}) \quad (2.2)$$

式中  $M_{\alpha\beta}$  为弯矩或扭矩;  $Q_{\alpha}$  为横向剪力;  $D(x,y)$  为弯曲刚度, 等于  $Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $C(x,y)$  为剪切刚度, 等于  $5Eh/12(1+\nu)$ ;  $\lambda(x,y)$  为 Reissner 板的特征值, 等于  $\sqrt{10}/h(x,y)$ ;  $w$  为板的挠度;  $\psi_{\alpha}$  为转角;  $F_{\alpha}$  和  $F_3$  为体积力分量;  $q(x,y)$  为分布载荷; 下标  $\alpha$  或  $\beta$  等于 1 和 2, 对应于下标  $x$  和  $y$ ;  $\Omega$  为板的平面空间。

我们把板分成  $N$  个三角形单元, 设第  $e$  个单元所占的空间为  $\Omega_e$ , 利用本文的方法, 方程 (2.2) 可转化为

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= -D_e \frac{1-\nu_e}{2} \left( \psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu_e}{1-\nu_e} \psi_{r,r} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu_e}{1-\nu_e} \frac{q_e}{\lambda_e^2} \delta_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha} &= C_e(w_{,\alpha} - \psi_{\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{在}\Omega_e\text{上}) \quad (2.3)$$

式中带有下标  $e$  的函数  $(\dots)_e$  等于  $(\dots)|_{\substack{x=\bar{x}_e \\ y=\bar{y}_e}}$ , 这里  $\bar{x}_e$  和  $\bar{y}_e$  是三角形单元的形心坐标, 同理,

(2.1) 可转化为

$$\left. \begin{aligned} D_e \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_e}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu_e}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + C_e \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) &= (F_x)_e \\ D_e \left( \frac{1+\nu_e}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu_e}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) + C_e \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) &= (F_y)_e \\ C_e \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) &= q_e + (F_3)_e = \bar{q}_e \end{aligned} \right\} \quad (\text{在}\Omega_e\text{上}) \quad (2.4)$$

利用精确元法, 我们构造一个三角形单元, 它的节点位置, 节点位移和内力参数如图 1 所示。每边上的三个节点均位于高斯积分点上。

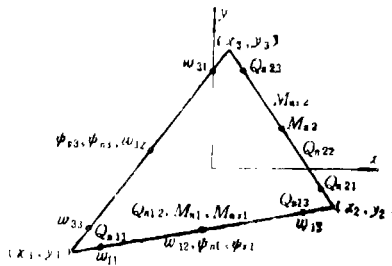


图 1 三角形 Reissner 板单元

我们不难得到满足于方程(2.4)的解为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2-2D/C & xy & y^2-2D/C & x^3 & x^2y+xy^2 & y^3 & xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2+6\frac{D}{C} & 2xy+y^2+\frac{2D}{C} & 0 & y^2+2\frac{D}{C} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 2xy+x^2+\frac{2D}{C} & 3y^2+\frac{6D}{C} & 2xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sh}\lambda y & \text{ch}\lambda y & 0 & 0 & \lambda x \text{ch}\lambda y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sh}\lambda x & \text{ch}\lambda x & -\text{sh}\lambda y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{C\} + \bar{q} \cdot \begin{Bmatrix} (x^2+y^2)(x^2+y^2-16D/C)/64D \\ x(x^2+y^2)/16D \\ y(x^2+y^2)/16D \end{Bmatrix} \\ &= [\phi(x,y)]\{C\} + \{P(x,y)\} \\ \{C\} &= \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_{15}\}^T \end{aligned} \tag{2.5}$$

为方便起见, 这里已假定 $F_x$ 和 $F_y$ 等于零;  $C, D$ 和 $\lambda$ 分别表示 $C_e, D_e$ 和 $\lambda_e$ ;  $x$ 和 $y$ 是以单元形心为原点的局部坐标. 可以证明, 利用(2.5)作位移的插值函数, 当内节点的位移和内力参数在单元之间连续, 外节点的位移和内力参数满足给定的边界条件时, 本文所得到的解收敛于精确解. 我们定义

$$\{\delta_1\} = \{w_{11} \ w_{12} \ w_{13} \ \psi_{x1} \ \psi_{y1} \ \dots \ w_{31} \ w_{32} \ w_{33} \ \psi_{x3} \ \psi_{y3}\}^T \tag{2.6}$$

代入已知节点坐标, 利用(2.5)可得

$$\{\delta_1\} = [\phi_0]\{C\} + \{P_0\}$$

从而可求得

$$\{C\} = [\phi_0]^{-1}\{\delta_1\} - [\phi_0]^{-1}\{P_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)][\phi_0]^{-1}\{\delta_1\} - [\phi(x,y)][\phi_0]^{-1}\{P_0\} + \{P(x,y)\} \tag{2.7}$$

从(2.3)和(2.5), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \{F\} &= \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6D & -2D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2D & -6D \\ 0 & 0 & 0 & -2D & 0 & -2\nu D & -6xD & -2D(y+\nu x) & -6D\nu y \\ 0 & 0 & 0 & -2\nu D & 0 & -2D & -6xD\nu & -2D(x+\nu y) & -6D\nu x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D(1-\nu) & 0 & 0 & -2(1-\nu)(x+y) & 0 \\ -2D & -C\text{sh}\lambda y & -C\text{ch}\lambda y & -C\text{sh}\lambda x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2D\nu x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2Dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2D(1-\nu)y & -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda\text{ch}\lambda y & -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda\text{sh}\lambda y & -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda\text{ch}\lambda x & -C\text{ch}\lambda x & -C\lambda x\text{ch}\lambda y & C\text{sh}\lambda y & -D\lambda(1-\nu)\text{ch}\lambda y & D\lambda(1-\nu)\text{ch}\lambda y \\ 0 & C\text{sh}\lambda y & -D\lambda(1-\nu)\text{ch}\lambda y & D\lambda(1-\nu)\text{ch}\lambda y & -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda\text{sh}\lambda x & -\frac{1}{2}(1-\nu)D\lambda^2 x\text{sh}\lambda y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{C\} \\ &+ \begin{Bmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ -[(y^2+3x^2)+\nu(x^2+3y^2)]/16 \\ -[x^2+3y^2+\nu(y^2+3x^2)]/16 \\ -(1-\nu)xy/8 \end{Bmatrix} + (1-\nu)\lambda^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [Q]\{C\} + \{f\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

因为

$$\begin{Bmatrix} \psi_n \\ \psi_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} \{\delta_i\} &= [\theta] \{\delta\} \\ \{\delta\} &= \{w_{11} \ w_{12} \ w_{13} \ \psi_{n1} \ \psi_{s1} \ \dots \ w_{31} \ w_{32} \ w_{33} \ \dot{\psi}_{n3} \ \psi_{s3}\}^T \\ [\theta] &= \begin{bmatrix} [\theta_1] & & 0 \\ & [\theta_2] & \\ 0 & & [\theta_3] \end{bmatrix} \quad [\theta_i] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里 $\theta_i$ 表示在第 $i$ 个边上, 外法线与 $x$ 轴的夹角. 此外在单元的边界上

$$\begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \{F\} \quad (2.10)$$

我们通过(2.8~2.10), 即可得

$$\{F_n\} = [K_e] \{\delta\} - \{R_e\} \quad (2.11)$$

式中矢量

$$\{F_n\} = \{\alpha_{11}Q_{n1} \ \alpha_{12}Q_{n12} \ \alpha_{13}Q_{n13} \ -\alpha_{13}M_{n1} \ -\alpha_{13}M_{ns1} \ \dots \ -\alpha_{33}M_{ns3}\}^T$$

记号

$$\alpha_{11} = \frac{5}{18}l_i, \quad \alpha_{12} = \frac{4}{9}l_i, \quad \alpha_{13} = l_i$$

$l_i$ 为单元第 $i$ 个边的边长,  $[K_e]$ 和 $\{R_e\}$ 分别是单元的刚度矩阵和节点载荷向量. 不难证明总刚度矩阵是一个与正定对称矩阵相差一个小量的非对称阵, 它可以由全带宽高斯消去法或波前法<sup>[11]</sup>进行求解.

当板厚 $h \rightarrow 0$ 时, (2.5)和(2.8)中的 $\text{sh}\lambda y$ ,  $\text{ch}\lambda y$ ,  $\text{sh}\lambda x$ 和 $\text{ch}\lambda x$ 将趋于无穷, 使得单元刚度矩阵奇异. 从(2.3), 我们有

$$\lim_{h \rightarrow 0} (w_{,s} - \psi_s) = \lim_{C_c \rightarrow \infty} \frac{Q_s}{C_c} = 0$$

可以得到当 $h \rightarrow 0$ 时,  $\psi_x$ 和 $\psi_y$ 与 $w$ 是相关的, 因此与 $w$ 无关的转角分量应为零. 利用这一结论, 我们可以得到适用于薄板的位移矢量

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & xy & x^2 - 2D/C & xy & y^2 - 2D/C & x^3 & x^2y + xy^2 & y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 + 6\frac{D}{C} & 2xy + y^2 + \frac{2D}{C} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 2xy + x^2 + \frac{2D}{C} & 3y^2 + \frac{6D}{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ P(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} xy^2 & x^4 - y^4 - 12\frac{D}{C}(x^2 - y^2) & xy(x^2 + y^2) - 12\frac{D}{C}xy & x^5 - 5y^2x^3 - 10\frac{D}{C}(x^3 - 3y^2x) \\ y^2 + 2\frac{D}{C} & 4x^3 & y(y^2 + 3x^2) & 5(x^4 - 3x^2y^2) \\ 2xy & -4y^3 & x(3y^2 + x^2) & -10xy^3 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} y^3 - 5x^2y^2 - 10\frac{D}{C}(y^3 - 3x^2y) & x^4 - 15x^2y^2 + 180\frac{D}{C}x^2y^2 \\ -10xy^3 & 6x^3 - 60x^2y^2 \\ 5(y^4 - 3x^2y^2) & -30x^4y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

和内力矢量

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6D & -2D & 0 & -2D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2D & -6D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2D & 0 & 2\nu D & -6Dx & -2D(y+\nu x) & -6D\nu y & -2D\nu x \\ 0 & 0 & 0 & -2\nu D & 0 & -2D & -6D\nu x & -2D(x+\nu y) & -6Dy & -2Dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D(1-\nu) & 0 & 0 & -2D(1+\nu)(x+y) & 0 & -2D(1-\nu)y \\ -24Dx & -12Dy & 30D(y^2-x^2) \\ 24Dy & -12Dx & 60Dxy \\ -12D(x^2-\nu y^2) & -6D(1+\nu)xy & -10D(2x^3-3xy^2-\nu x^3) \\ 12D(y^2-\nu x^2) & -6D(1+\nu)xy & 10D[x^3-\nu(2x^3-3xy^2)] \\ 0 & -3D(1-\nu)(x^2+y^2) & 30D(1-\nu)x^2y \\ 60Dxy & 360Dxy^2 \\ 30D(x^2-y^2) & 360Dx^2y \\ 10D[y^3-\nu(2y^3-3x^2y)] & -D(30x^4-180x^2y^2-30\nu x^4) \\ -10D[(2y^3-3x^2y)-\nu y^3] & D[30x^4-\nu(30x^4-180x^2y^2)] \\ 30D(1-\nu)xy^2 & 120D(1-\nu)x^3y \end{bmatrix} \{C\} + \{f\} \quad (2.13)$$

(2.12)和(2.13)满足于平衡方程(2.4)。当 $h \rightarrow 0$ 时,由(2.12)和(2.13)产生的刚度矩阵是非奇异的。一般地,当单元的厚跨比 $h/s \geq 0.1$ 时,单元刚度矩阵可由(2.5)和(2.8)式获得; $h/s < 0.1$ 时,可由(2.12)和(2.13)获得。

对于变厚度 Reissner 板,可以根据 $h/s$ 值从(2.5)或(2.12)式得到单刚矩阵,而不须考虑单元边界上的协调问题,应当指出利用(2.5)和(2.8)计算 $h/s < 0.1$ 的薄板,只要网格划分的足够细,可消除单元刚度的奇异性,仍可得到满意的结果。

### 三、收敛性证明

我们把(2.1)和(2.4)写成偏微分算子形式

$$Bw = P(x, y), \quad \bar{B}_0 \bar{w} = \bar{P}. \quad (\text{在 } \Omega_0 \text{ 上}) \quad (3.1)$$

这里

$$w = \{w \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T, \quad \bar{w} = \{\bar{w} \quad \bar{\psi}_x \quad \bar{\psi}_y\}^T$$

$\bar{w}$ 表示用本文方法求得的近似解。注意 $B$ 和 $\bar{B}_0$ 是线性算子,因此内积

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \bar{B}_0 \bar{w}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \sum \bar{B}_0 \bar{w}) = 0 \quad (3.2)$$

式中

$$\varphi = \{w^* \quad \psi_x^* \quad \psi_y^*\}^T$$

是索伯列夫空间 $W_2^{(1)}$ 中的一个任意元素,利用分部积分,我们可得

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \bar{B}_0 \bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, w - \bar{w}) \\ &+ \sum \int_{\partial \Omega} [w^*(Q_n - \bar{Q}_n) - \psi_x^*(M_n - \bar{M}_n) - \psi_y^*(M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \\ &- Q_n^*(w - \bar{w}) + M_n^*(\psi_n - \bar{\psi}_n) + M_{ns}^*(\psi_s - \bar{\psi}_s)] ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

上标\*表示算子 $B$ 的共轭算子或共轭边界条件。这里假定 $M_n^*$ ,  $M_{ns}^*$ 和 $Q_n^*$ 是连续的。由于在单元内节点上,位移和内力是连续的,在外节点满足给定的边界条件,如果让未知边界条件对应的共轭边界条件为零,则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, \varpi - \bar{\varpi}) = 0 \tag{3.4}$$

根据 Hilbert-伴随算子逆定理, 当  $B$  给定的边界条件有逆算子  $B^{-1}$  存在时,  $B^*$  在零共轭边界条件下也有逆, 特别地

$$B^* \varphi = \varpi - \bar{\varpi} \tag{3.5}$$

时, 有唯一解  $\varphi \in W_2^{(1)}(\Omega)$ , 使  $M_n^*$ ,  $M_{ns}^*$  和  $Q_n^*$  在单元之间连续, 因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varpi - \bar{\varpi})^2 d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

在子空间  $\Omega - \Omega_e$  中, 利用 (3.6), 连续条件, 边界已知条件及未知边界条件对应的零共轭边界条件可得

$$\int_{\Omega - \Omega_e} (\varphi, B\varpi - \bar{B}\bar{\varpi}) d\Omega = - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_e} [w^*(Q_n - \bar{Q}_n) - \psi_n^*(M_n - \bar{M}_n) - \psi_{ns}^*(M_{ns} - \bar{M}_{ns}) - Q_n^*(w - \bar{w}) + M_n^*(\psi_n - \bar{\psi}_n) + M_{ns}^*(\psi_s - \bar{\psi}_s)] ds = 0 \tag{3.7}$$

这里  $e$  是  $\Omega$  中任意的一个元素. 由  $w^*$ ,  $\psi_n^*$ ,  $\psi_{ns}^*$ ,  $M_n^*$ ,  $M_{ns}^*$  和  $Q_n^*$  的任意性, 从 (3.7) 我们可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w} &= w, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\psi}_n = \psi_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\psi}_s = \psi_s \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_n &= M_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_{ns} = M_{ns}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Q}_n = Q_n \quad (\text{在单元的节点上}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

至此, 收敛性已被证明.

### 四、算 例

**算例1** 一个边长为  $a$  在均布载荷  $q$  作用下的简支方板, 如图2所示. 由于对称, 我们取  $1/8$  板进行计算. 网格划分取  $2 \times 2$  和  $4 \times 4$ . 各种不同厚跨比板的中心挠度计算结果列于表1, 并和精确解与其它有限元解作了比较.

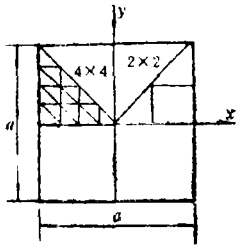


图2 均布载荷作用下的方板

**算例2** 一个边长为  $a$  在均布载荷  $q$  作用下的固支方板. 网格划分和算例1相同. 随  $\delta = D/Ca^2$  不同板的中心挠度计算结果列于表2, 并和解析解作了比较.

**算例3** 一个在固支边界条件下受均布载荷  $q$  作用的圆板. 圆板的厚度为  $h$ , 半径为  $a$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ . 由于对称, 仅计算  $1/8$  板. 网格划分如图3所示. 表3给出不同厚度时中心挠度的计算结果. 表4给

表 1 简支方板均布载荷作用下的中心挠度系数  $\gamma_q$   
( $\gamma_q = w_{\max} Eh^3 / qh^4$ ,  $\nu = 0.3$ )

h/s	理论解		本文解 ( $\frac{1}{8}$ 板)		UH <sup>(6)</sup>	Pryor <sup>(4)</sup> 等	Rao <sup>(5)</sup> 等
	薄板	厚板 <sup>[12]</sup>					
0.0001	0.04437		0.04275	0.04427	0.04419		
0.05	0.04437	0.04486	0.04447	0.04484	0.04487	0.04469	0.04483
0.10	0.04437	0.04632	0.04763	0.04642	0.04669	0.04612	0.04627
0.15	0.04437	0.04876	0.04959	0.04877	0.04932	0.04852	0.04866
0.20	0.04437	0.05217	0.05271	0.05216	0.05255	0.05186	0.05201
0.25	0.04437	0.05656	0.05702	0.05657	0.05632	0.05617	0.05631
网格 (1/4板)			2×2	4×4	6×6	6×6	2×2

表 2 固支方板均布载荷作用下的中心挠度系数  $\gamma_q (\gamma_q = w_{max} D / qa^4, \nu = 0.3)$

$\delta$		0.00001	0.005	0.01	0.03	0.05
本文解	2×2	0.000901	0.001724	0.002045	0.003517	0.005010
	4×4	0.001252	0.001659	0.002043	0.003543	0.005024
解析解[13]		(经典解)0.00126	0.00168	0.00207	0.00357	0.00506

出当  $h/a=0.2$  时, 位移和内力的计算结果。表中  $\psi_r$ ,  $M_{rr}$  和  $M_{\theta\theta}$  分别是圆板的径向转角, 径向弯矩和周向弯矩。

表 3 固支圆板在均布载荷作用下的中心挠度系数  $\gamma_q (\gamma_q = 64Dw_{max} / qa^4, \nu = 0.3)$

$h/a$	0.002	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
本文解	1.026	1.035	1.175	1.416	1.754	2.190
精确解 <sup>[10]</sup>	1.000	1.045	1.183	1.411	1.731	2.142

表 4 均布载荷作用下的固支圆板 ( $h/a=0.2, \nu=0.3$ )

$r/a$	$\frac{64D}{qa^4} w$		$\frac{16D}{qa^3} \psi_r$		$\frac{16}{qa^2} M_{\theta\theta}$		$\frac{16}{qa^2} M_{rr}$		$\frac{2}{qa} Q_r$	
	精确解 <sup>[10]</sup>	本文解	精确解 <sup>[10]</sup>	本文解	精确解 <sup>[10]</sup>	本文解	精确解 <sup>[10]</sup>	本文解	精确解 <sup>[10]</sup>	本文解
0.125	1.149	1.138	0.1230	0.1245	1.298	1.308	1.276	1.283	0.125	0.1242
0.375	0.8957	0.8835	0.3223	0.3237	1.060	1.050	0.8634	0.8637	0.375	0.3794
0.625	0.4828	0.4715	0.3809	0.3796	0.5852	0.5737	0.03837	0.02654	0.625	0.6293
0.875	0.0978	0.0915	0.2051	0.1999	-0.1273	-0.1464	-1.199	-1.177	0.875	0.8739

算例 4 一个受扭的方板, 边长为  $2a$ , 它的精确解为<sup>[14]</sup>

$$\psi_x = \frac{1}{\lambda} \left( 2 \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda a} - \lambda y \right), \psi_y = -x, w = xy$$

$$M_{xx} = -D(1-\nu) \left( \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda a} - 1 \right), Q_x = -D(1-\nu)\lambda \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda a}$$

$$M_{yy} = M_{xy} = Q_y = 0$$

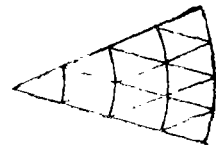


图3 圆板的网格划分

利用对称性, 取1/4板计算, 网格划分如图4所示。它的边界条件为

$$w = \psi_x = M_n = 0 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 上})$$

$$w = \psi_y, \psi_x = a, M_n = 0 \quad (\text{在 } x=a \text{ 上})$$

$$w = \psi_x = M_n = 0 \quad (\text{在 } y=0 \text{ 上})$$

$$M_n = M_{xx} = Q_n = 0 \quad (\text{在 } y=a \text{ 上})$$

我们取厚跨比  $h/2a=1$ , 泊松比  $\nu=0.3$ 。计算的位移和内力列于表5。

以上四个算例表明, 利用本文的方法, 无论是薄板还是厚板, 均可得到满意的计算结果, 收敛于精确解, 并有较高的数值精度。表明了本文理论的正确性。

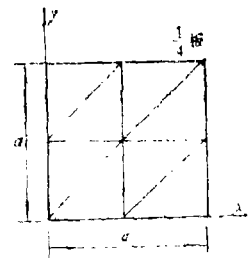


图4 方板的高离散

表 5

受扭方板 ( $h/2a=1, \nu=0.3$ )

$y/a$	$\psi_x(y)/\psi_x(a)$		$M_{xy}(y)/M_{xy}(0)$		$Q_x(y)/Q_x(a)$	
	精确解	本文解	精确解	本文解	精确解	本文解
0.00	0	0	1.000	1.002		
0.25	-0.2926	-0.2872	0.9484	0.9439	0.1742	0.1748
0.50	-0.3873	-0.3859	0.7851	0.7867		
0.75	-0.0553	-0.0531	0.4851	0.4862	0.6379	0.6384
1.00	1.000	1.005	0.000	0.000		

## 参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor and J. M. Too, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, (3)(1971), 275—290.
- [2] Zienkiewicz, O. C. and E. Hinton, Reduced integration, function Smoothing and non-conformity in finite element analysis—finite element methods in engineering, *Journal of the Franklin Institute*, 302 (5/6)(1976), 443.
- [3] Hughes, T. J. R., M. Cohen and M. Haron, Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates, *Nuclear Engineering and Design*, 46 (1978), 203.
- [4] Pryor, C. W., et al., Finite element bending analysis of Reissner plates, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 96 (1970), 967—983.
- [5] Rao, G. V., et al., A high precision triangular plate bending element for the analysis of thick plates, *Nucl. Eng. Des.*, 30 (1974), 408—412.
- [6] Wu Chang-chun, Some problems of plate bending hybrid model with shear effect, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18 (1982), 755—764.
- [7] Venkateswara Rao, G., J. Venkateramana and K. Kanaka Raju, Stability of moderately thick rectangular plates using a high precision triangular element, *Computers and Structures*, 5 (4) (1975), 257.
- [8] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, IV, 非均匀变厚度梁的弯曲、稳定和自由振动, 兰州大学学报, 力学专号, 1(1)(1979), 133—157.
- [9] 纪振义、叶开沅, 任意变系数微分方程的精确解析法, 应用数学和力学, 10(10) (1989).
- [10] Ween, F. Vander, Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18 (1982), 1—18.
- [11] Hood, P., Frontal solution Program for unsymmetric matrices, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), 379—399.
- [12] Salerno, V. L. and M. A. Goldberg, Effect of shear deformation on bending of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, 27 (1960).
- [13] 中国科学院北京力学所固体力学研究室板壳组, 《夹层板的弯曲、稳定和振动》, 科学出版社, 北京(1977), 39.
- [14] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 12 (1945), 69—77.



## An Exact Element Method for the Bending of Nonhomogeneous Reissner's Plate

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

### Abstract

In this paper, based on the step reduction method and exact analytic method, a new method, the exact element method for constructing finite element, is presented. Since the new method doesn't need variational principle, it can be applied to solve non-positive and positive definite partial differential equations with arbitrary variable coefficients. By this method, a triangle noncompatible element with 15 degrees of freedom is derived to solve the bending of nonhomogeneous Reissner's plate. Because the displacement parameters at the nodal point only contain deflection and rotation angle, it is convenient to deal with arbitrary boundary conditions. In this paper, the convergence of displacement and stress resultants is proved. The element obtained by the present method can be used for thin and thick plates as well. Four numerical examples are given at the end of this paper, which indicates that we can obtain satisfactory results and have higher numerical precision.

**Key words** thick plate, exact finite element method, incompatible element method